Dipartimento
di Matematica
e Informatica

EPIDEMIE
Passato, presente e futuro
e cosa può fare la matematica per fronteggiarle

Andrea Corli

UTEF, Comacchio, Palazzo Bellini, 23 aprile 2025

Le scienze e il tempo

Perché è così difficile parlare di matematica?

Una prima spiegazione: la matematica si è molto stratificata nel tempo:

- Geometria elementare (Euclide): IV-III secolo a.C.
- Formula risolutiva equazioni algebriche di grado 2, 3 e 4: VII sec., 1526, 1545.
- Calcolo infinitesimale (Newton e Leibniz): 1650-1700.

Invece...

- Conservazione della massa nelle reazioni chimiche, ossigeno, idrogeno (Lavoisier): 1780.
- Evoluzione (Darwin): 1859 (L'origine delle specie).
- Teoria della deriva dei continenti (Wegener): 1912.

Le matematica e le altre scienze

Perché è così difficile parlare di matematica?

Una seconda spiegazione: la matematica non si vede ... ma è alla base di molte scienze

"*La matematica è l'alfabeto nel quale Dio ha scritto l'universo*" (G. Galilei)

- In Fisica: meccanica classica, quantistica, teoria della relatività.
- Economia: micro- e macroeconomia, equazione di Black-Scholes (Merton e Scholes vinsero il Nobel nel 1997).
- Informatica e intelligenza artificiale, "*data science*" e "*big data*".
- Biologia: dinamica delle popolazioni, diffusione di epidemie, competizione-facilitazione nel mondo animale e vegetale, genomica.

Le matematica di tutti i giorni

- Riconoscimento di immagini (facciali, di oggetti, nella diagnostica medica, satellitari).
- Diffusione di opinioni (elezioni, su internet e i social).
- Dinamiche collettiva (traffico stradale, movimenti di folle, movimenti di organismi animali).
- Logistica.
- Crittografia (per carte di credito, acquisti online).
- Finanza, analisi del rischio, assicurazioni.

Le epidemie

Malattie infettive: peste, vaiolo, colera, lebbra, TBC, influenza, AIDS, Ebola, Covid-19, ...

Cos'è un'epidemia?

È una malattia infettiva localizzata nel tempo.
Pandemia se interessa parti importanti della popolazione.

Modellizzare epidemia significa prevedere

- l'andamento,
- gli effetti delle misure di controllo (vaccinazioni, lockdown)...

Storicamente:

- Primo tentativo: circa 1760, vaiolo.
- Analisi matematica più rigorosa, 1927 (peste Bombay 1906).

I modelli

Vari tipi di modelli:

- deterministici, i più semplici, efficaci quando sono in gioco grandi numeri
- probabilistici, più accurati nell'istante iniziale di un'epidemia quando fattori casuali possono modificare l'evoluzione
- informatici, di intelligenza artificiale, che permettono di automatizzare modelli matematici e completarli quando le variabili in gioco sono tante

Ci concentreremo sui modelli deterministici, per poi vedere alcune simulazioni basate su questi.

Ipotesi sulla popolazione e sulla malattia

Popolazione con N individui:

- abbastanza numerosa
- ben distribuita spazialmente e gli individui sono in contatto tra loro
  $\rightsquigarrow$ es: città
- omogenea: gli individui hanno tutti caratteristiche simili
  $\rightsquigarrow$ non distingueremo per età
- chiusa, cioè non vi sono né immigrazioni, né emigrazioni
  $\rightsquigarrow$ $N =$ costante

La malattia:

- si diffonde per contagio: influenza, morbillo, AIDS, COVID-19, ...
- ha un preciso tasso di trasmissione = facilità a diffondersi per contagio
- può essere mortale o meno

Le classi della popolazione

Supporremo che la popolazione sia ripartita (rispetto all'epidemia) in classi:

- S = suscettibili: individui sani ma suscettibili di ammalarsi.
- I = infetti: individui in cui la malattia si è manifestata, la possono diffondere per contatto.
- R = rimossi (da I): individui che non creano più nuovi contagi (perché hanno acquisito l'immunità, o sono morti, o sono in quarantena).

Il passaggio da una classe ad un'altra si indica:

$$\boxed{S \longrightarrow I \longrightarrow S} \qquad \boxed{S \longrightarrow I \longrightarrow R}$$

I parametri della malattia

- c: tasso di contatto $=$ numero medio di contatti di un individuo in un intervallo unitario di tempo (un giorno).
- i: infettività $=$ probabilità di infezione in un contatto (tra I ed S) $\rightsquigarrow$ costante biologica, caratteristica della malattia.
- $e = c \cdot i$: tasso di contatto efficace $=$ numero medio di individui contagiati da un infetto nell'unità di tempo.
- r: tasso di rimozione $=$ probabilità che un I diventi R (o S). $\rightsquigarrow$ $1/r$: durata media della malattia.
- $\boxed{R_0 = \frac{e}{r}}$: *numero di riproduzione di base*

  $=$ numero di contagiati da un individuo infetto

  Per il Covid-19: $\boxed{R_0 \sim 3}$.

R_0 deve essere ≤ 1 per fermare l'epidemia!!!

Un ragionamento sbagliato ma istruttivo di SI

Supponiamo di studiare la propagazione di una epidemia

- in una popolazione di 1000 abitanti;
- al giorno 0 vi è un solo infetto e la malattia non dà immunità;
- supponiamo che $R_0 = 2$, dunque ogni infetto contagia 2 individui, e supponiamo che siano contagiati il giorno successivo a cui si diventa infetti.

Un ragionamento sbagliato ma istruttivo di *SI*

Supponiamo di studiare la propagazione di una epidemia

- in una popolazione di 1000 abitanti;
- al giorno 0 vi è un solo infetto e la malattia non dà immunità;
- supponiamo che $R_0 = 2$, dunque ogni infetto contagia 2 individui, e supponiamo che siano contagiati il giorno successivo a cui si diventa infetti.

giorno	0	1	2	3	4
nuovi infetti	$1 \mapsto$	$2 \mapsto$	$2 \times 2 = 4$	$4 \times 2 = 8$	$8 \times 2 = 16$
totale infetti	1	3	6	12	24

Un ragionamento sbagliato ma istruttivo di SI

Supponiamo di studiare la propagazione di una epidemia

- in una popolazione di 1000 abitanti;
- al giorno 0 vi è un solo infetto e la malattia non dà immunità;
- supponiamo che $R_0 = 2$, dunque ogni infetto contagia 2 individui, e supponiamo che siano contagiati il giorno successivo a cui si diventa infetti.

giorno	0	1	2	3	4
nuovi infetti	$1 \mapsto$	$2 \mapsto$	$2 \times 2 = 4$	$4 \times 2 = 8$	$8 \times 2 = 16$
totale infetti	1	3	6	12	24

Dunque

giorno	0	1	2	3	4
nuovi infetti	1	2	2^2	2^3	2^4
totale infetti	1	3	3×2	3×2^2	3×2^3

E allora deduciamo che al giorno n

giorno	n
nuovi infetti	2^n
totale infetti	$3 \times 2^{n-1}$

Ma il numero 2^n può essere grandissimo, molto superiore al numero totale degli abitanti, cioè 1000.
Ma abbiamo imparato quello che succede all'inizio di una epidemia: crescita esponenziale!

Rifacciamo con più precisione

Numero di nuove infezioni in un giorno:

- i nuovi infetti di oggi sono

$$\underbrace{S}_{\text{suscettibili di ieri}} \cdot \underbrace{ci}_{\text{tasso di contatto effettivo}} \cdot \underbrace{\frac{I}{N}}_{\text{frazione di infetti di ieri}}$$

- Allora

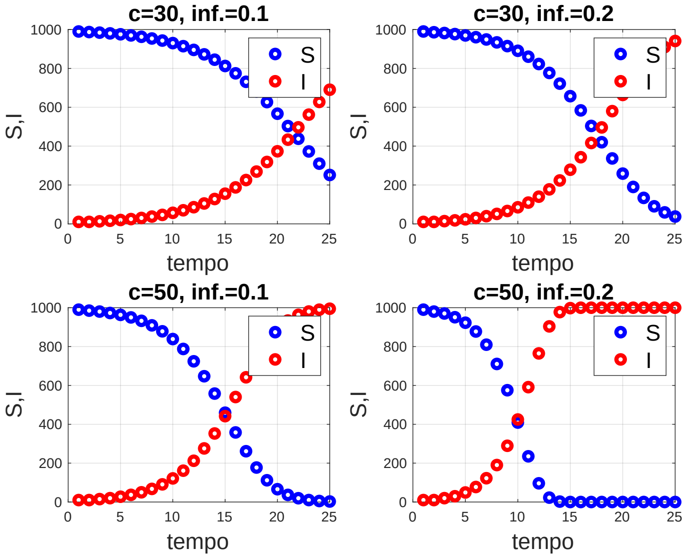
$$\underbrace{S_1}_{\text{suscettibili di oggi}} = \underbrace{S}_{\text{suscettibili di ieri}} - \underbrace{Sci\frac{I}{N}}_{\text{i nuovi infetti}}.$$

Un esempio

- Supponiamo $I + S = N$ ad ogni istante, $N = 1000$
- $c = 30$ contatti *pro capite* al giorno
- infettività $i = 0.1 \rightsquigarrow e = ci = 3$
- $\boxed{\mathrm{I}(0) = 10}$, $\boxed{\mathrm{S}(0) = 990}$
- Dopo un giorno

$$S(1) = S(0) - S(0)ci\frac{I(0)}{N} = \boxed{960.3}$$
$$I(1) = N - S(1) = \boxed{39.7}$$

Simulazioni



Modello SIS epidemico

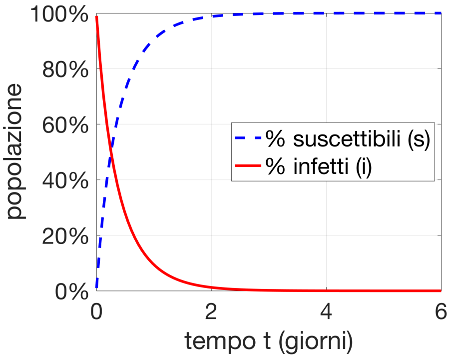
$$\boxed{S \longrightarrow I \longrightarrow S}$$

- Malattia né mortale, né immunizzante. Esempio: il raffreddore.
- L'evoluzione della malattia dipende dal valore di R_0, infatti...

Modello SIS: soluzione

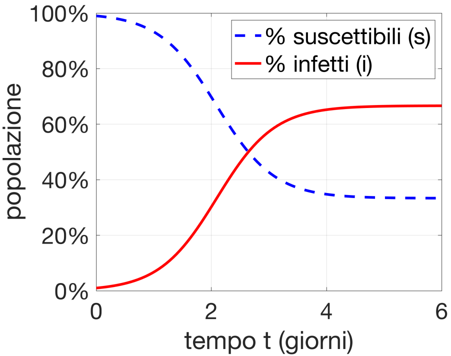
$R_0 \leq 1$

$\Rightarrow$ la malattia si estingue



$R_0 > 1$

$\Rightarrow$ non si estingue e si raggiunge un equilibrio



Modello SIR

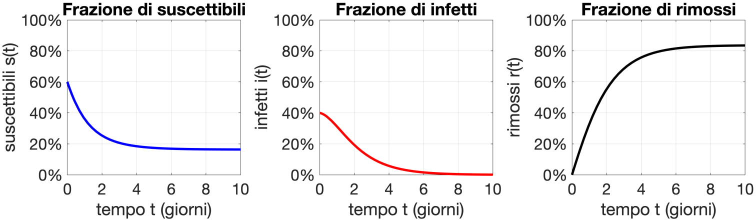
$$\boxed{S \longrightarrow I \longrightarrow R}$$

- Ad esempio, l'influenza.
- Rimossi $=$ immuni.

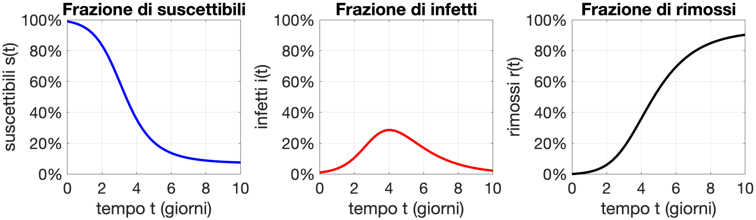
Modello SIR epidemico

Due tipi di comportamento, a seconda del valore di $R_0 s_0$:

$$R_0 s_0 \leq 1$$



$$R_0 s_0 > 1$$



I limiti dei modelli SIS e SIR

- L'infettività non è costante nel tempo (la carica virale si riduce al passare del tempo).
- Una popolazione non è mai omogenea, è divisa in gruppi (grandi) e famiglie (piccole), vi sono reti di contatti ...
- Alcuni gruppi hanno tassi di contatto più elevati: si ammalano di più, si immunizzano prima.
- I parametri possono cambiare nel tempo (es.: stagionalità) .
- Per studiare l'andamento a lungo termine bisogna tener conto anche di nascite, morti, perdita dell'immunità, movimento della malattia, ...

Ma più parametri si considerano, più si lascia che questi parametri varino nel tempo, più il modello si complica ...

$$\Downarrow$$

Serve un aiuto dall'Informatica!!

Biomatematica oltre le epidemie...

- L'eterogeneità di una popolazione favorisce o facilita la diffusione di un'epidemia? →
- Competizione e facilitazione tra specie: conviene lottare o allearsi? →
- Come spiegare e prevedere fasce anomale di vegetazione? →
- Reazioni chimiche: quando "finisce" una reazione? Vi è un solo punto di equilibrio? →
- Sterilizzare le zanzare per impedire la diffusione della malaria? Quante?
- Quanto pescare per evitare l'estinzione dei pesci?
- Cosa regola il movimento di gruppi di animali (stormi di uccelli, scuole di pesci, flussi pedonali)? Lo si può prevedere? (Parisi ha vinto il Nobel su questi temi)
- Come nei mari si alternano cicli di abbondanza di prede e cicli di abbondanza di predatori?
- Come modellizzare la crescita di una pianta?
- Come si propaga un gene favorevole a discapito di un altro?
- ...

Grazie per l'attenzione!