

**Topologia (ordinamento 270)**  
**Geometria 3 (ordinamento 509)**  
**Esame scritto del 23/07/2014**

Le risposte non giustificate o illeggibili non saranno corrette. A fianco di ogni domanda è indicato il punteggio. Non è necessario descrivere le equazioni di retrazioni od omotopie nel caso siano evidenti. Si è ammessi all'orale con un punteggio minimo di 12/30.

*Esercizio 1.*

Si consideri lo spazio proiettivo reale  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$  e i suoi sottoinsiemi

$$C_n = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \mid (nx_0)^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0\},$$

con  $n$  intero positivo. Sia  $U_0 = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \mid x_0 \neq 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ , si osservi che  $C_n \subset U_0$ .

[5] Si mostri che :

- $C_n$  è chiuso e si concluda che è compatto,
- l'interno di  $C_n$  è vuoto.

[2] Si mostri che  $C_n \approx S^2$ .

[3] Sia  $W = \cup_{k \in \mathbb{N}} C_k$  si mostri che  $W$  non è connesso.

[5] Sia  $B = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \mid x_2 = x_1 = 0\}$ , e si mostri che  $B \cup W$  è connesso. Si dica se  $B$  è compatto.

*Esercizio 2.* Si consideri  $S^2 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  dotato della topologia usuale

[4] Siano

$$A := \{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1, \quad B := S^2 \times \{[1, 0]\}$$

si definisca  $X = (S^2 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1) \setminus (A \cup B)$ . Si determini il gruppo fondamentale di  $X$ .

[5] Si mostri che:

- $X \not\approx S^2 \times [0, 1]$ ,
- $X \not\approx \mathbb{R} \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$

[6] Si mostri che:

- esiste un rivestimento  $p : X \rightarrow \mathbb{R} \times S^1 \times S^1$ ,
- se  $Y$  è connesso e  $p : Y \rightarrow X$  è un rivestimento allora  $Y \approx X$ .