

Geometria 2
Esame scritto del 5/02/2024

Le risposte non giustificate o illeggibili non saranno corrette. Si è ammessi all'orale con un punteggio minimo di 18/30.

GRUPPO A È **necessario** rispondere esattamente alle domande di questo gruppo per essere ammessi all'esame orale, in tal caso si ottengono 9 punti.

- A1 Definizione di funzione continua tra spazi topologici e di omeomorfismo.
- A2 Definizione di interno e chiusura di un sottoinsieme.
- A3 Definizione di topologia indotta e sottospazio.
- A4 Definizione di quoziente e topologia quoziente.
- A5 Definizione di topologia prodotto ed enunciato del Teorema di Tychonoff.
- A6 Definizione di spazio topologico compatto e spazio metrico compatto per successioni.
- A7 Definizione di punto di accumulazione per un sottoinsieme ed enunciato del Teorema di Heine–Borel.
- A8 Definizione di spazio topologico di Hausdorff.
- A9 Definizione di spazio topologico connesso.
- A10 Definizione di arco e spazio topologico connesso per archi.
- A11 Definizione di equivalenza omotopica tra funzioni.
- A12 Definizione di equivalenza omotopica tra spazi topologici.
- A13 Definizione di spazio contraibile ed esempi di: uno spazio contraibile di cardinalità almeno 2 e uno spazio non contraibile.
- A14 Definizione di rivestimento.
- A15 Definizione di spazio semplicemente connesso ed esempi di: uno spazio semplicemente connesso di cardinalità almeno 2 e di uno spazio non semplicemente connesso.
- A16 Si scrivano i gruppi fondamentali di: \mathbb{R}^n , S^n , $S^n \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$.
- A17 Definizione del morfismo $f_* : \Pi_1(X, x) \rightarrow \Pi_1(Y, f(x))$, indotto da una funzione continua $f : X \rightarrow Y$.
- A18 Definizione del morfismo $\pi_\alpha : \Pi_1(X, x) \rightarrow \Pi_1(X, \alpha(1))$ indotto da un arco $\alpha : I \rightarrow X$, con $\alpha(0) = x$.

GRUPPO B (6 punti)

- B1 Si mostri che una funzione biettiva e continua da uno spazio compatto in uno spazio di Hausdorff è un omeomorfismo. Si dia un esempio di due spazi topologici X, Y e di una funzione continua e biettiva $f : X \rightarrow Y$ che non è un omeomorfismo.
- B2 Si dimostri che i compatti di uno spazio di Hausdorff sono chiusi.
- B3 Siano $X_1, X_2 \subset Y$ due sottospazi topologici connessi. Si mostri che se $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ allora $X_1 \cup X_2$ è connesso.
- B4 Si mostri che \mathbb{R}^n è contraibile.
- B5 Si mostri che $\mathbb{R}^2 \not\approx \mathbb{R}^n$, se $n \neq 2$.
- B6 Sia $p : E \rightarrow X$ un rivestimento, si mostri che $p_* : \Pi_1(E, e) \rightarrow \Pi_1(X, p(e))$ è iniettiva.

Si risponda alle seguenti domande: A , A , A , B

Si risolva l'esercizio sul retro

Non è necessario descrivere le equazioni di retrazioni od omotopie nel caso siano evidenti.

Esercizio 1. *Si consideri*

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3,$$

il cilindro unitario, e gli insiemi

$$L(a, b) = \{(x, y, z) \in C \mid a < x < b\}$$

Sia

$$\mathcal{B} := \{L(a, b)\}_{a < b \in \mathbb{R}}.$$

[1] *Si mostri che \mathcal{B} è una base per una topologia su C e si indichi con*

$$X := (C, \mathcal{U}_{\mathcal{B}}).$$

[3] *Si mostri che X è connesso per archi e, per ogni punto $p \in X$, lo spazio topologico $X \setminus \{p\}$ è connesso per archi.*

[3] *Sia $Y = \{(x, y, z) \in X \mid x = z\}$ si calcolino interno e chiusura di Y .*

[3] *Si dica se Y è una 1-varietà topologica.*

[3] *Si calcoli il gruppo fondamentale $\pi_1(X)$.*

[3] *Si dica se possono esistere i seguenti rivestimenti*

- $p : \mathbb{R} \rightarrow Y$,
- $q : Y \rightarrow X$.