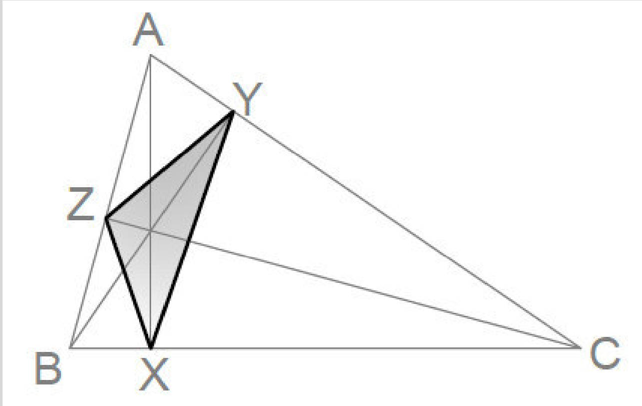
29 UNA PROPRIETA' DEL TRIANGOLO ORTICO (perimetro minimo)

Tra tutti i triangoli "inscritti" in un dato triangolo acutangolo ABC, quello di **perimetro minimo** è il **triangolo ortico**.



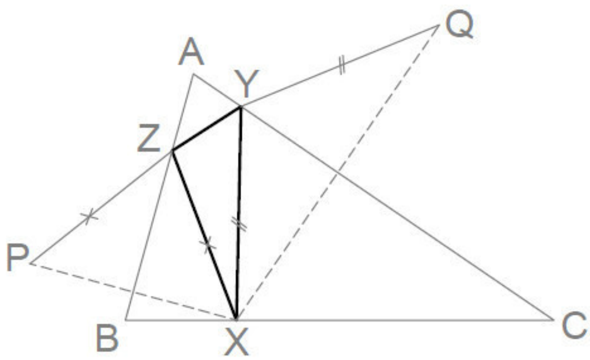
29.1 DIMOSTRAZIONE

IPOTESI	ABC triangolo acutangolo	**TESI**	$XZ + ZY + XY$ minima XYZ triangolo ortico

Nel triangolo acutangolo ABC, fissiamo un punto X sul lato BC e tracciamo un triangolo XYZ "inscritto" in ABC, cioè avente i vertici sui lati di ABC.

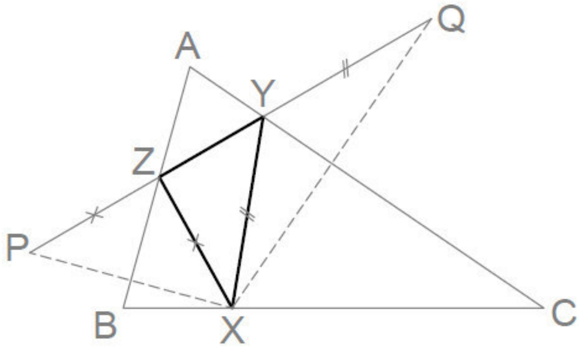
Siano P e Q rispettivamente i simmetrici di X rispetto ai lati AB ed AC.

Per le proprietà della simmetria assiale[68] risulta $PZ \cong XZ \quad e \quad QY \cong XY$, e quindi il perimetro del triangolo XYZ può essere scritto come $XZ + ZY + XY = PZ + ZY + QY$.



Il perimetro del triangolo XYZ sarà dunque minimo quando i punti P, Z, Y, Q saranno allineati.

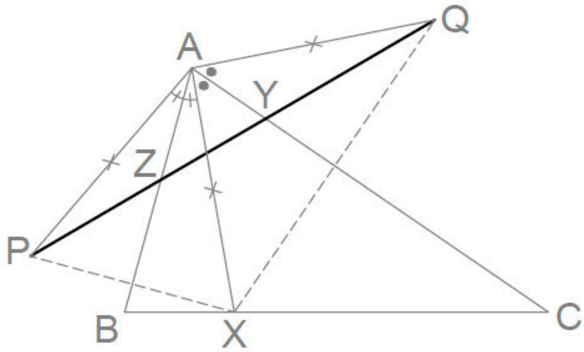
Pertanto tra tutti i triangoli inscritti in ABC e aventi un vertice fissato in X, quello di perimetro minimo si otterrà prendendo i simmetrici P e Q di X rispetto ad AB e AC rispettivamente, tracciando il segmento PQ e considerandone i punti di intersezione Z e Y con AB e AC.



[68] Se il punto P è il simmetrico di X rispetto ad AB, allora il lato AB è l'asse del segmento PX e quindi l'altezza del triangolo XPZ è anche mediana della base; pertanto XPZ è un triangolo isoscele.

Dobbiamo ora verificare, al variare di X sul lato BC, quale dei triangoli inscritti XYZ ha il perimetro minimo.

Colleghiamo il vertice A con i punti X, P, Q: i triangoli APX e AQX sono isosceli (sempre perchè P e Q sono i simmetrici di X rispetto ai lati) e quindi possiamo scrivere la relazione $AP \cong AX \cong AQ$.

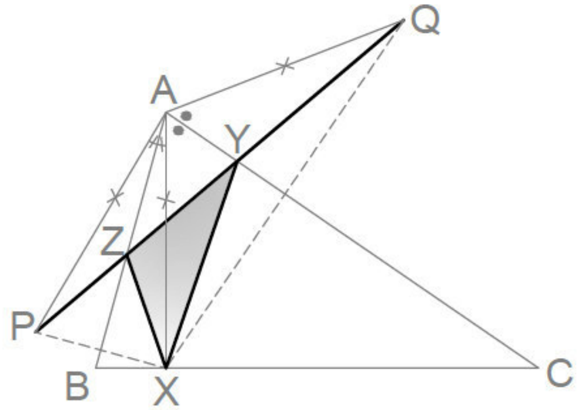


Inoltre il lato AB appartiene alla bisettrice dell'angolo PAX e allo stesso modo il lato AC appartiene alla bisettrice dell'angolo QAX.

Pertanto, indipendentemente dalla scelta del punto X, il triangolo APQ sarà isoscele sulla base PQ e l'angolo PAQ sarà costante al variare di X su BC e sempre uguale al doppio dell'angolo BAC.

La base del triangolo APQ ha quindi la stessa lunghezza del perimetro del triangolo XYZ da minimizzare.

Essendo l'angolo al vertice A di ampiezza fissata (sempre doppia rispetto a BAC), deduciamo che la lunghezza della base sarà minima quando la lunghezza degli altri due lati sarà minima.

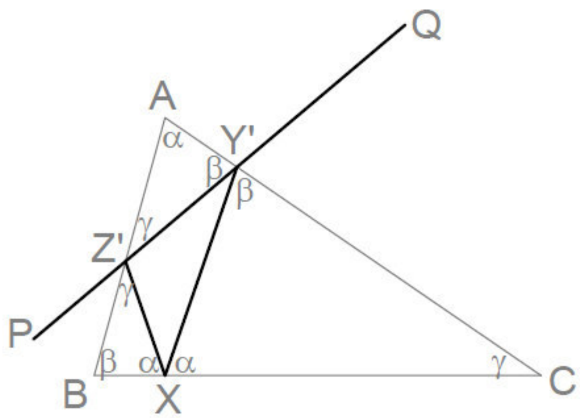


Essendo però la lunghezza di AP e AQ uguale a quella di AX, affermiamo che la lunghezza di PQ è minima quando minima è la lunghezza di AX, cosa che avviene quando AX è perpendicolare al lato BC, cioè quando AX è l'altezza relativa a BC del triangolo ABC.

Pertanto il triangolo inscritto di perimetro minimo è quello che si ottiene prendendo come X il piede dell'altezza condotta da A su BC e come Z e Y le intersezioni di PQ[69] con AB e AC.

Dimostriamo quindi che XYZ è il triangolo ortico di ABC, cioè che anche Z e Y sono i piedi delle altre due altezze del triangolo.

Per farlo, consideriamo il triangolo ortico XY'Z' di ABC.



Per le proprietà del triangolo ortico[70] sappiamo che

$B\hat{X}Z' \cong \alpha$ e $B\hat{Z}'X \cong A\hat{Z}'Y' \cong \gamma$;

di conseguenza $X\hat{Z}'Y' \cong 180° - 2\gamma$.

Essendo P il simmetrico di X rispetto ad AB risulta

$P\hat{Z}'X + X\hat{Z}'Y' = 2\gamma + 180° - 2\gamma = 180°$

Quindi i punti P, Z' e Y' sono allineati.

[69] Con P e Q simmetrici di X rispetto ad AB e AC rispettivamente.

[70] Si vedano le proprietà del triangolo ortico dimostrate al capitolo 14.

Analogamente sappiamo che $C\hat{X}Y' \cong \alpha$ e $C\hat{Y}'X \cong A\hat{Y}'Z' \cong \beta$;

di conseguenza $Z'\hat{Y}'X \cong 180° - 2\beta$.

Essendo Q il simmetrico di X rispetto ad AC risulta $Q\hat{Y}'X + X\hat{Y}'Z' = 2\beta + 180° - 2\beta = 180°$

Quindi anche i punti Z', Y' e Q sono allineati.

In definitiva possiamo affermare che i punti P, Z', Y' e Q sono allineati e di conseguenza i punti Z' e Y' coincidono con i punti Z e Y della precedente costruzione.

Il triangolo XYZ è quindi il **triangolo ortico** di ABC.