

Geometria 2  
Esame scritto del 5/09/2022

Le risposte non giustificate o illeggibili non saranno corrette. Si è ammessi all'orale con un punteggio minimo di 18/30.

GRUPPO A È **necessario** rispondere esattamente alle domande di questo gruppo per essere ammessi all'esame orale, in tal caso si ottengono 9 punti.

- A1 Definizione di funzione continua tra spazi topologici e di omeomorfismo.
- A2 Definizione di interno e chiusura di un sottoinsieme.
- A3 Definizione di topologia indotta e sottospazio.
- A4 Definizione di quoziente e topologia quoziente.
- A5 Definizione di topologia prodotto ed enunciato del Teorema di Tychonoff.
- A6 Definizione di spazio topologico compatto e spazio metrico compatto per successioni.
- A7 Definizione di punto di accumulazione per un sottoinsieme ed enunciato del Teorema di Heine–Borel.
- A8 Definizione di spazio topologico di Hausdorff.
- A9 Definizione di spazio topologico connesso.
- A10 Definizione di arco e spazio topologico connesso per archi.
- A11 Definizione di equivalenza omotopica tra funzioni.
- A12 Definizione di equivalenza omotopica tra spazi topologici.
- A13 Definizione di spazio contraibile ed esempi di: uno spazio contraibile di cardinalità almeno 2 e uno spazio non contraibile.
- A14 Definizione di rivestimento.
- A15 Definizione di spazio semplicemente connesso ed esempi di: uno spazio semplicemente connesso di cardinalità almeno 2 e di uno spazio non semplicemente connesso.
- A16 Si scrivano i gruppi fondamentali di:  $\mathbb{R}^n$ ,  $S^n$ ,  $S^n \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ .
- A17 Definizione del morfismo  $f_* : \Pi_1(X, x) \rightarrow \Pi_1(Y, f(x))$ , indotto da una funzione continua  $f : X \rightarrow Y$ .
- A18 Definizione del morfismo  $\pi_\alpha : \Pi_1(X, x) \rightarrow \Pi_1(X, \alpha(1))$  indotto da un arco  $\alpha : I \rightarrow X$ , con  $\alpha(0) = x$ .

GRUPPO B (6 punti)

- B1 Si mostri che una funzione biettiva e continua da uno spazio compatto in uno spazio di Hausdorff è un omeomorfismo. Si dia un esempio di due spazi topologici  $X, Y$  e di una funzione continua e biettiva  $f : X \rightarrow Y$  che non è un omeomorfismo.
- B2 Si dimostri che i compatti di uno spazio di Hausdorff sono chiusi.
- B3 Siano  $X_1, X_2 \subset Y$  due sottospazi topologici connessi. Si mostri che se  $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$  allora  $X_1 \cup X_2$  è connesso.
- B4 Si mostri che  $\mathbb{R}^n$  è contraibile.
- B5 Si mostri che  $\mathbb{R}^2 \not\approx \mathbb{R}^n$ , se  $n \neq 2$ .
- B6 Sia  $p : E \rightarrow X$  un rivestimento, si mostri che  $p_* : \Pi_1(E, e) \rightarrow \Pi_1(X, p(e))$  è iniettiva.

Si risponda alle seguenti domande: A   , A   , A   , B

Si risolva l'esercizio sul retro

Non è necessario descrivere le equazioni di retrazioni od omotopie nel caso siano evidenti. Tutte le risposte vanno giustificate adeguatamente.

**Esercizio 1.** *Sia*

$$H_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy < r\}$$

*e si consideri la collezione*

$$\mathcal{B} := \{H_r\}_{r \in \mathbb{Q}^{>0}}.$$

[5] *Si mostri che  $\mathcal{B}$  è una base per una topologia e sia  $X = (\mathbb{R}^2, \mathcal{U}_{\mathcal{B}})$ . Si determini la chiusura e l'interno di*

$$Y_1 := \{(x, y) \in X | x = 0\}, \quad Y_2 = \{(x, y) \in X | x = y\}$$

*e si dica se  $Y_1$  e  $Y_2$  sono omeomorfi o omotopicamente equivalenti.*

[6] *Si mostri che  $X$  è connesso e non è compatto. Sia  $W \subset X$  un sottospazio. Si mostri che se  $W$  è chiuso in  $X$  e limitato, per la metrica euclidea, allora è compatto. Si dia un esempio di un sottospazio compatto  $Z \subset X$  che non è chiuso in  $X$  e non è limitato per la metrica euclidea.*

[4] *Sia  $S = \{(x, y) \in X | x^2 + y^2 = 4\}$  e  $p = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ , si calcoli  $\pi_1(S, p)$ .*