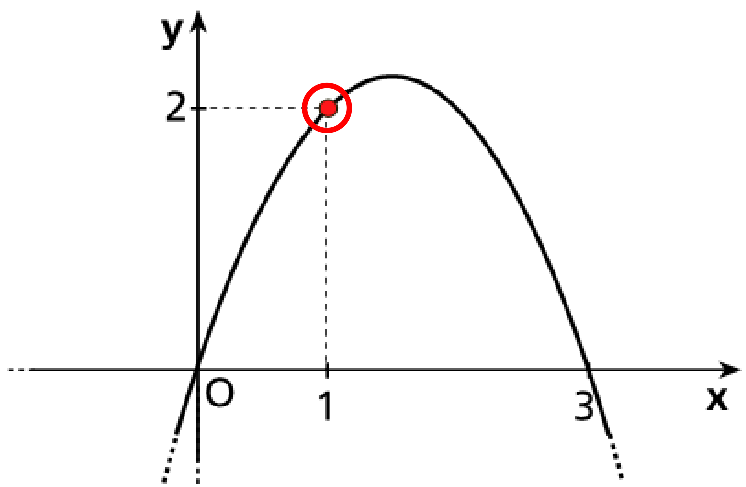
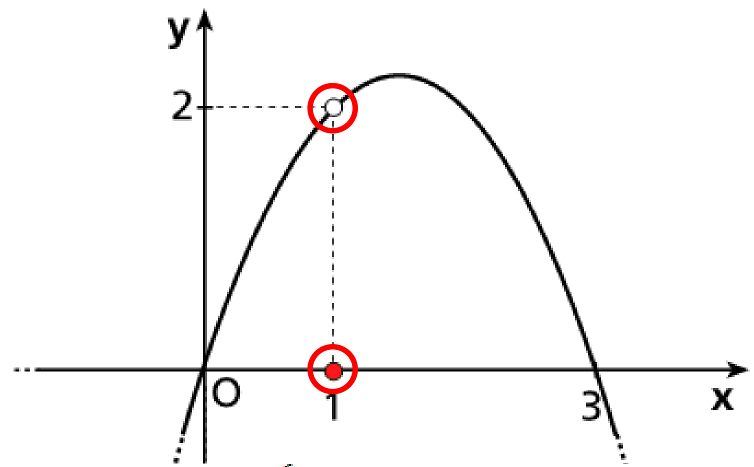
LE FUNZIONI CONTINUE

STESSO LIMITE, VALORI DIVERSI



$$f(x) = -x^2 + 3x$$



$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Le due funzioni hanno lo stesso limite per x che tende a $x_0 = 1$.
Il valore del limite è $l = 2$.
Nel primo caso il valore del limite coincide con quello della funzione in x_0: $f(x_0) = l$.
Nel secondo caso il valore di f non coincide con quello del limite.
La prima funzione è **continua** in $x = 1$, la seconda è **discontinua**.

Funzioni continue

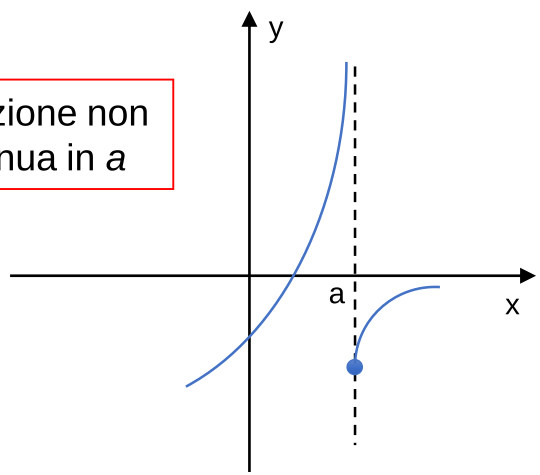
Sia $f(x)$ una funzione definita almeno nell'intorno di un punto x_0. Diciamo che $f(x)$ è continua in x_0 se esiste finito il limite per x che tende a x_0 di $f(x)$ ed è:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

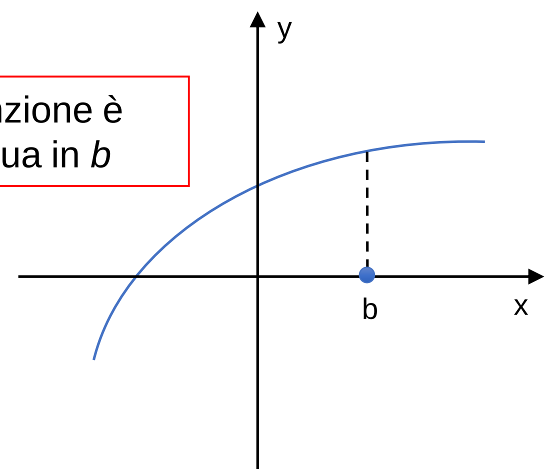
Una funzione $f(x)$ è quindi continua in x_0 se:

- esiste $f(x_0)$
- esiste finito $\lim_{x \to x_0} f(x)$
- i due valori coincidono.

La funzione non è continua in *a*



La funzione è continua in *b*



ESEMPIO

Verifichiamo che la funzione $f(x) = 2x^4 - 3$ è continua in $x_0 = 2$.

La funzione ha come dominio *R* ed è quindi definita in un intorno del punto 2.

Calcoliamo $f(x_0)$: $f(2) = 29$

Calcoliamo $\lim_{x \to x_0} f(x)$: $\lim_{x \to 2} (2x^4 - 3) = 29$

Avendo trovato due valori uguali, la funzione è continua.

2. LA DEFINIZIONE DI FUNZIONE CONTINUA

DEFINIZIONE

$f(x)$ è **continua a destra in x_0**, se $f(x_0)$ coincide con il limite destro di $f(x)$ per x che tende a x_0:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \; .$$

DEFINIZIONE

$f(x)$ è **continua a sinistra in x_0**, se $f(x_0)$ coincide con il limite sinistro di $f(x)$ per x che tende a x_0:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \; .$$

Una funzione può essere definita continua anche negli estremi dell'intervallo di definizione [*a*; *b*].

DEFINIZIONE

Funzione continua in un intervallo

Una funzione definita in [*a*; *b*] si dice continua nell'intervallo [*a*; *b*] se è continua in ogni punto dell'intervallo.

ESEMPIO

La funzione

$$\begin{cases} x^3 & \text{se } x < 1 \\ x + 2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

non è continua in $x_0 = 1$,
non è continua nell'intervallo [0;1],
ma è continua nell'intervallo [1;2].

Funzioni e continuità

Sono continue in ogni punto del loro dominio:

- la funzione costante $f(x) = k$
- la funzione potenza $f(x) = x^h$
- la funzione esponenziale $f(x) = a^x$
- la funzione logaritmica $f(x) = \log_a x$
- le funzioni goniometriche $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \tan x$ e le loro inverse.

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni continue, risultano continue anche le funzioni:

$k \cdot f(x)$ (con k numero reale)

$f(x) \pm g(x)$

$f(x) \cdot g(x)$

$[f(x)]^n$ (con n intero positivo)

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (se $g(x) \neq 0$)

ESEMPI

1. $y = 5x^2 - 3x + 2$, che ha come dominio R, è continua in ogni punto di R in quanto somma di funzioni continue.

2. $y = 3x\cos x$, che ha come dominio R, è continua in ogni punto di R in quanto prodotto di funzioni continue.

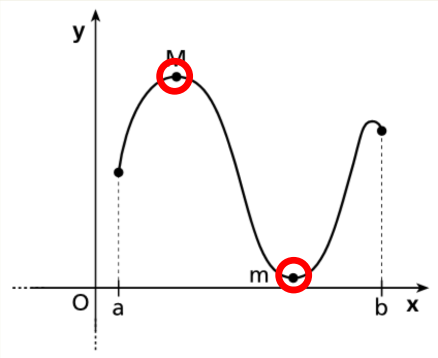
3. $y = \dfrac{3x^2 + 4}{x - 1}$, è continua nel dominio $R - \{1\}$ in quanto quoziente di funzioni continue.

4. $y = e^{x^2 - 3x}$, è continua nel dominio R in quanto funzione composta dalle due funzioni continue $x^2 - 3x$ ed e^x .

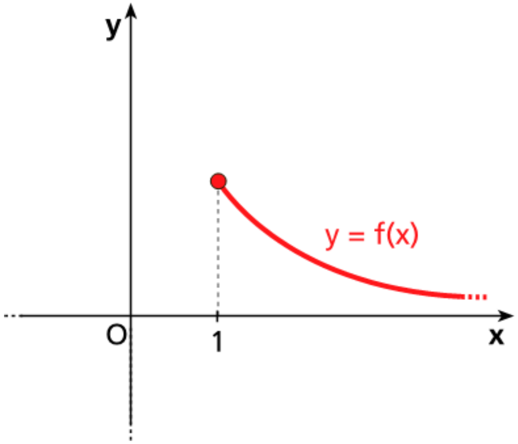
I TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE

DEFINIZIONE

Teorema di Weierstrass
Se f è una funzione continua in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$, allora essa assume, in tale intervallo, il massimo assoluto e il minimo assoluto.



Controesempi

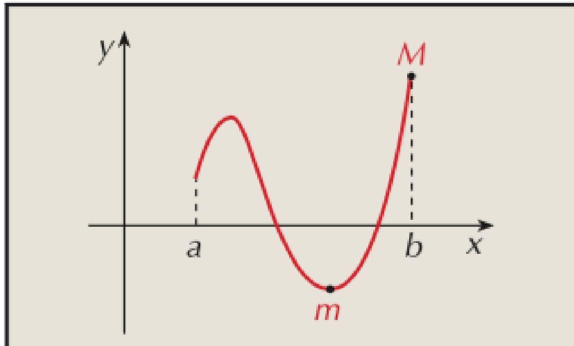
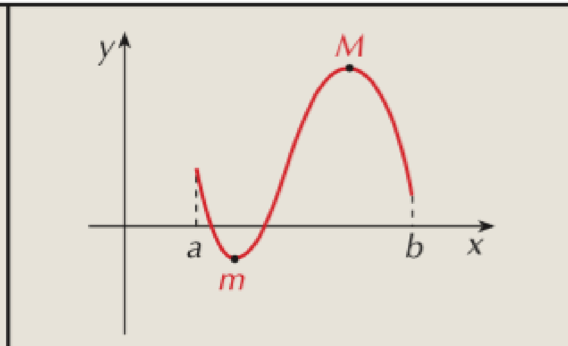
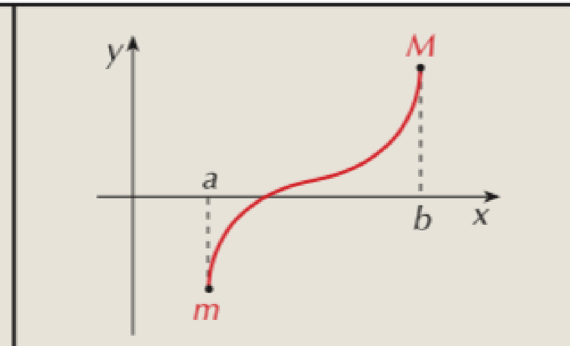


Funzione continua nell'intervallo illimitato $[1; +\infty[$.

Possiede un massimo assoluto, ma non un minimo.

Teorema di Weierstrass

Il massimo *M* e il minimo *m* della funzione si possono trovare in corrispondenza di uno dei punti estremi oppure di un punto interno a $[a, b]$, come illustrato nelle seguenti figure:

		
Il minimo si trova in un punto interno ad $[a, b]$, il massimo nell'estremo b	Il massimo e il minimo si trovano entrambi in punti interni ad $[a, b]$	Il massimo si trova nell'estremo b, il minimo nell'estremo a

ESERCIZI: I TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE

ESERCIZIO GUIDA

Stabiliamo *se* vale il teorema di Weierstrass per la seguente funzione, nell'intervallo indicato:

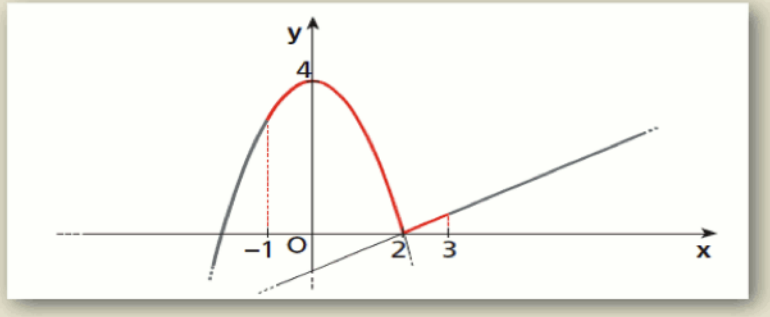
$$f(x) = \begin{cases} -x^2+4 & \text{se } x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x - 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}, \quad \text{in } [-1; 3].$$

Dobbiamo verificare l'ipotesi del teorema, ossia che la funzione è continua nell'intervallo $[-1; 3]$.

Per ogni $x \in [-1; 3]$ e $x \neq 2$, la funzione è continua perché sono continue le funzioni $y = -x^2 + 4$ e $y = \frac{1}{2}x - 1$.

Per $x = 2$ si ha $f(2) = 0$ e $\lim\limits_{x \to 2^-} (-x^2 + 4) = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(\frac{1}{2}x - 1\right) = 0$, quindi anche in 2 la funzione è continua.

Concludiamo che vale il teorema di Weierstrass.



Osservazione. Dal grafico della funzione possiamo dedurre che nell'intervallo $[-1; 3]$ il punto di massimo è $(0; 4)$ e quello di minimo è $(2; 0)$. Il massimo M della funzione è $M = 4$ e il minimo m è $m = 0$.

ALTRI ESEMPI

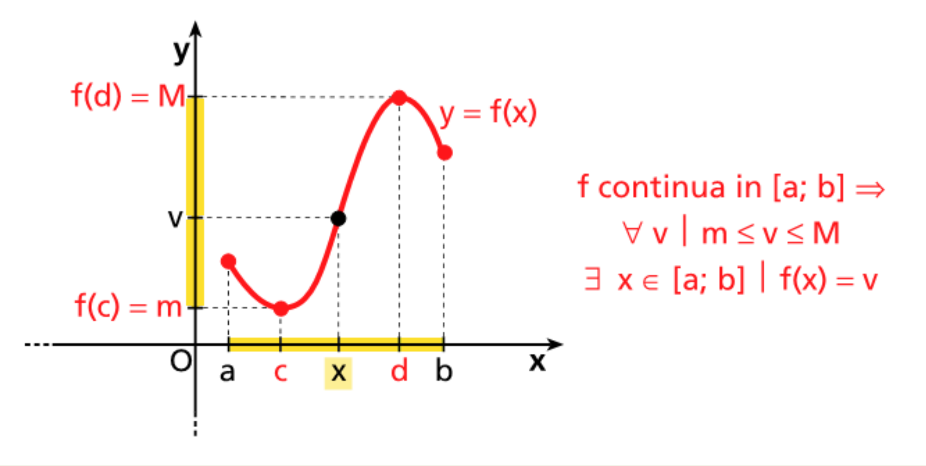
1. Consideriamo la funzione $f(x)=(x+1)^3$ nell'intervallo $I=[1,3]$, essa è definita e continua in tutto *R*, quindi a maggior ragione in *I*, e ammette pertanto il massimo e il minimo in questo intervallo.

2. La funzione $g(x)=\dfrac{x-2}{x-3}$ invece, non è continua nell'intervallo $[0,4]$ poiché non è definita in $x=3$; pertanto non è garantita l'esistenza del minimo e del massimo in questo insieme.

I TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE

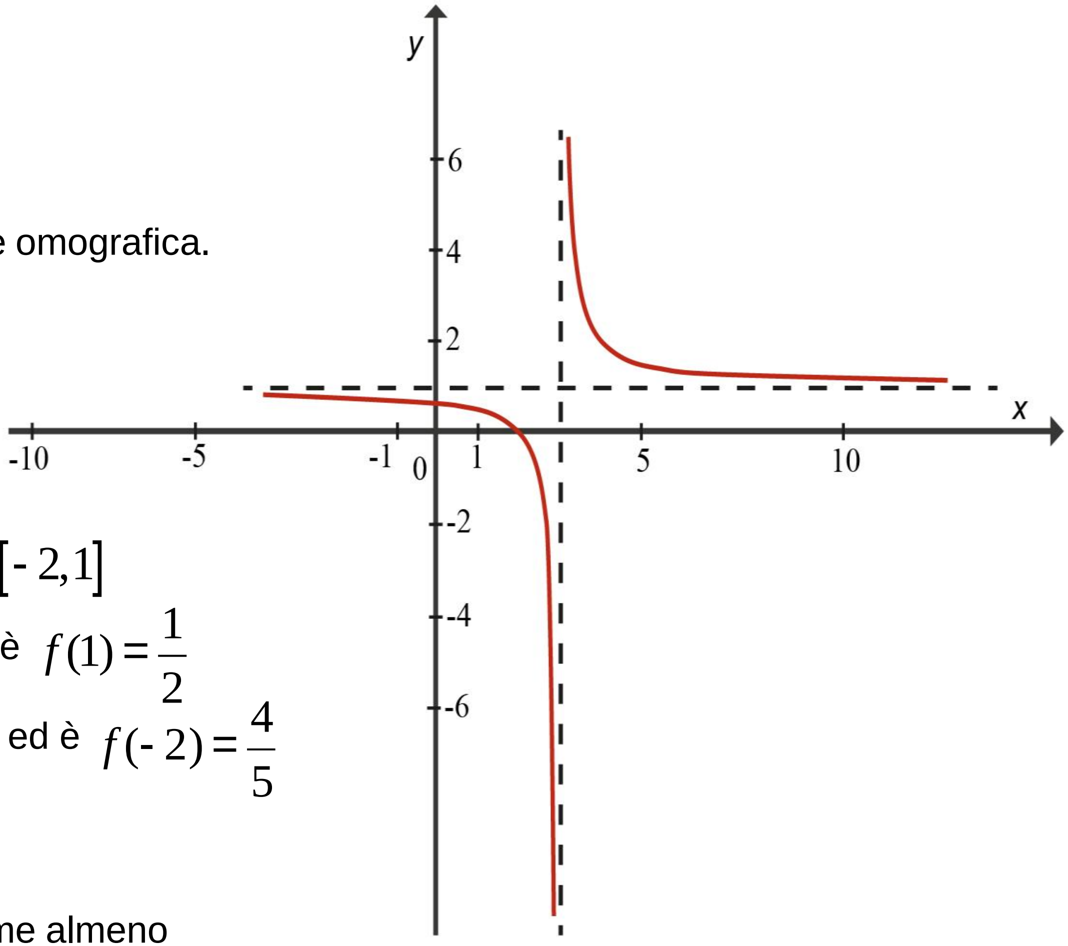
DEFINIZIONE

Teorema dei valori intermedi
Se *f* è una funzione continua in un intervallo limitato e chiuso [*a; b*], allora essa assume, almeno una volta, tutti i valori compresi tra il massimo e il minimo.



ESEMPIO

La funzione $f\left(x\right)=\dfrac{x-2}{x-3}$ è una funzione omografica.



La funzione è continua nell'intervallo $I=\left[-2,1\right]$

Assume il suo valore minimo in $x=1$ ed è $f(1)=\dfrac{1}{2}$

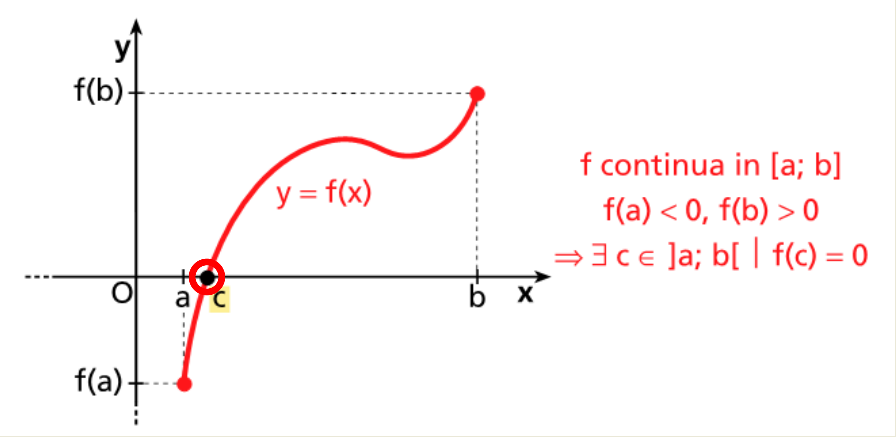
Assume il suo valore massimo in $x=-2$ ed è $f(-2)=\dfrac{4}{5}$

Possiamo quindi affermare che in I assume almeno una volta ogni valore compreso tra $\dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{4}{5}$.

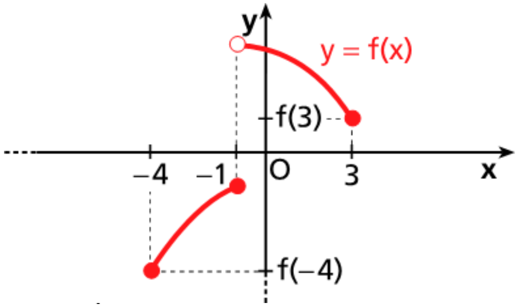
I TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE

DEFINIZIONE

Teorema di esistenza degli zeri
Se *f* è una funzione continua in un intervallo limitato e chiuso [*a; b*], e negli estremi di tale intervallo assume valori di segno opposto, allora esiste almeno un punto *c*, interno all'intervallo, in cui *f* si annulla.



Controesempi



Funzione continua in tutto [–4;3] tranne $x = -1$.

Non possiede uno zero.

4. ESERCIZI: I TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE

ESERCIZIO GUIDA

Stabiliamo *se* vale il teorema di esistenza degli zeri per la seguente funzione, nell'intervallo indicato:

$$y = \frac{x}{2x^2 - 1}, \quad \text{in} \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right].$$

La funzione è discontinua per i punti in cui $2x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{1}{2}$, ossia per $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Poiché tali punti non appartengono all'intervallo $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, la funzione è continua nell'intervallo.

Inoltre:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 > 0 \text{ e } f\left(\frac{1}{2}\right) = -1 < 0.$$

Sono quindi verificate le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri.

ALTRI ESEMPI

1. Stabiliamo se la funzione $f(x) = x^5 - 3x + 1$ ammette zeri nell'intervallo $[0,1]$.

   La funzione è continua in *R* e quindi lo è anche nell'intervallo $[0,1]$.

   La funzione assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo: $f(0) = 1$ e $f(1) = -1$

   Per il Teorema di Bolzano, esiste almeno uno zero in [0,1].

2. Stabiliamo se la funzione $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x}$ ammette zeri nell'intervallo $[-1,1]$ o nell'intervallo $[1,2]$.

   In $[-1,1]$ la funzione non è continua in quanto non è definita in $x = 0$.

   In $[1,2]$ la funzione è continua; valutiamola agli estremi dell'intervallo:

   $f(1) = 2$ $\qquad f(2) = \dfrac{9}{2}$ La funzione assume valori dello stesso segno.

   In entrambi i casi non tutte le ipotesi del teorema sono verificate, non è quindi garantita l'esistenza degli zeri in tali intervalli.

I punti di discontinuità delle funzioni

Se una funzione $f(x)$ di dominio *D* non è continua in un punto x_0, di accumulazione per *D*, si dice che x_0 è un **punto di discontinuità** o anche un **punto singolare**.

Un punto x_0 è quindi di discontinuità se:

- la funzione è definita in x_0 e $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$
- la funzione non è definita in x_0 ma esistono il limite sinistro e destro per $x \to x_0$

ESEMPIO

La funzione $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ ha dominio $D:(1,+\infty)$ e non è quindi definita $x=1$; questo punto è però di accumulazione per D.

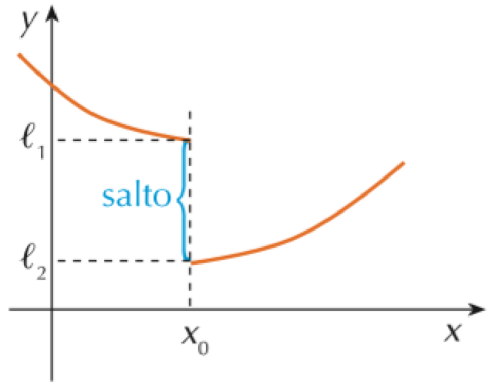
Non esiste quindi $f\left(x\right)=1$ ma è possibile valutare il limite di $f(x)$ per $x\rightarrow 1$ ed è $\lim\limits_{x\rightarrow 1}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}=\infty$.

Il punto $x=1$ è un punto di discontinuità.

Classificazione dei punti di discontinuità – Discontinuità di prima specie

Una funzione $f(x)$ presenta in $x = x_0$ una **discontinuità di prima specie** se i limiti sinistro e destro per x che tende a x_0 sono finiti e sono diversi:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_1 \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_2 \qquad \text{ed è} \qquad \ell_1 \neq \ell_2$$



La differenza $|\ell_1 - \ell_2|$ tra i due limiti si dice **salto** della funzione.

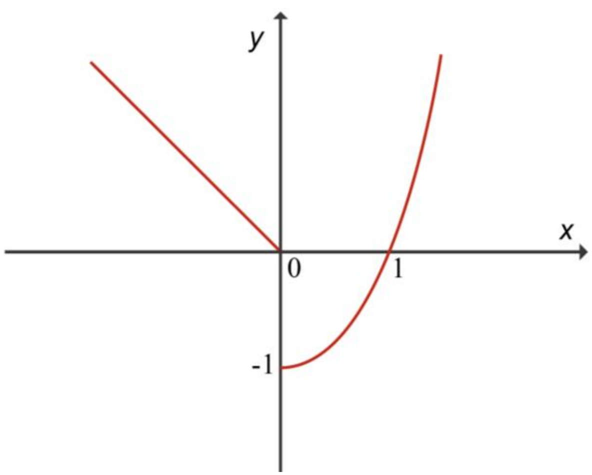
ESEMPIO

La funzione $f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x^2 - 1 & x \geq 0 \end{cases}$

è discontinua in $x = 0$, poiché:

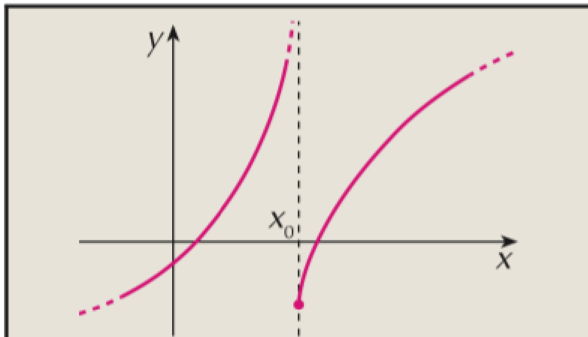
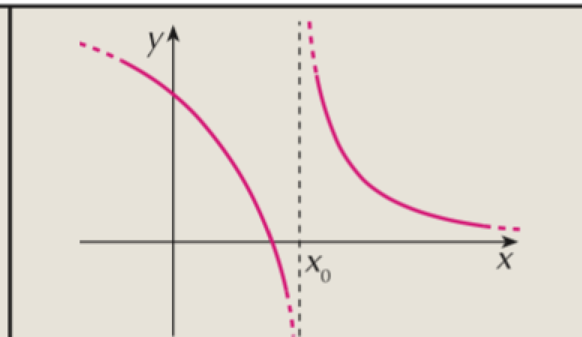
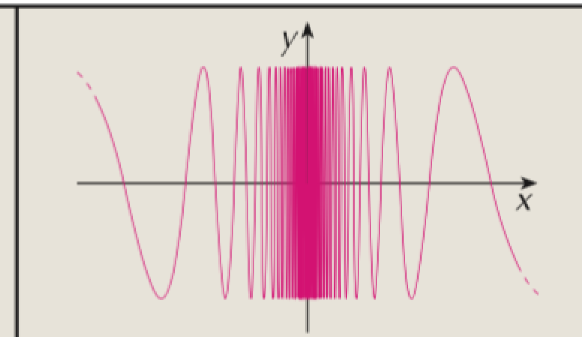
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -1$$ i due limiti sono diversi

La discontinuità è di prima specie con salto pari a $|0 - (-1)| = 1$



Classificazione dei punti di discontinuità – Discontinuità di seconda specie

Una funzione $f(x)$ presenta in $x = x_0$ una **discontinuità di seconda specie** se almeno uno dei limiti per $x \to x_0$, sinistro e destro, è infinito o non esiste.

		
per $x \to x_0$: il limite sinistro è $+\infty$ il limite destro è finito	per $x \to x_0$: il limite sinistro è $-\infty$ il limite destro è $+\infty$	per $x \to x_0$ il limite non esiste Il grafico si riferisce alla funzione $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ di cui sappiamo che non esiste il limite per $x \to 0$

ESEMPI

1. La funzione $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ non è definita in $x = 2$ e presenta in questo punto una discontinuità.

Poiché $\lim_{x \to 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty$ e $\lim_{x \to 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty$, la discontinuità è di seconda specie.

2. La funzione $f(x) = \tan \frac{1}{x}$ non è definita in $x = 0$. Calcoliamo il limite per $x \to 0$:

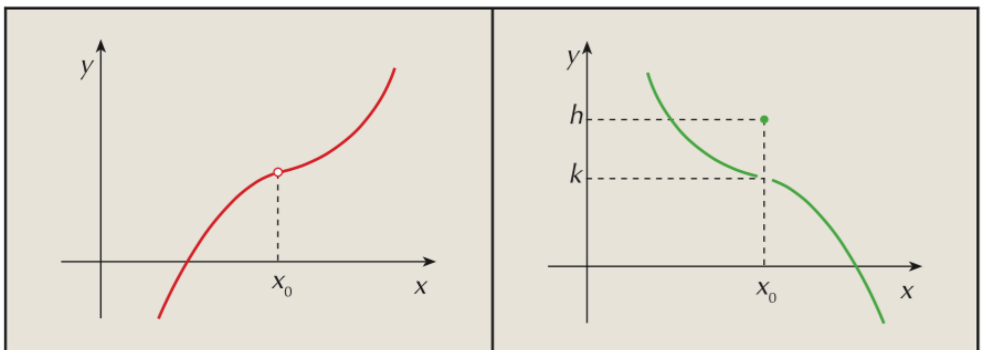
$\lim_{x \to 0} \tan \frac{1}{x}$ non esiste

quindi in $x \to 0$ la funzione presenta una discontinuità di seconda specie.

Classificazione dei punti di discontinuità – Discontinuità di terza specie

Una funzione $f(x)$ presenta in $x = x_0$ una **discontinuità di terza specie** se esiste finito il limite $x \to x_0$, ma $f(x_0)$ o non esiste, oppure è un valore diverso da quello del limite:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = k \qquad f(x_0) \begin{cases} = h \quad \text{con } h \neq k \\ \text{e} \\ \text{non esiste} \end{cases}$$



per $x \to x_0$: il limite è finito e la funzione non esiste	per $x \to x_0$: il limite è finito e la funzione assume un valore diverso dal limite

La funzione può essere resa continua modificando la sua definizione nel punto x_0 in modo da farle assumere il valore del limite (discontinuità eliminabile).

ESEMPIO

La funzione di equazione $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{2-x} & x\neq 2 \\ 3 & x=2 \end{cases}$$

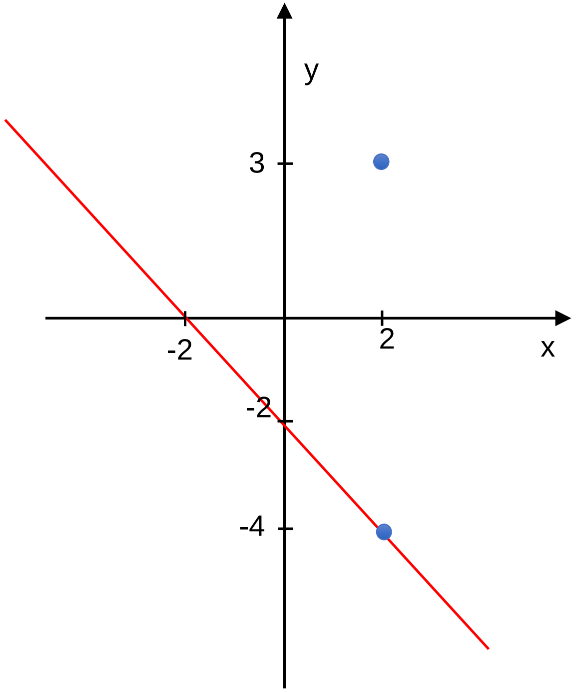
Presenta in 2 una discontinuità di terza specie, infatti

$$f(2)=3 \qquad \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{2-x}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{2-x}=-4$$

Possiamo ridefinire la funzione in modo che sia continua in 2,

ponendo:

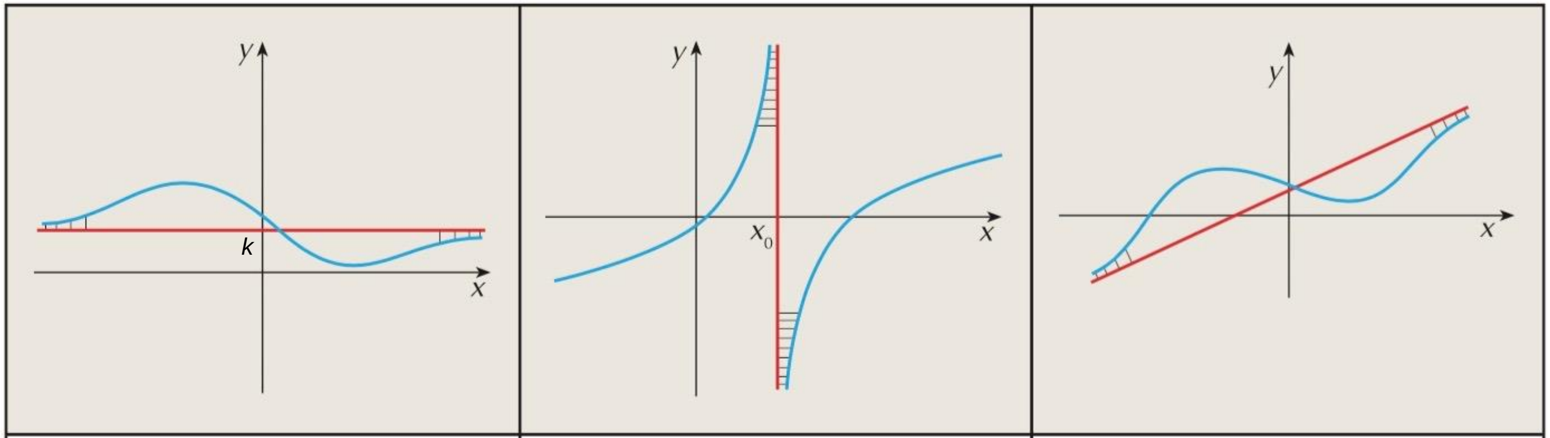
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{2-x} & x\neq 2 \\ -4 & x=2 \end{cases}$$



Gli asintoti di una funzione

Una retta *r* rappresenta un **asintoto** per una funzione $f(x)$ quando la sua distanza dal grafico di $f(x)$ tende a zero al tendere all'infinito dell'ascissa oppure dell'ordinata.

Tipologie di asintoto



Asintoto orizzontale	Asintoto verticale	Asintoto obliquo

L'asintoto orizzontale

La retta di equazione $y = k$ è un **asintoto orizzontale** per una funzione $f(x)$ se si verifica una delle seguenti situazioni:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = k \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = k \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = k$$

In particolare parliamo di:

- Asintoto orizzontale completo se $f(x)$ ha per limite k in un intorno di ∞:

  $$\lim_{x \to \infty} f(x) = k$$

- Asintoto orizzontale destro $f(x)$ ha per limite k in un intorno di +∞:

  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = k$$

- Asintoto orizzontale sinistro $f(x)$ ha per limite k in un intorno di −∞:

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = k$$

ESEMPI

1. Consideriamo la funzione $f(x)=\dfrac{5x+1}{4x-2}$ che ha dominio $R-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

   e valutiamo il suo limite per $x\rightarrow\infty$

   $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+1}{4x-2}=\dfrac{5}{4}$ la retta $y=\dfrac{5}{4}$ è un asintoto orizzontale completo

2. Consideriamo la funzione $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{3x+1}$ che ha dominio l'insieme $D=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

   e valutiamo il suo limite per $x\rightarrow\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|}{3x}\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{3x}=-\dfrac{1}{3} & \text{la retta } y=-\dfrac{1}{3} \text{ è asintoto orizzontale sinistro}\\[2ex] \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{3x}=\dfrac{1}{3} & \text{la retta } y=\dfrac{1}{3} \text{ è asintoto orizzontale destro}\end{cases}$$

L’asintoto verticale

La retta di equazione $x = x_o$ è un **asintoto verticale** per una funzione $f(x)$ se si verifica che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

Se il limite è infinito solo per $x \to x^-{}_o$ oppure per $x \to x_0^+$ diciamo che la retta $x = x_0$ è rispettivamente un asintoto verticale sinistro, un asintoto verticale destro.

I valori di x_0 devono essere ricercati tra i punti che sono esclusi dal dominio D della funzione ma che sono di accumulazione per D.

ESEMPI

1. Consideriamo la funzione $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ che ha dominio $D=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

   Calcoliamo: $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x-1}=\frac{2}{0}=\infty$ La retta $x=1$ è un asintoto verticale.

   In particolare: $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+1}{x-1}=-\infty$ $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+1}{x-1}=+\infty$

2. Consideriamo la funzione $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ definita in $D=(2,+\infty)$;

   Calcoliamo: $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{\sqrt{x-2}}=+\infty$

   La retta $x=2$ è un asintoto verticale destro.

L'asintoto obliquo

La retta di equazione $y = mx + q$ è un **asintoto obliquo** per una funzione $f(x)$ se:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - mx - q) = 0$$

Se $f(x)$ possiede un asintoto obliquo $y = mx + q$, i valori m e q sono dati dalle relazioni:

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \qquad q = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$$

e

Se le precedenti relazioni valgono solo per $x \to -\infty$ oppure per $x \to +\infty$, diremo che la retta $y = mx + q$ rappresenta un asintoto obliquo rispettivamente sinistro oppure destro per $f(x)$.

Funzioni e continuità

ESEMPIO

Stabiliamo se la funzione $f(x)=\dfrac{x^4-1}{2x^3+1}$ possiede un asintoto obliquo.

Calcoliamo m :

$$m=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4-1}{2x^3+1}\cdot\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-1}{2x^4+x}=\frac{1}{2}$$

Calcoliamo q :

$$q=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4-1}{2x^3+1}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x-2}{2\left(2x^3+1\right)}=0$$

L'asintoto obliquo esiste ed ha equazione $y=\dfrac{1}{2}x$

La ricerca degli asintoti

Data una funzione $f(x)$, elenchiamo di seguito i passi da seguire per individuare gli asintoti.

- Si ricercano gli asintoti verticali tra i punti che sono esclusi dal dominio della funzione e che sono di accumulazione per esso.
- Se il dominio contiene intorni di ¥ , si ricercano gli asintoti orizzontali.
- Se una funzione ha asintoto orizzontale, non può averne anche uno obliquo; quindi <u>solo nel caso in cui non esistono asintoti orizzontali</u>, si procede alla ricerca degli asintoti obliqui.

ESEMPIO

Ricerchiamo gli asintoti della funzione $f(x)=\dfrac{x^2-1}{2x+1}$ $\qquad D=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$

- $\displaystyle\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{x^2-1}{2x+1}=\infty$ quindi la retta di equazione $x=-\dfrac{1}{2}$ è asintoto verticale completo

- $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{2x+1}=\pm\infty$ quindi non esiste l’asintoto orizzontale.

- Poiché $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+x}=\frac{1}{2}=m$ $\qquad\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2-1}{2x+1}-\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x-2}{2(2x+1)}=-\frac{1}{4}=q$

  la funzione ammette asintoto obliquo di equazione $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}$