

Geometria 3 (nuovo ordinamento)

Esame scritto del 29/06/2010

Le risposte non giustificate o illeggibili non saranno corrette. A fianco di ogni domanda è indicato il punteggio. Non è necessario descrivere le equazioni di retrazioni od omotopie nel caso siano evidenti. Si è ammessi all'orale con un punteggio minimo di 12/30.

Esercizio 1.

[2] Sia

$$B = \{\emptyset, \mathbb{Z}, (a, a+1)\}_{a \in \mathbb{Z}},$$

si mostri che B una base per una topologia su \mathbb{R} e si indichi con $X = (\mathbb{R}, \mathcal{U}_B)$ lo spazio topologico associato.

[6] Sia $Y = (\mathbb{R}^2, \text{topologia usuale})$. Si mostri che $X \not\approx Y$. Si dia un esempio di una funzione continua non costante $f : Y \rightarrow X$ e si mostri che non possono esistere funzioni suriettive $f : Y \rightarrow X$.

[4] Si dica se esistono funzioni continue non costanti $g : X \rightarrow Y$.

[3] Si determini il gruppo fondamentale $\pi_1(X, \frac{1}{2})$

Esercizio 2.

Sia $Z = S^2 \setminus \{(1, 0, 0), (-1, 0, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$ lo spazio topologico dotato della topologia usuale

[4] Si determini $\pi_1(Z)$

[4] Si dica se Z è omeomorfo o omotopicamente equivalente a:

- . $S^1 \times S^2$
- . $S^1 \times I$

[7] Sia \sim la relazione di equivalenza antipodale su Z definita nel modo seguente

$$x \sim x_1 \text{ se } x = \pm x_1$$

Sia $Z_1 = Z / \sim$ lo spazio quoziente. Si determini il gruppo fondamentale di Z_1 .