ESERCIZI DI GEOMETRIA 3

Vi prego di segnalare ogni inesattezza o errore tipografico a mll@unife.it

Spazi metrici, spazi topologici, applicazioni continue ed omeomorfismi

Esercizio 1. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $\mathcal{U}_d$ la topologia indotta dalla metrica su X. Dimostrare che la bolla $B_\varepsilon(x)$, con $x \in X$, è un aperto di $\mathcal{U}_d$.

Esercizio 2. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $\mathcal{U}_d$ la topologia indotta dalla metrica su X. Dimostrare che ogni aperto non vuoto $V \in \mathcal{U}_d$ è l'unione di tutte le bolle contenute in V, ossia $\bigcup_{x\in V} B_{\varepsilon_x}(x) = V$.

Esercizio 3. Sia (X, d) uno spazio metrico, dove d è la metrica discreta e sia $\mathcal{U}_d$ la topologia indotta dalla metrica discreta su X. Determinare tutte le possibili bolle $B_\varepsilon(x) \in \mathcal{U}_d$, con $x \in X$.

Osservazione 1. In uno spazio topologico, la topologia discreta $\mathcal{U}$ è *equivalente* alla topologia indotta dalla metrica discreta $\mathcal{U}_d$, ossia $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}_d$ definiscono gli stessi insiemi aperti.

Esercizio 4. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $\mathcal{U}_d$ la topologia indotta dalla metrica su X. Sia $x \in X$ un punto, allora $\{x\}$ è un chiuso di $\mathcal{U}_d$.

Esercizio 5. Sia (X, d) uno spazio metrico. Per ogni coppia di punti distinti $x, y \in X$ esistono due aperti V_x, V_y, contenenti rispettivamente x e y, tali che $V_x \cap V_y = \emptyset$.

L'esercizio 5 ci permette di costruire esempi di spazi topologici *non metrizzabili.*

Definizione 1. Uno spazio topologico $(X,\mathcal{U})$ si dice *metrizzabile* se esiste una metrica d su X tale che la topologia indotta da d sia la topologia $\mathcal{U}$.

Esempio 1. *Consideriamo lo spazio topologico $(X,\mathcal{U})$, dove $X = \{p, q\}$ e $\mathcal{U}$ è la topologia grossolana. Per ogni coppia di aperti $V_p, V_q \in \mathcal{U}$, contenenti rispettivamente p e q, abbiamo che $V_p \cap V_q \neq \emptyset$, quindi, per l'esercizio* 5*, lo spazio topologico $(X,\mathcal{U})$ non è metrizzabile.*

Grazie a tale esempio possiamo affermare che: *uno spazio topologico $(X,\mathcal{U})$ con almeno due punti dotato della topologia grossolana non è metrizzabile.*

Un altro esempio è lo spazio topologico $(X,\mathcal{U}_c)$, dove X è un insieme infinito e $\mathcal{U}_c$ è topologia cofinita.

Esercizio 6. Mostrare che $(\mathbb{R},\mathcal{U}_c)$ non è metrizzabile, ossia che non è omeomorfo ad alcun spazio metrico.

Esercizio 7. Sia X un insieme non vuoto e $\mathcal{B}$ una famiglia di sottoinsiemi di X tali che

1) $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$;
2) per ogni $A, B \in \mathcal{B}$, allora $A \cap B$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$.

Allora esiste un'unica topologia $\mathcal{U}_\mathcal{B}$ su X di cui $\mathcal{B}$ è una base di aperti.

Esercizio 8. Si consideri la seguente famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

$$\mathcal{B} = \{\emptyset, (a, b) \text{ con } a < b \in \mathbb{Z}\}.$$

Si mostri che $\mathcal{B}$ è una base per una topologia su $\mathbb{R}$.

Esercizio 9. Mostrare con un esempio che l'intersezione arbitraria di aperti di una topologia non è in generale un aperto della topologia stessa.

Esercizio 10. Siano X e Y due spazi topologici, in cui Y ha la topologia grossolana. Dimostrare che ogni applicazione $f : X \to Y$ è continua.

Esercizio 11. Siano X e Y due spazi topologici, in cui X ha la topologia discreta. Dimostrare che ogni applicazione $f : X \to Y$ è continua.

Esercizio 12. Sia $X = (\mathbb{R}, \mathcal{V})$, dove $\mathcal{V}$ è la topologia usuale e sia $Y = (\mathbb{R}, \mathcal{U}_c)$, dove $\mathcal{U}_c$ è la topologia cofinita, ossia $\mathcal{U}_c = \{\emptyset\} \cup \{\text{complementari di insiemi finiti}\}$. Mostrare che X non è omeomorfo ad Y.

Esercizio 13. Sia $X = (\mathbb{R}^2, \mathcal{V})$, dove $\mathcal{V}$ è la topologia usuale e sia $Y = (\mathbb{R}^2, \mathcal{U})$, dove $\mathcal{U}$ è la topologia grossolana. Mostrare che X non è omeomorfo ad Y.

Esercizio 14. Sia $X = \mathbb{R}$. Dire se

$$C = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{0\} \cup \{B_r(0)\}_{r>0}$$

definisce una famiglia di chiusi su X. In ogni caso trovare una topologia su X e determinare interno e chiusura di $(0, 1)$.

Esercizio 15. Consideriamo la seguente famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

$$\mathcal{U} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(x, +\infty) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Dimostrare che $\mathcal{U}$ definisce una topologia su $\mathbb{R}$ e determinare interno e chiusura di $(0, 1)$. Dire se l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \to & X \\ & x & \mapsto & -x \end{array}$$

è continua.

Esercizio 16. Sia X uno spazio topologico. Dato $Y \subset X$, dimostrare che $\overset{\circ}{Y}$ è il più grande aperto di X contenuto in Y.

Esercizio 17. L'applicazione $f : X \to Y$ è continua $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(C)$ è un chiuso di X, per ogni C chiuso di Y.

Esercizio 18. Sia $X = (\mathbb{R}, \mathcal{U})$, dove $\mathcal{U}$ è la topologia usuale. Dimostrare che l'applicazione $f : X \to X$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

non è continua.

Esercizio 19. Sia $X = (\mathbb{R}, \mathcal{U})$, dove $\mathcal{U}$ è la topologia usuale e sia $Y = (\{a, b\}, \mathcal{V})$, dove $\mathcal{V}$ è la topologia discreta. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione definita da

$$f(x) = \begin{cases} a & x \geq 0 \\ b & x < 0 \end{cases}$$

Mostrare che f è aperta, chiusa, ma non continua.

Esercizio 20. Siano f, g applicazioni tra spazi topologici. Mostrare che se f, g sono aperte (rispettivamente chiuse), allora $f \circ g$ è un'applicazione aperta (rispettivamente chiusa).

Esercizio 21. Mostrare con un esempio che esistono due spazi topologici X, Y e un'applicazione $f : X \to Y$ continua e biunivoca tale che la sua inversa f^{-1} non sia continua.

Esercizio 22. Siano $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ due applicazioni continue rispetto alla topologia usuale. Dimostrare che le applicazioni $f + g$ e $f \cdot g$ sono continue. Inoltre, dedurre che tutte le funzioni polinomiali sono continue rispetto alla topologia usuale.

Esercizio 23. Consideriamo lo spazio topologico $X = (\mathbb{R}^{n+1}, \mathcal{U})$, dove $\mathcal{U}$ è la topologia usuale. Dimostrare che

$$S^n = \left\{ x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

è un chiuso di X.

Esercizio 24. Siano $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$, spazi topologici con la topologia usuale. Sia $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, per $i = 1, \dots, n$, la proiezione sull'i–esimo fattore. Dimostrare che p_i è un'applicazione continua, aperta e non chiusa.

Esercizio 25. Dare un esempio di una funzione $f : X \to Z$ continua e aperta tale che $f_{|Y} : Y \to Z$, con $Y \subseteq X$, non sia aperta. [*Hint*: basta considerare una funzione che non sia iniettiva, ad esempio una proiezione].

Esercizio 26. Siano X, Y spazi topologici e $f : X \to Y$ un'applicazione. $\forall A \subset X$, abbiamo che $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \Leftrightarrow f$ è continua.

Esercizio 27. Sia $\mathbb{A}^n$ lo spazio affine reale dotato della topologia usuale. Dimostrare che le affinità $\varphi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ sono omeomorfismi.

L'esercizio 27 ci permette di affermare che: se X, Y sono due spazi topologici *affinememte equivalenti*, ossia esiste un'affinità $\varphi : X \to Y$ allora $X \approx Y$.

Attenzione però il viceversa non è vero: se X, Y sono due spazi topologici omeomorfi, non è detto che X, Y siano affinememte equivalenti.

Esercizio 28. Siano $[0, 1)$ e S^1 sottospazi rispettivamente di $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ con la topologia usuale. Dimostrare che l'applicazione

$$f : [0, 1) \to S^1 \subset \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos 2\pi\, t, \sin 2\pi\, t)$$

non è un omeomorfismo.

Esercizio 29. Siano X, Y spazi topologici e $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Allora

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B} \subset X \times Y.$$

Esercizio 30. Mostrare che dati X_1, X_2, Y_1, Y_2 spazi topologici tali che $X_1 \approx X_2$ e $Y_1 \approx Y_2$, allora si ha che $X_1 \times Y_1 \approx X_2 \times Y_2$.

Esercizio 31. Dare un esempio di uno spazio topologico X tale che $X \approx X \times X$.

Esercizio 32. Siano

$$\overline{B_1(0)} = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \|y\| \leq 1\}$$

e

$$\overline{I_1(0)} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_i| \leq 1 \text{ per } i = 1, 2\}$$

sottospazi di $\mathbb{R}^2$ con la topologia usuale. Dimostrare che $\overline{B_1(0)} \approx \overline{I_1(0)}$.

Esercizio 33. Siano $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e $S^1 \times \mathbb{R}$ sottospazi rispettivamente di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ con la topologia usuale. Dimostrare che $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \approx S^1 \times \mathbb{R}$.

Esercizio 34. Dimostrare che gli aperti U_i dello spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ (spazio topologico quoziente $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/ \sim$) sono densi in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$.

Esercizio 35. Siano $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ e S^n sottospazi di $\mathbb{R}^{n+1}$ con la topologia usuale. Dimostrare che

$$S^n / \sim_a \approx \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}},$$

dove $\sim_a$ è la relazione di equivalenza antipodale.

Esercizio 36. Siano $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e S^1 sottospazi di $\mathbb{R}^2$ con la topologia usuale. Dimostrare che

$$S^1 \approx \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}.$$

Esercizio 37. Siano $\mathbb{R}$ con la topologia usuale e $(0, 1)$ con la topologia indotta dalla topologia usuale di $\mathbb{R}$. Dimostrare che $\mathbb{R} \approx (0, 1)$.

Esercizio 38. Siano Y_1, Y_2 sottospazi topologici di uno spazio topologico X. Dimostrare che $\overline{Y_1 \cap Y_2} \subseteq \overline{Y}_1 \cap \overline{Y}_2$ e dare un esempio in cui l'uguaglianza non vale.

Esercizio 39. Siano $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $\mathbb{R}^n$ spazi topologici con la topologia usuale. Dimostrare che $S^n \setminus \{p\} \approx \mathbb{R}^n$, con $p \in S^n$. [*Hint*: utilizzare la proiezione stereografica di S^n su $\mathbb{R}^n$].

Proprietà topologiche: compattezza, separazione, connessione e connessione per archi

Esercizio 40. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff. Mostrare che se $Y \subset X$ è un sottospazio topologico compatto di X, allora Y è chiuso.

Esercizio 41. Mostrare che $\mathbb{R}^m$, dove $m \in \mathbb{N}$, con la topologia usuale è uno spazio topologico non compatto.

Esercizio 42. Dimostrare il seguente teorema:

Teorema 1 (Bolzano–Weierstrass)**.** *Sia $S \subset \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme infinito. Se S è limitato, allora S ammette punti di accumulazione.*

Esercizio 43. Sia X uno spazio metrico. X è compatto per successioni se e solo se ogni sottoinsieme infinito $S \subset X$ possiede un punto di accumulazione in X.

Esercizio 44. Sia X uno spazio metrico. Mostrare che se X è compatto, allora X è compatto per successioni.

Esercizio 45. Siano $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^{n+1}$ spazi topologici con la topologia usuale e $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/ \sim$ con la topologia quoziente. Dimostrare che per ogni $m \in \mathbb{N}$, si ha

$$\mathbb{R}^m \not\approx \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}},$$

con n fissato.

Esercizio 46. Siano $S^1 \times I \subset \mathbb{R}^3$ e $\mathbb{D}^2 = \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^2$ spazi topologici con la topologia indotta da quella usuale. Sia $\sim_\partial$ la relazione di equivalenza bordo. Mostrare che $(S^1 \times I)/\sim_\partial \approx \mathbb{D}^2$.

Esercizio 47. Sia $X = (\mathbb{R}, \mathcal{U})$ uno spazio topologico, dove

$$\mathcal{U} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, r) \mid r \in \mathbb{R}\}.$$

Determinare i sottoinsiemi compatti di X. [*Hint*: mostrare che i compatti di X sono tutti e soli i sottospazi di X contenenti il loro estremo superiore].

Esercizio 48. Sia $X = (\mathbb{R}, \mathcal{U}_k)$ uno spazio topologico, dove

$$\mathcal{U}_k = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > k\},$$

per $k \in \mathbb{R}^+$. Mostrare che X è uno spazio topologico compatto. Mostrare che $(0,1) \subset X$ non è un sottospazio compatto di X.

Esercizio 49. Determinare una topologia su $\mathbb{R}$ tale che:

i) $(0,1)$ sia compatto, ma $\mathbb{R}$ non sia compatto;
ii) $(0,n)$, con $n \in \mathbb{N}$, sia aperto e $\mathbb{R}$ sia compatto;
iii) $(0,n)$, con $n \in \mathbb{N}$, non sia compatto, ma $\mathbb{R}$ sia compatto.

Figure piane con relazioni di equivalenza.

Esercizio 50. Siano $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ e $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ con la topologia usuale. Sia $I \times I/\sim$, dove la relazione di equivalenza $\sim$ è definita nel modo seguente:

$$(x,y) \sim (u,v) \;\Leftrightarrow\; (x,y) = (u,v) \;\text{ oppure }\; x,u \in \{0,1\} \;\text{ e }\; y = v.$$

Mostrare che $I \times I/\sim$ è omeomorfo a $S^1 \times I$.

Esercizio 51. Siano $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ e $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ con la topologia usuale. Sia $I \times I/\sim$, dove la relazione di equivalenza $\sim$ è definita nel modo seguente:

$$(x,y) \sim (u,v) \;\Leftrightarrow\; (x,y) = (u,v) \;\text{ oppure}$$
$$y,v \in \{0,1\} \;\text{ e }\; x = u \;\text{ oppure }\; x,u \in \{0,1\} \;\text{ e }\; y = v.$$

Mostrare che $I \times I/\sim$ è omeomorfo a $S^1 \times S^1$.

Esercizio 52. Sia $X = \mathbb{D}^2/\sim_{\partial\mathbb{D}_a}$, dove $\sim_{\partial\mathbb{D}_a}$ è la relazione di equivalenza antipodale sul bordo di $\mathbb{D}^2$. Dimostrare che $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \approx X$.

Esercizio 53. Si consideri il nastro di Möbius $NM \approx I \times I/\sim$, dove la relazione di equivalenza $\sim$ è definita nel modo seguente:

$$(x,y) \sim (u,v) \;\Leftrightarrow\; (x,y) = (u,v) \;\text{ oppure }\; x,u \in \{0,1\} \;\text{ e }\; y = 1 - v.$$

Mostrare utilizzando i modelli piani che $NM \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Più precisamente, mostrare che $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = NM \cup \mathbb{D}^2$.

Esercizio 54. Sia $X = \mathbb{D}^n/\sim_{\partial\mathbb{D}^n}$, con $n \geq 1$ e dove $\sim_{\partial\mathbb{D}^n}$ è la relazione di equivalenza bordo. Dimostrare che $X \approx S^n$.

Esercizio 55. Mostrare che S^n è connesso, per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 56. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff e $Y \subset X$ un sottospazio topologico. Sia $\overline{y}$ un punto di accumulazione per Y. Mostrare che per ogni $V_{\overline{y}}$ aperto di X contenente $\overline{y}$ si ha che $\sharp(V_{\overline{y}} \cap Y) = \infty$.

Esercizio 57. Consideriamo $\mathbb{R}$ con la topologia usuale. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un'applicazione continua e periodica. Dimostrare che $f(\mathbb{R})$ è un sottospazio compatto di $\mathbb{R}$.

Esercizio 58. Siano $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, \ldots, y_m$ punti di uno spazio topologico di Hausdorff X. Mostrare che esistono U, V aperti di X, con $x_1, \ldots, x_n \in U$ e $y_1, \ldots, y_m \in V$ tale che $U \cap V = \emptyset$.

Esercizio 59. Sia $\sim$ una relazione di equivalenza su $\mathbb{R}$ tale che

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Mostrare che lo spazio topologico quoziente $\mathbb{R}/\sim$ non è di Hausdorff.

Esercizio 60. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua e suriettiva, dove X è uno spazio topologico compatto e Y è uno spazio topologico di Hausdorff. Mostrare che f è un quoziente.

Esercizio 61. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ un'applicazione e $\Gamma \subset I \times \mathbb{R}$ il suo grafico. Mostrare che

$$f \text{ è continua} \Leftrightarrow \Gamma \text{ è compatto.}$$

Esercizio 62. Sia X uno spazio topologico. Sia

$$\Delta = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid x_1 = x_2\} \subset X \times X$$

la diagonale. Abbiamo che

$$X \text{ è di Hausdorff} \Leftrightarrow \ \Delta \subset X \times X \text{ è chiusa.}$$

Esercizio 63. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua e sia Y uno spazio topologico di Hausdorff. Dimostrare che

$$D = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\}$$

è chiuso.

Esercizio 64. Mostrare che $X \subset \mathbb{R}$ è connesso se e solo se X è o un punto o un intervallo. Quindi i sottospazi di $\mathbb{R}$ connessi sono tutti e soli gli intervalli e i singoli punti.

Esercizio 65. Sia X uno spazio topologico e sia $X^* = X \cup \{\infty\}$ la compattificazione di X ad un punto (compattificazione di Alexandrov di X). Mostrare che X è localmente compatto e di Hausdorff se e solo se X^* è di Hausdorff.

Esercizio 66. Siano $X^* = X \cup \{p\}$, $Y^* = Y \cup \{q\}$ spazi topologici compatti e di Hausdorff. Mostrare che se $X \approx Y$, allora $X^* \approx Y^*$.

Esercizio 67. Sia $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}/\sim$ la retta proiettiva complessa. Mostrare che $\mathbb{CP}^1 \approx S^2$.

Esercizio 68. Consideriamo lo spazio topologico $X = (\mathbb{R}, \mathcal{U})$, dove $\mathcal{U}$ è la topologia usuale. Mostrare che i sottospazi connessi di X sono tutti e soli gli intervalli e i singoli punti.

Esercizio 69. Siano X uno spazio topologico connesso e Y uno spazio topologico con la topologia discreta. Se $f : X \to Y$ è un'applicazione continua, allora f è costante.

Esercizio 70. Sia X uno spazio topologico. Definiamo

$$H(x) := \{f : X \to \mathbb{Z}_2 \mid f \text{ è continua}\},$$

dove $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ è il gruppo abeliano costituito da due elementi. Definiamo una legge di composizione su $H(x)$:

$$\begin{array}{rccc} f+g: & X & \to & \mathbb{Z}_2 \\ & x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array}$$

Abbiamo che $(H(x),+)$ è un gruppo abeliano. Mostrare che $H(x) \simeq \mathbb{Z}_2$ (isomorfismo di gruppi) se e solo se X è connesso. [*Hint*: considerare su $\mathbb{Z}_2$ la topologia discreta e utilizzare l'esercizio 69].

Esercizio 71. Consideriamo lo spazio topologico $\mathbb{R}$ con la topologia usuale. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottospazio aperto. Mostrare che i sottospazi aperti di $\mathbb{R}$ non omeomorfi ad A sono un'infinità numerabile.

Omotopia di applicazioni continue, gruppo fondamentale, rivestimenti

Esercizio 72. Sia $f : I \to I$ un omeomorfismo. Mostrare che $f(\partial I) = \partial I$.

Esercizio 73. Sia X uno spazio topologico. Mostrare che X è contraibile se e solo se $id_X \simeq c_{x_0}$, dove

$$\begin{array}{rccc} c_{x_0}: & X & \to & X \\ & x & \mapsto & x_0 \end{array}$$

è la mappa costante.

Esercizio 74. Siano X e Y due spazi topologici. Mostrare che X è contraibile se e solo se per ogni coppia di applicazioni continue $f, g : Y \to X$ si ha che $f \simeq g$.

Esercizio 75. Sia X uno spazio topologico. Mostrare che se X è contraibile, allora X è connesso per archi.

Esercizio 76. Siano X, Y, Z, W spazi topologici. Siano $h, g : X \to Y$ applicazioni continue tali che $h \simeq g$. Siano $m : Y \to Z$ e $l : W \to X$ due applicazioni continue. Mostrare che $m \circ h \simeq m \circ g$ e $h \circ l \simeq g \circ l$.

Esercizio 77. Mostrare che per ogni spazio topologico X e $\overline{x}, y \in X$ si ha che $c_{\overline{x}} \simeq c_y$, dove $c_{\overline{x}}$ e c_y sono le mappe costanti, se e solo se esiste un arco tra $\overline{x}$ e y.

Esercizio 78. Sia X uno spazio topologico e $f : X \to S^n$ un'applicazione continua non suriettiva. Mostrare che $f \simeq c_N$, dove

$$\begin{array}{rccc} c_N: & X & \to & S^n \\ & x & \mapsto & N \end{array}$$

con $N \in S^n$ polo nord.

Esercizio 79. Mostrare che S^1 è un retratto di deformazione del nastro di Möbius NM.

Esercizio 80. Mostrare che il nastro di Möbius è omotopicamente equivalente alla circonferenza, ossia mostrare che $NM \simeq S^1$.

Esercizio 81. Sia $A \subseteq X$ un retratto di deformazione. Mostrare che $\Pi_1(A,x) \simeq \Pi_1(X,x)$ (isomorfismo di gruppi), per $x \in A$.

Esercizio 82. Mostrare che S^1 non è un retratto di deformazione del disco $\mathbb{D}^2$.

Esercizio 83. Dare un esempio di spazio topologico $Y \subseteq X$ tale che Y sia un retratto di X, ma Y non sia retratto di deformazione di X.

Esercizio 84. Siano X, Y spazi topologici e siano $x \in X$, $y \in Y$. Mostrare che $\Pi_1(X \times Y, (x, y)) \simeq \Pi_1(X, x) \times \Pi_1(Y, y)$.

Esercizio 85. Siano X, Y spazi topologici. Esibire degli esempi di applicazioni continue $\varphi : X \to Y$ tali che:

i) φ è iniettiva, ma $\varphi_* : \Pi_1(X, x) \to \Pi_1(Y, \varphi(x))$ non è iniettiva;
ii) φ è suriettiva, ma $\varphi_* : \Pi_1(X, x) \to \Pi_1(Y, \varphi(x))$ non è suriettiva.

Esercizio 86. Sia X uno spazio topologico. Sia $f : S^1 \to X$ una funzione continua e sia

$$\begin{array}{rccc} c_x : & S^1 & \to & X \\ & p & \mapsto & x \end{array}$$

la mappa costante. Mostrare che $f \simeq c_x$ se e solo se esiste un'applicazione continua $F : \mathbb{D}^2 = \overline{B_1(0)} \to X$ tale che $F((0,0)) = x$ e $F_{|\mathbb{D}^2 \setminus B_1(0)} \equiv f$.

Esercizio 87. Mostrare che il disco $\mathbb{D}^n$ è contraibile, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 88. Sia X uno spazio topologico contraibile. Mostrare che $\Pi_1(X, x) \simeq \{1\}$, per $x \in X$. [*Hint*: mostrare che $f \simeq_{\{0,1\}} e_x$, dove e_x è il cappio costante di base x, per ogni f cappio di base x].

Esercizio 89. Mostrare che la connessione è un invariante omotopico. Ossia, se X è uno spazio topologico connesso e $X \simeq Y$ (X è omotopicamente equivalente ad Y), allora Y è connesso.

Esercizio 90. Siano S^1 e $S^1 \times I$ spazi topologici con la topologia usuale. Mostrare che $S^1 \not\approx S^1 \times I$.

Esercizio 91. Sia $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ la bolla aperta con la topologia indotta dalla topologia usuale su $\mathbb{R}^2$. Mostrare che $B_1(0) \not\approx B_1(0) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$.

Esercizio 92. Determinare il gruppo fondamentale di una lattina di Coca-Cola (vecchio modello).

Esercizio 93. Determinare il gruppo fondamentale dei seguenti oggetti:

i) bottiglia (con e senza tappo);
ii) tazzina da caffè.

Esercizio 94. Mostrare che $\Pi_1(S^2 \vee S^1 \vee S^1, x) \simeq \Pi_1(S^1 \vee S^1, x)$.

Esercizio 95. Consideriamo due applicazioni $f, g : S^n \to S^n$ tali che $f(x) \neq -g(x)$, per ogni $x \in S^n$. Mostrare che $f \simeq g$.

Esercizio 96. Consideriamo gli spazi topologici $S^1 \times S^1$ e S^2 con la topologia usuale. Mostrare che $S^1 \times S^1 \not\approx S^2$.

Esercizio 97. Determinare un omomorfismo di gruppi $m_* : \Pi_1(S^1, 1) \to \Pi_1(S^1, 1)$ indotto dal rivestimento:

$$\begin{array}{rccc} m : & S^1 & \to & S^1 \\ & t & \mapsto & e^{2\pi \imath m t} \end{array}$$

Esercizio 98. Dedurre dall'esistenza del rivestimento

$$\begin{array}{rccc} m: & S^1 & \to & S^1 \\ & t & \mapsto & e^{2\pi \imath m t} \end{array}$$

che il gruppo fondamentale di S^1 non è quello banale.

Esercizio 99. Utilizzare il Teorema del Punto fisso di Brower per dimostrare che l'applicazione id_{S^1} non è omotopa ad un'applicazione costante.

Esercizio 100. Siano X, Y due spazi topologici e $p : X \to Y$ un rivestimento. Mostrare che se X è connesso per archi e Y è semplicemente connesso, allora p è un omeomorfismo.

Esercizio 101. Sia $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ un omeomorfismo. Mostrare che $f(\partial\mathbb{D}^2) = \partial\mathbb{D}^2$.

Esercizio 102. Sia K la bottiglia di Klein. Mostrare che esiste un rivestimento doppio $p : S^1 \times S^1 \to K$, ossia $\sharp(p^{-1}(x)) = 2$, per $x \in K$.

Dedurre che $\sharp|\Pi_1(K, x)| = \infty$.

Esercizio 103. Siano X, Y, Z spazi topologici. Siano $p : X \to Y$ e $q : Y \to Z$ due rivestimenti. Dimostrare che $q \circ p : X \to Z$ è un rivestimento.