

Geometria 2  
**Esame scritto del 11/ 09/2024**

Le risposte non giustificate o illeggibili non saranno corrette. Si è ammessi all'orale con un punteggio minimo di 18/30.

GRUPPO A È **necessario** rispondere esattamente alle domande di questo gruppo per essere ammessi all'esame orale, in tal caso si ottengono 9 punti.

- A1 Definizione di funzione continua tra spazi topologici e di omeomorfismo.
- A2 Definizione di interno e chiusura di un sottoinsieme.
- A3 Definizione di topologia indotta e sottospazio.
- A4 Definizione di quoziente e topologia quoziente.
- A5 Definizione di topologia prodotto ed enunciato del Teorema di Tychonoff.
- A6 Definizione di spazio topologico compatto e spazio metrico compatto per successioni.
- A7 Definizione di punto di accumulazione per un sottoinsieme ed enunciato del Teorema di Heine–Borel.
- A8 Definizione di spazio topologico di Hausdorff.
- A9 Definizione di spazio topologico connesso.
- A10 Definizione di arco e spazio topologico connesso per archi.
- A11 Definizione di equivalenza omotopica tra funzioni.
- A12 Definizione di equivalenza omotopica tra spazi topologici.
- A13 Definizione di spazio contraibile ed esempi di: uno spazio contraibile di cardinalità almeno 2 e uno spazio non contraibile.
- A14 Definizione di rivestimento.
- A15 Definizione di spazio semplicemente connesso ed esempi di: uno spazio semplicemente connesso di cardinalità almeno 2 e di uno spazio non semplicemente connesso.
- A16 Si scrivano i gruppi fondamentali di:  $\mathbb{R}^n$ ,  $S^n$ ,  $S^n \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ .
- A17 Definizione del morfismo  $f_* : \Pi_1(X, x) \rightarrow \Pi_1(Y, f(x))$ , indotto da una funzione continua  $f : X \rightarrow Y$ .
- A18 Definizione del morfismo  $\pi_\alpha : \Pi_1(X, x) \rightarrow \Pi_1(X, \alpha(1))$  indotto da un arco  $\alpha : I \rightarrow X$ , con  $\alpha(0) = x$ .

GRUPPO B (6 punti)

- B1 Si mostri che una funzione biettiva e continua da uno spazio compatto in uno spazio di Hausdorff è un omeomorfismo. Si dia un esempio di due spazi topologici  $X, Y$  e di una funzione continua e biettiva  $f : X \rightarrow Y$  che non è un omeomorfismo.
- B2 Si dimostri che i compatti di uno spazio di Hausdorff sono chiusi.
- B3 Siano  $X_1, X_2 \subset Y$  due sottospazi topologici connessi. Si mostri che se  $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$  allora  $X_1 \cup X_2$  è connesso.
- B4 Si mostri che  $\mathbb{R}^n$  è contraibile.
- B5 Si mostri che  $\mathbb{R}^2 \not\approx \mathbb{R}^n$ , se  $n \neq 2$ .
- B6 Sia  $p : E \rightarrow X$  un rivestimento, si mostri che  $p_* : \Pi_1(E, e) \rightarrow \Pi_1(X, p(e))$  è iniettiva.

Si risponda alle seguenti domande: A     , A     , A     , B

Si risolva l'esercizio sul retro

Non è necessario descrivere le equazioni di retrazioni od omotopie nel caso siano evidenti.

**Esercizio 1.** *Sia*

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 < 0\} \subset \mathbb{R}^2,$$

*e  $\sim_C$  la relazione di equivalenza che identifica tutti i punti di  $C$ .*

*Si definisca  $X := \mathbb{R}^2 / \sim_C$  lo spazio quoziente e  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow X$  l'applicazione naturale sul quoziente.*

*[5] Si mostri che  $X$  è uno spazio connesso, non è di Hausdorff e non è compatto.*

*[5] Si mostri che per ogni punto  $p \in X$  si ha  $X \setminus \{p\}$  connesso.*

*[3] Sia  $Y = X \setminus \{[(2, 4)]\}$ . Si mostri che  $Y$  è connesso per archi e si calcoli  $\pi_1(Y)$ .*

*[2] Si dica se può esistere un rivestimento  $p : Y \rightarrow X$ .*