

Topologia (ordinamento 270)
Geometria 3 (ordinamento 509)
Esame scritto del 10/02/2015

Le risposte non giustificate o illeggibili non saranno corrette. A fianco di ogni domanda è indicato il punteggio. Non è necessario descrivere le equazioni di retrazioni od omotopie nel caso siano evidenti. Si è ammessi all'orale con un punteggio minimo di 12/30.

Esercizio 1.

Si consideri lo spazio proiettivo reale $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Siano

$$W_1 = \{[n, 1, 1]\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}, \quad W_2 = \{[n, -n, 1]\}_{n \in \mathbb{Z}} \cup \{[1, -1, 0]\}.$$

[6]

- Si determini l'interno e la chiusura di W_1 e W_2 .
- Si dica se W_1 è compatto.
- Si dica se W_2 è compatto.

[2] Si mostri che W_1 non è connesso.

Sia $Z_1 = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \mid x_1 = x_2\}$

[3] Sia $X = \mathbb{P}^2 \setminus Z_1$ si mostri che X è connesso per archi e non è compatto.

[4] Si determini il gruppo fondamentale di X .

Esercizio 2. Si consideri $S^4 := \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^5$ dotato della topologia usuale

[4] Siano

$$A := \{x_5 > -1\} \subset \mathbb{R}^5, \quad B := \{x_5 < 1\} \subset \mathbb{R}^5$$

si definisca $X_A = A \cap S^4$ e $X_{AB} = B \cap X_A$. Si determini il gruppo fondamentale di X_A e X_{AB} .

[6] Si mostri che:

- $X_{AB} \not\approx X_A$
- non esiste un rivestimento $q : X_A \rightarrow X_{AB}$

[5] Si mostri che:

- $X_{AB} \approx \mathbb{R} \times S^3$