

Geometria 2
Esame scritto del 20/06/2023

Le risposte non giustificate o illeggibili non saranno corrette. Si è ammessi all'orale con un punteggio minimo di 18/30.

GRUPPO A È **necessario** rispondere esattamente alle domande di questo gruppo per essere ammessi all'esame orale, in tal caso si ottengono 9 punti.

- A1 Definizione di funzione continua tra spazi topologici e di omeomorfismo.
- A2 Definizione di interno e chiusura di un sottoinsieme.
- A3 Definizione di topologia indotta e sottospazio.
- A4 Definizione di quoziente e topologia quoziente.
- A5 Definizione di topologia prodotto ed enunciato del Teorema di Tychonoff.
- A6 Definizione di spazio topologico compatto e spazio metrico compatto per successioni.
- A7 Definizione di punto di accumulazione per un sottoinsieme ed enunciato del Teorema di Heine–Borel.
- A8 Definizione di spazio topologico di Hausdorff.
- A9 Definizione di spazio topologico connesso.
- A10 Definizione di arco e spazio topologico connesso per archi.
- A11 Definizione di equivalenza omotopica tra funzioni.
- A12 Definizione di equivalenza omotopica tra spazi topologici.
- A13 Definizione di spazio contraibile ed esempi di: uno spazio contraibile di cardinalità almeno 2 e uno spazio non contraibile.
- A14 Definizione di rivestimento.
- A15 Definizione di spazio semplicemente connesso ed esempi di: uno spazio semplicemente connesso di cardinalità almeno 2 e di uno spazio non semplicemente connesso.
- A16 Si scrivano i gruppi fondamentali di: \mathbb{R}^n , S^n , $S^n \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$.
- A17 Definizione del morfismo $f_* : \Pi_1(X, x) \rightarrow \Pi_1(Y, f(x))$, indotto da una funzione continua $f : X \rightarrow Y$.
- A18 Definizione del morfismo $\pi_\alpha : \Pi_1(X, x) \rightarrow \Pi_1(X, \alpha(1))$ indotto da un arco $\alpha : I \rightarrow X$, con $\alpha(0) = x$.

GRUPPO B (6 punti)

- B1 Si mostri che una funzione biettiva e continua da uno spazio compatto in uno spazio di Hausdorff è un omeomorfismo. Si dia un esempio di due spazi topologici X, Y e di una funzione continua e biettiva $f : X \rightarrow Y$ che non è un omeomorfismo.
- B2 Si dimostri che i compatti di uno spazio di Hausdorff sono chiusi.
- B3 Siano $X_1, X_2 \subset Y$ due sottospazi topologici connessi. Si mostri che se $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ allora $X_1 \cup X_2$ è connesso.
- B4 Si mostri che \mathbb{R}^n è contraibile.
- B5 Si mostri che $\mathbb{R}^2 \not\approx \mathbb{R}^n$, se $n \neq 2$.
- B6 Sia $p : E \rightarrow X$ un rivestimento, si mostri che $p_* : \Pi_1(E, e) \rightarrow \Pi_1(X, p(e))$ è iniettiva.

Si risponda alle seguenti domande: A , A , A , B

Si risolva l'esercizio sul retro

Non è necessario descrivere le equazioni di retrazioni od omotopie nel caso siano evidenti. Tutte le risposte vanno giustificate adeguatamente.

Esercizio 1. Si consideri \mathbb{R}^3 con la topologia usuale e siano

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 4\}, P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$$

e

$$X = S \cup P.$$

[4] Si mostri che X è connesso per archi e non compatto. Si mostri che X^C , l'insieme complementare di X in \mathbb{R}^3 , non è compatto e non è connesso.

[5] Sia $y \in X^C$ un punto. Si mostri che, indipendentemente dal punto y , si ha

$$\pi_1(X^C, y) \cong \mathbb{1}$$

ma che X^C non è contraibile.

[6] Si calcolino i gruppi fondamentali dei seguenti spazi:

- X ;
- $X_1 = X \setminus (X \cap (x = y = 0))$;
- $X_2 = X^C \cup (x = y = 0)$.