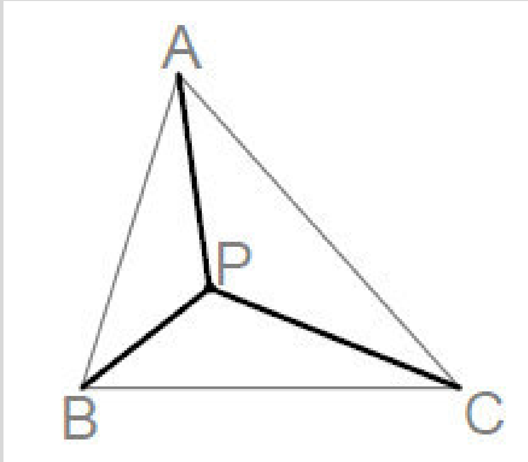
28 PUNTO DI FERMAT

In un triangolo, il **punto di Fermat** (o anche punto di Fermat - Torricelli) è quello che minimizza la distanza complessiva dai tre vertici.

Tale punto esiste ed è unico se nessuno degli angoli del triangolo supera i 120°.

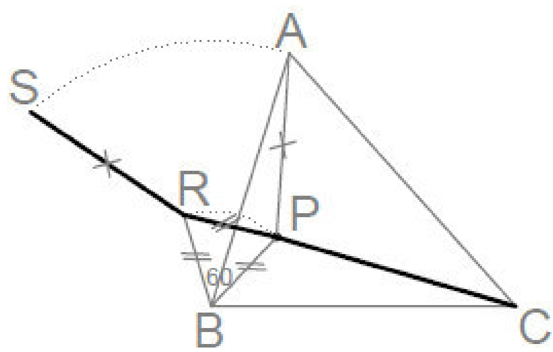


28.1 DIMOSTRAZIONE

IPOTESI	ABC triangolo qualsiasi	**TESI**	$PA + PB + PC$ minima $A\hat{P}C \cong B\hat{P}C \cong A\hat{P}B \cong 120°$

Preso un triangolo qualunque dobbiamo individuare un punto P in modo che la somma delle sue distanze dai vertici $PA + PB + PC$ sia minima.

Applichiamo una rotazione di 60° di centro B alla spezzata formata dai segmenti AP e PB, ottenendo i corrispondenti segmenti BR e SR.
Essendo la rotazione un movimento rigido, le misure dei segmenti non cambiamo e quindi possiamo affermare che $PB \cong BR$ e $AP \cong SR$.
Il triangolo BPR è quindi equilatero (isoscele sulla base RP con angolo al vertice di 60°) e dunque $PB \cong RP$.

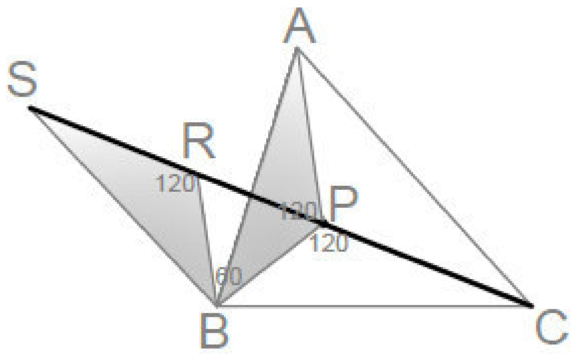


Quindi, grazie a queste congruenze, cercare il minimo della somma $PA + PB + PC$ è equivalente a cercare il minimo della somma $SR + RP + PC$, cioè valutare la lunghezza della spezzata SRPC, che sarà **minima se i punti S, R, P, C sono allineati**.

Da questa considerazione deduciamo subito che se effettivamente i punti fossero allineati, gli angoli BRS e BPC avrebbero ampiezza pari a 120°, in quanto supplementari degli angoli di 60° del triangolo equilatero BPR.

Di conseguenza, essendo i triangoli BRS e ABP congruenti per il terzo criterio di congrenza dei triangoli (hanno i tre lati congruenti), anche l'angolo APB avrebbe ampiezza pari a 120° e quindi anche il terzo angolo APC dovrebbe essere di 120°.

Quindi il punto P, per soddisfare la tesi del teorema, deve effettivamente formare angoli di 120° con i vertici del triangolo.



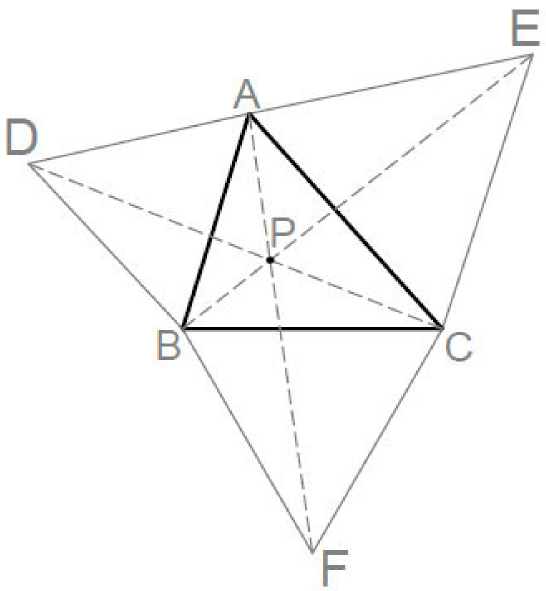
Supponiamo quindi di considerare un punto P che forma angoli di 120° con i vertici del triangolo ABC ed effettuiamo come in precedenza la rotazione di 60° dei segmenti che formano il triangolo ABP.

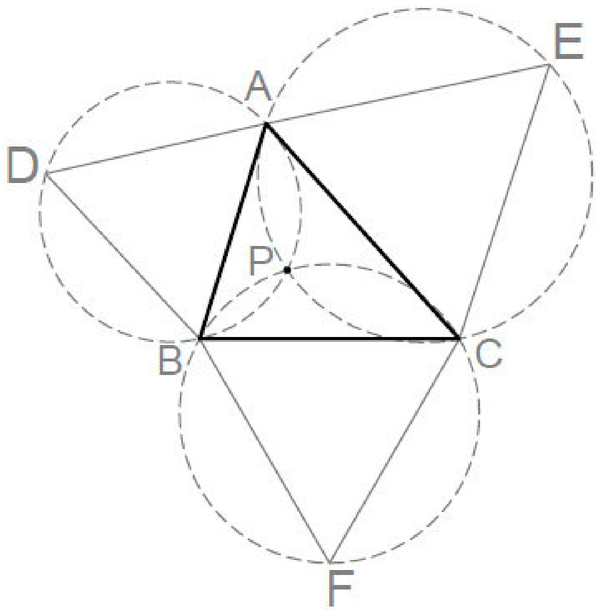
Il triangolo BPR è equilatero, i triangoli ABP e BRS sono congruenti e gli angoli SRP e RPC sono angoli piatti perchè formati dalla somma di un angolo di 60° (del triangolo equilatero) e di un angolo di 120°.

Quindi effettivamente i punti S, R, P, C sono allineati e la lunghezza della spezzata è minima. Di conseguenza, viste le congruenze tra i segmenti, anche la somma $PA + PB + PC$ è minima.

28.2 COSTRUZIONE DEL PUNTO DI FERMAT

Il punto di Fermat si ricava costruendo i triangoli equilateri su ciascun lato del triangolo ABC originario: il punto cercato è l'intersezione dei segmenti che collegano i vertici del triangolo ABC con quelli dei triangoli equilateri (non appartenenti ad ABC) ed è anche l'intersezione delle circonferenze circoscritte ai tre triangoli equilateri.

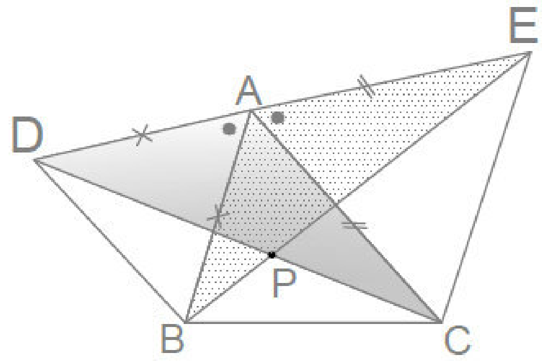




Costruiamo inizialmente solo i due triangoli equilateri sui lati AB e AC e tracciamo i segmenti CD e BE che ne collegano i vertici D ed E rispettivamente ai vertici C e B del triangolo originario ABC.

Vogliamo dimostrare che il punto di intersezione tra CD e BE è proprio il punto P di Fermat.

Consideriamo quindi i triangoli ABE e ACD: hanno i lati AB e AD congruenti perchè lati di un triangolo equilatero, i lati AC e AE congruenti per lo stesso motivo, gli angoli CAD e BAE congruenti perchè somma di angoli congruenti (l'angolo di 60° del triangolo equilatero più l'angolo in A in comune).

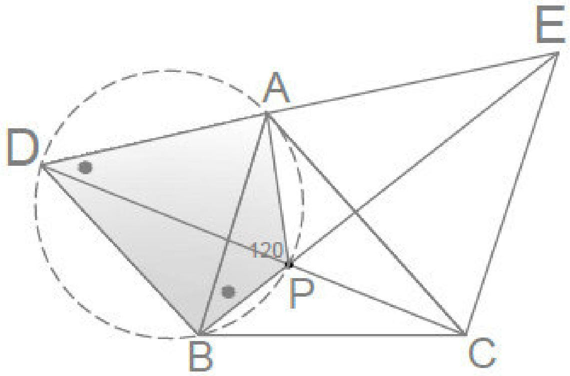


Pertanto i due triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli e di conseguenza $BE \cong CD$, $A\hat{D}C \cong A\hat{B}E$ e $A\hat{C}D \cong A\hat{E}B$.

Consideriamo ora il quadrilatero APBD: se fosse ciclico potremmo dedurre che l'angolo APB ha ampiezza 120° (perchè supplementare dell'angolo di 60° in D).

Per quanto dimostrato in precedenza gli angoli ADC e ABE sono congruenti e quindi i punti B e D vedono il segmento AP sotto uno stesso angolo.

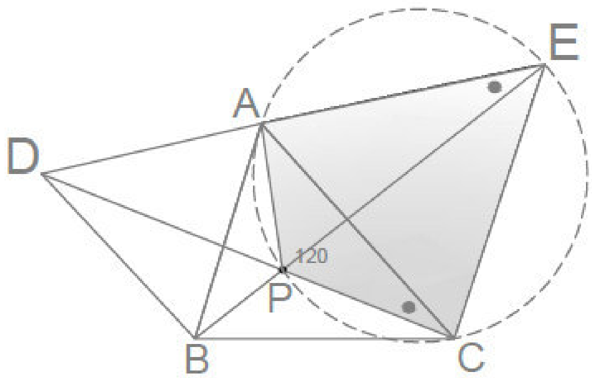
Dunque il quadrilatero APBD è inscrivibile in una circonferenza e i suoi angoli opposti sono supplementari, quindi $A\hat{P}B \cong 120°$.



Consideriamo analogamente il quadrilatero APCE.

Per quanto dimostrato in precedenza gli angoli ACD e AEB sono congruenti e quindi i punti E e C vedono il segmento AP sotto uno stesso angolo.

Dunque il quadrilatero APCE è inscrivibile in una circonferenza e i suoi angoli opposti sono supplementari, quindi $A\hat{P}C \cong 120°$.



E' a questo punto chiaro che, per differenza, $B\hat{P}C \cong 120°$

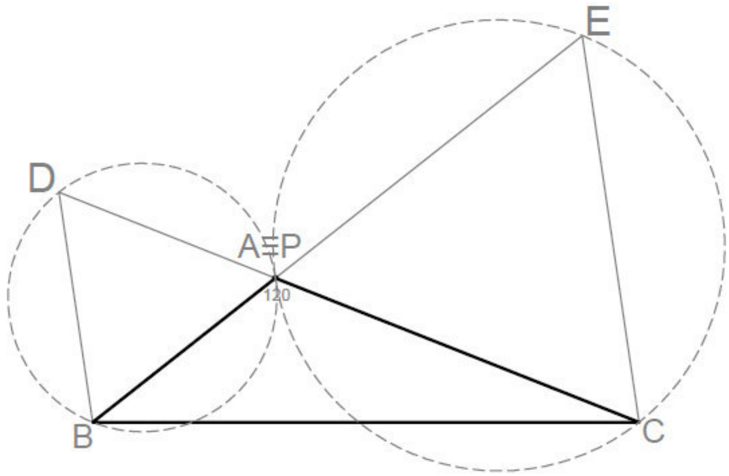
Le due circonferenze si incontrano dunque in A e in P e pertanto quest'ultimo è ben individuato ed è anche **unico**, perchè deve appartenere sia alla circonferenza circoscritta al triangolo equilatero ABD che a quella circoscritta al triangolo equilatero ACE.

Ripetendo la stessa costruzione anche con il triangolo equilatero costruito sul terzo lato BC e la relativa circonferenza giungeremmo alle stesse conclusioni, dimostrando che anche la terza circonferenza passa per il punto P.

L'ultima considerazione riguarda i limiti degli angoli del triangolo originario ABC affinchè il punto di Fermat esista effettivamente.

Prendendo come riferimento l'angolo in A, notiamo che all'aumentare dell'ampiezza di Â il punto P tende a "salire", avvicinandosi proprio al vertice A.

La posizione limite si ottiene per $\hat{A} \cong 120°$, quando il punto P coincide con il vertice del triangolo originario e le due circonferenze sono tangenti in A.



28.3 NOTE STORICO-BIOGRAFICHE[67]

Il punto di Fermat è la soluzione di un problema che lo stesso Fermat volle porre ad Evangelista Torricelli (Roma, 15 ottobre 1608 - Firenze, 25 ottobre 1647), cioè trovare un punto che minimizzasse la distanza complessiva dai vertici di un triangolo qualsiasi. Torricelli risolse il problema in modo simile a Fermat, utilizzando l'intersezione delle tre circonferenze circoscritte ai triangoli equilateri.
Per questo la dimostrazione è anche nota come *"problema di Fermat-Torricelli"*, così come il punto è anche stato ribattezzato con il nome di entrambi i matematici.

Pierre de Fermat (Beaumont de Lomagne, 17 agosto 1601 - Castres, 12 gennaio 1665) su matematico e magistrato, ma deve certamente la sua fama alla prima delle due attività.
Il suo contributo per lo sviluppo della matematica moderna fu importantissimo.
Con il suo metodo per l'individuazione dei massimi e minimi di una funzione precorse gli sviluppi del calcolo differenziale.
Scoprì, indipendentemente da Cartesio, i principi fondamentali della geometria analitica e, attraverso la corrispondenza con Blaise Pascal (Clermot-Ferrand, 19 giugno 1623 - Parigi, 19 agosto 1662), fu uno dei fondatori della teoria delle probabilità.
Fece ricerche di grande importanza sulla futura **teoria dei numeri**, iniziate durante la preparazione di un'edizione della *Arithmetica* di Diofanto di Alessandria, su cui scrisse note ed osservazioni contenenti numerosi teoremi.
Proprio una di queste osservazioni "a margine" divenne l'enunciato del cosiddetto *ultimo teorema di Fermat* (che credeva, molto probabilmente a torto, di aver dimostrato), che è rimasto indimostrato per più di 300 anni, fino al lavoro di Andrew Wiles nel 1994.

Pierre de Fermat

Figlio di un mercante di cuoio, studiò legge e divenne avvocato al Parlamento di Tolosa.
Lavorava duramente e scrupolosamente, ma nonostante ciò nel tempo libero si occupava di letteratura (compose persino alcuni versi) e, soprattutto, di matematica.
Per questo è chiamato *"il principe dei dilettanti"*, poiché, pur dedicandosi alla matematica solo nel tempo libero, la sua influenza sulla storia della disciplina fu notevolissima. Pubblicava le sue idee molto raramente e per lo più sappiamo delle sue scoperte grazie alla corrispondenza scambiata con altri matematici.

[67] - Encyclopaedia Britannica (https://www.britannica.com/biography/Pierre-de-Fermat)
- Enciclopedia Treccani (http://www.treccani.it/enciclopedia/pierre-de-fermat/)
- MacTutor (http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Fermat.html)
- Wikipedia (https://it.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat)