

## Geometria 2

### Esame scritto del 22/02/2018

Le risposte non giustificate o illeggibili non saranno corrette. A fianco di ogni domanda è indicato il punteggio. Non è necessario descrivere le equazioni di retrazioni od omotopie nel caso siano evidenti. Si è ammessi all'orale con un punteggio minimo di 12/30.

*Esercizio 1.* Si consideri  $\mathbb{R}^2$  con la topologia usuale. Sia

$$Y_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y < 1\} \cup \{x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

- [2] Si determinino la chiusura e l'interno di  $Y_1$ .
- [6] Si mostri che  $Y_1$  non è compatto e si descriva una retrazione di  $Y_1$  sul punto  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ .
- [4] Si mostri che  $Y_1$  non è omeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ .
- [3] Sia  $Z = \mathbb{R}^2 / \sim_{Y_1}$  il quoziente ottenuto identificando i punti di  $Y_1$ . Si mostri che  $Z$  non è di Hausdorff e non è compatto.

*Esercizio 2.* Si consideri  $X = S^2 \times S^1$  dotato della topologia usuale. Siano  $N, S \in S^2$  due punti si definiscano  $X_1 = X \setminus (\{N\} \times S^1)$  e  $X_2 = X_1 \setminus (\{S\} \times S^1)$ .

- [5] Si determinino i gruppi fondamentali di  $X_1$  e  $X_2$ .
- [6] Si mostri che:
  - $X_1 \simeq S^1$ , giustificando tutti i passaggi;
  - non esiste alcun rivestimento  $p : X_2 \rightarrow X_1$ ;
  - $X_2 \not\approx S^1 \times S^1$ .
- [4] Si mostri che non esiste un rivestimento  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ .