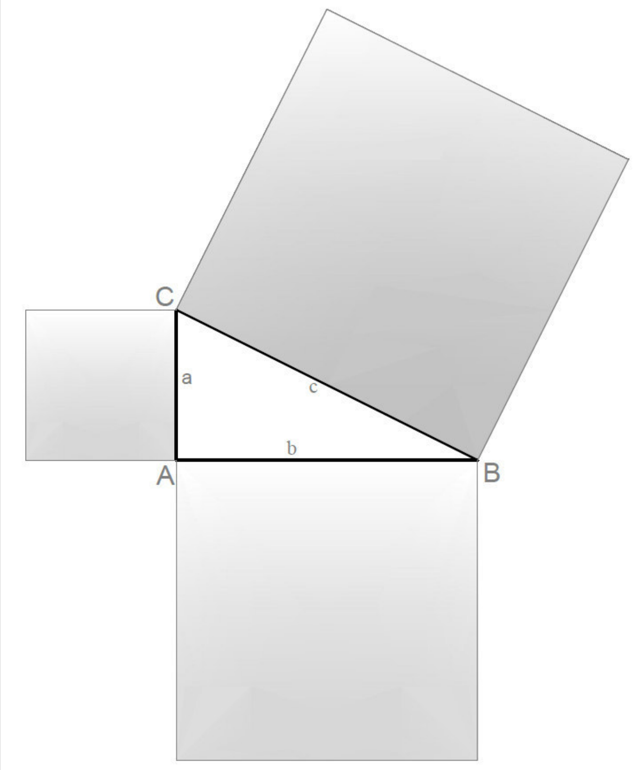
25 TEOREMA DI PITAGORA

In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

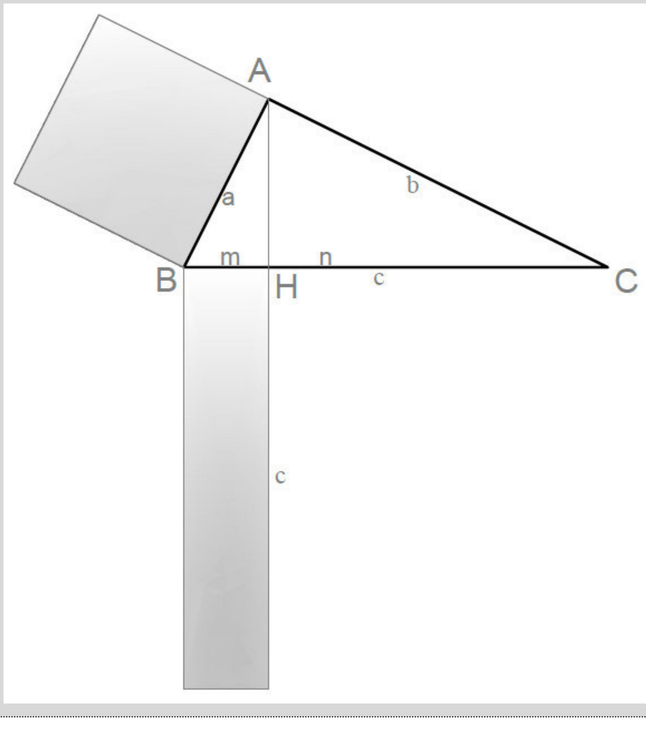


N.B. Per la dimostrazione del Teorema di Pitagora utilizzeremo il Primo Teorema di Euclide. Per questo procederemo prima con la dimostrazione di quest'ultimo teorema.

25.1 DIMOSTRAZIONE DEL PRIMO TEOREMA DI EUCLIDE

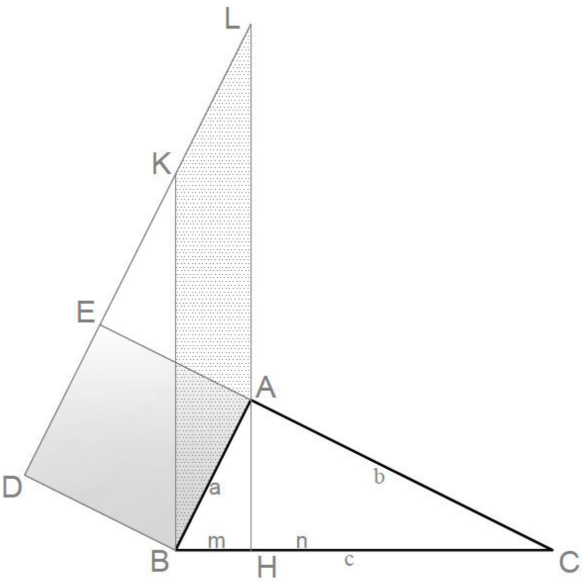
In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni la proiezione del cateto sull'ipotenusa e l'ipotenusa stessa.

$$a^2 = m \cdot c$$
$$b^2 = n \cdot c$$



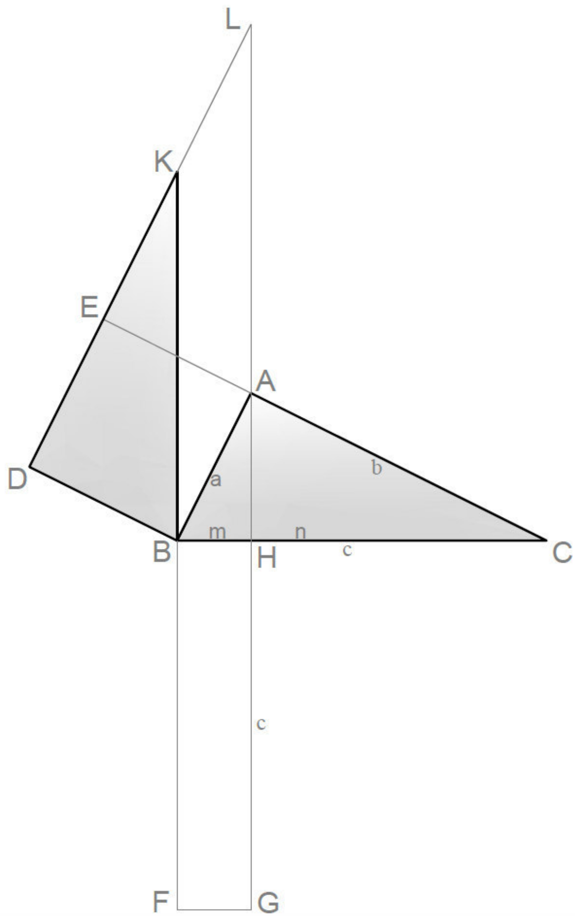
IPOTESI	ABC triangolo rettangolo	TESI	$a^2 = m \cdot c$

Detta a la lunghezza del cateto AB, c la lunghezza dell'ipotenusa BC ed m la lunghezza della proiezione di AB su BC, dimostriamo la tesi del teorema sfruttando le proprietà dei parallelogrammi.
Costruiamo il parallelogramma ABKL ottenuto prolungando il lato DE del quadrato costruito sul cateto AB fino ad incontrare le perpendicolari a BC condotte da B ed H (prolungamenti dei lati "lunghi" del rettangolo di dimensioni m e c).



Notiamo che **il quadrato ABDE e il parallelogramma ABKL sono equivalenti** perchè hanno la stessa base AB e la stessa altezza AE (distanza tra AB ed LE).

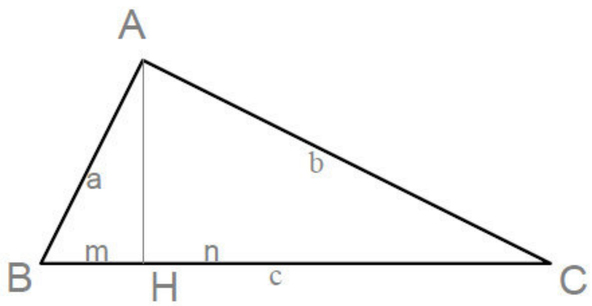
Ora dimostriamo che il parallelogramma ABKL è equivalente anche al rettangolo che ha per dimensioni BH e BC.
Per farlo consideriamo i triangoli BDK e ABC.
Essi sono rettangoli, hanno un lato congruente (i cateti AB e BD, lati del quadrato costruito su AB) e l'angolo in B congruente (l'angolo KBD è la rotazione di 90° di centro B dell'angolo ABC); pertanto sono congruenti.
Di conseguenza i lati KB e BC sono congruenti ed hanno lunghezza pari a c.
Concludiamo quindi che **il parallelogramma ABKL è equivalente anche al rettangolo BFGH**, in quanto hanno la stessa base (BK e BF hanno lunghezza c) e la stessa altezza m.
E' dunque immediato che **il quadrato ABDE di lato *a* è equivalente al rettangolo BFGH di lati *m* e *c*** (sono entrambi equivalenti al parallelogramma ABKL) e quindi è dimostrato il Primo Teorema di Euclide: $a^2 = m \cdot c$.



Considerazioni del tutto analoghe si possono fare per il quadrato di lato b costruito sull'altro cateto (AC), che sarà equivalente al rettangolo che ha per dimensioni la proiezione n e l'ipotenusa c: $b^2 = n \cdot c$.

25.2 DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI PITAGORA

IPOTESI	ABC triangolo rettangolo	TESI	$a^2 + b^2 = c^2$



Consideriamo le relazioni che derivano dal Primo Teorema di Euclide, appena dimostrato.

$a^2 = m \cdot c$

$b^2 = n \cdot c$

Sommando membro a membro le due uguaglianze otteniamo

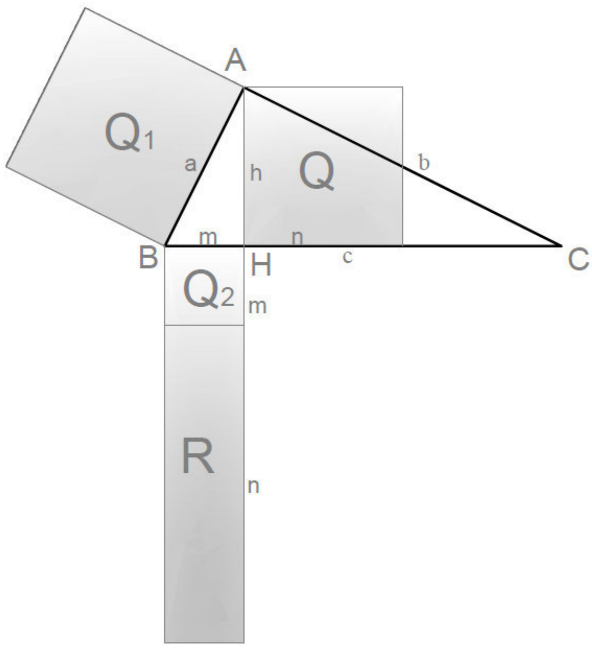
$a^2 + b^2 = m \cdot c + n \cdot c$ da cui $a^2 + b^2 = c \cdot (m + n)$

e infine, essendo la somma di *m* ed *n* uguale alla lunghezza *c* dell'ipotenusa, ricaviamo la tesi del teorema

$a^2 + b^2 = c^2$.

25.3 APPLICAZIONE DEL TEOREMA DI PITAGORA

- ### Dimostrazione del Secondo Teorema di Euclide



ENUNCIATO DEL TEOREMA

In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa. $h^2 = m \cdot n$

Si tratta quindi di verificare che il quadrato Q è equivalente al rettangolo R.

DIMOSTRAZIONE

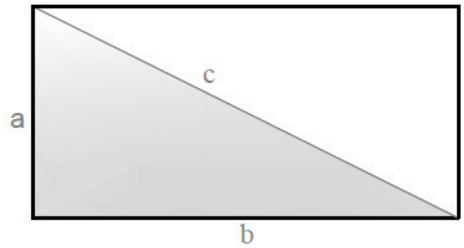
Per il Primo Teorema di Euclide sappiamo che $Q_1 \doteq Q_2 + R$; applicando il Teorema di Pitagora al triangolo ABH ricaviamo inoltre $Q_1 \doteq Q_2 + Q$.

Di conseguenza $Q_2 + R \doteq Q_2 + Q$ e quindi dovrà necessariamente valere l'equivalenza tra il rettangolo R e il quadrato Q, come richiesto.

25.4 ALTRE DIMOSTRAZIONI DEL TEOREMA DI PITAGORA

• Dimostrazione con il Teorema di Tolomeo

Consideriamo un rettangolo che abbia lati di lunghezza *a* e *b*. Essendo ciclico (cioè inscrivibile in una circonferenza) possiamo applicare il Teorema di Tolomeo[52] e scrivere la relazione che lega le diagonali ai lati del quadrilatero.

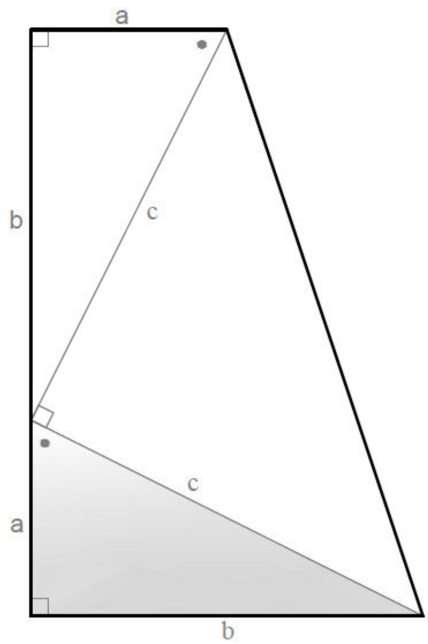


$a \cdot a + b \cdot b = c \cdot c$, cioè $a^2 + b^2 = c^2$, che è proprio la tesi del teorema di Pitagora.

• Dimostrazione di James Garfield[53]

Costruiamo un trapezio rettangolo avente le basi di lunghezza *a* e *b* e l'altezza di lunghezza pari alla somma delle basi; la costruzione parte da due triangoli rettangoli congruenti posti con due cateti adiacenti.

Con semplici considerazioni sugli angoli è facile verificare che la figura è formata dai due triangoli rettangoli iniziali più un triangolo rettangolo isoscele con cateti di lunghezza *c*.



Scriviamo l'espressione dell'area del trapezio

$$A = \frac{(a+b)\cdot(a+b)}{2} = \frac{(a+b)^2}{2}$$

Esprimiamo ora la stessa area del trapezio come somma delle aree dei tre triangoli rettangoli che lo formano

$$A = \frac{a \cdot b}{2} + \frac{a \cdot b}{2} + \frac{c \cdot c}{2} = ab + \frac{c^2}{2}$$

Eguagliando le due espressioni si ottiene $\frac{(a+b)^2}{2} = ab + \frac{c^2}{2}$ da cui

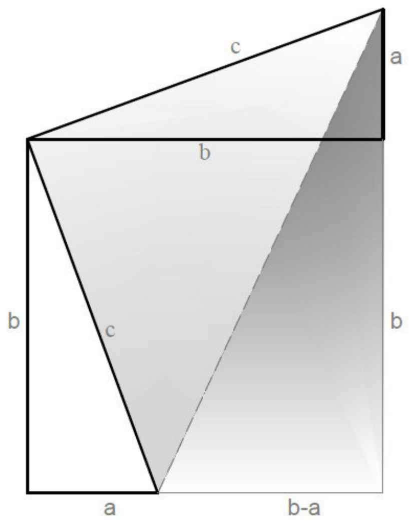
$\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{2} = \frac{2ab + c^2}{2}$ che diventa la tesi del teorema di Pitagora $a^2 + b^2 = c^2$.

---

[52] Ricordiamo l'enunciato del **Teorema di Tolomeo**: il rettangolo costruito con le diagonali di un quadrilatero inscritto in un cerchio è equivalente alla somma dei rettangoli costruiti con le coppie dei lati opposti.
[53] Nota biografica a fine capitolo.

• Dimostrazione con rotazione del triangolo rettangolo

Consideriamo un triangolo rettangolo e lo facciamo ruotare di 90° rispetto ad un vertice; completiamo poi la costruzione del trapezio prolungando i cateti di lunghezza *a*.
Proprio per la costruzione effettuata, notiamo che il quadrato di lato *b* è equivalente alla somma del triangolo rettangolo isoscele di cateto *c* con il triangolo rettangolo di cateti *b+a* e *b-a*.



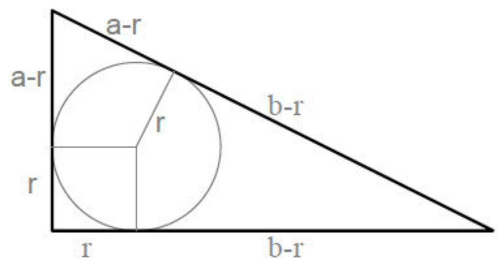
Scriviamo l'espressione delle aree e le uguagliamo secondo il rapporto di equivalenza appena descritto

$$b^2 = \frac{c \cdot c}{2} + \frac{(b-a)\cdot(b+a)}{2}$$ da cui

$2b^2 = c^2 + b^2 - a^2$ che diventa la tesi del teorema di Pitagora $a^2 + b^2 = c^2$.

• Dimostrazione con la circonferenza inscritta nel triangolo rettangolo

Consideriamo un triangolo rettangolo e la circonferenza di raggio *r* in esso inscritta.
Presi i cateti di lunghezza *a* e *b*, è facile verificare, applicando il teorema delle tangenti, che i segmenti che collegano i vertici del triangolo con i punti di tangenza hanno lunghezza *r*, *a-r* e *b-r*. Di conseguenza la lunghezza *c* dell'ipotenusa può essere espressa come $c = (a-r)+(b-r)$ da cui



ricaviamo la relazione $c + 2r = a + b$ che ci permette di esprimere il raggio della circonferenza inscritta in funzione dei lati del triangolo $r = \frac{a+b-c}{2}$.

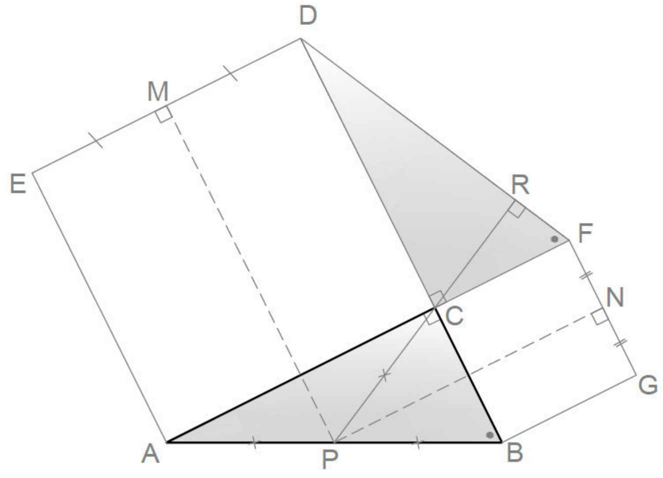
Ricordando che il raggio del cerchio inscritto in un triangolo è uguale al rapporto tra l'area e il semiperimetro del triangolo, cioè $r = \frac{A}{p}$, che in questo caso l'area del triangolo vale $A = \frac{ab}{2}$ e il semiperimetro vale

$p = \frac{a+b+c}{2}$, possiamo riscrivere la relazione $A = p \cdot r$ come

$\frac{ab}{2} = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}$, da cui

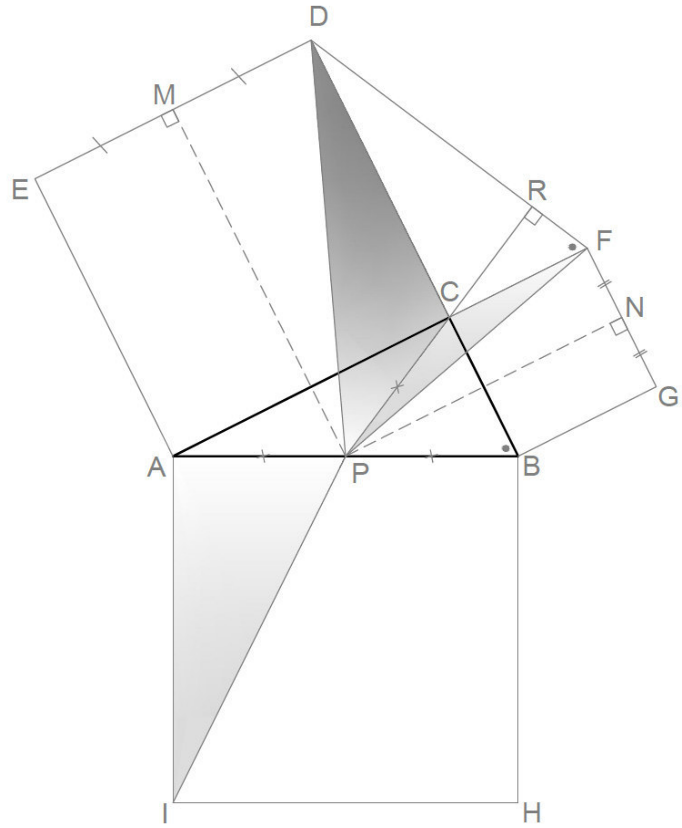
$2ab = (a+b)^2 - c^2$ che diventa la tesi del teorema di Pitagora $a^2 + b^2 = c^2$.

- ## Dimostrazione di Ann Condit[54]



Consideriamo un triangolo rettangolo ABC e i quadrati ACDE e BCFG costruiti sui suoi cateti. Tracciamo il segmento DF e prolunghiamo la mediana CP fino ad incontrare DF nel punto R.
I triangoli rettangoli ABC e CDF sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli, visto che hanno i cateti AC e CD congruenti (lati dei quadrati), i cateti BC e CF congruenti (lati dei quadrati) e gli angoli retti in C opposti al vertice. Di conseguenza anche gli angoli CFD e CBA sono congruenti.

Essendo il triangolo APC isoscele (la mediana relativa all'ipotenusa è uguale a metà dell'ipotenusa stessa), gli angoli PAC e PCA sono congruenti e quindi l'angolo FCR è congruente all'angolo PAC (perchè FCR e PCA sono opposti al vertice). Di conseguenza il triangolo CFR è rettangolo.
Tracciamo ora da P le perpendicolari ai cateti, che incontrano i lati dei relativi quadrati in M ed N: per il Teorema di Talete, essendo $PA \cong PB$, i punti M ed N sono rispettivamente i punti medi dei lati DE ed FG.



Consideriamo ora i triangoli PCF, PCD e PAI e ne calcoliamo l'area[55].

$$\left(PCF\right)=\frac{CF\cdot FN}{2}=\frac{CF^2}{4}=\frac{\left(BCFG\right)}{4}$$

$$\left(PCD\right)=\frac{CD\cdot DM}{2}=\frac{CD^2}{4}=\frac{\left(ACDE\right)}{4}$$

$$\left(PAI\right)=\frac{AI\cdot AP}{2}=\frac{AI^2}{4}=\frac{\left(ABHI\right)}{4}$$

Scriviamo ora la relazione

$$\frac{\left(PCF\right)+\left(PCD\right)}{\left(PAI\right)}=\frac{\left(PCF\right)}{\left(PAI\right)}+\frac{\left(PCD\right)}{\left(PAI\right)}$$

e notiamo che i triangoli hanno un lato uguale e pertanto il rapporto tra le aree può essere scritto come rapporto tra le altezze relative a quel lato; in

[54] Nota biografica a fine capitolo.
[55] FN è l'altezza del triangolo PCF in quanto distanza tra il punto P e la retta cui appartiene la base CF, analogamente DM è l'altezza del triangolo PCD relativa alla base CD.

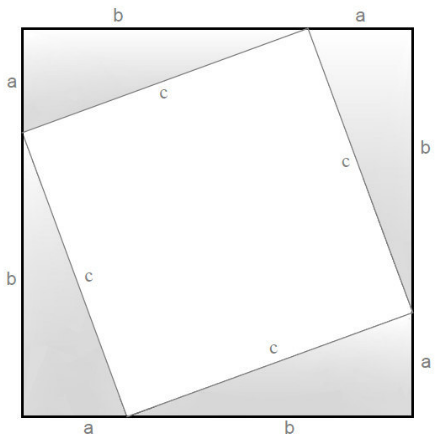
particolare $\dfrac{(PCF)}{(PAI)} = \dfrac{FR}{AI}$ e $\dfrac{(PCD)}{(PAI)} = \dfrac{DR}{AI}$.

Di conseguenza, ricordando tutte le congruenze già evidenziate, la relazione precedente diventa

$$\frac{(PCF)+(PCD)}{(PAI)} = \frac{FR}{AI} + \frac{DR}{AI} = \frac{FR+DR}{AI} = \frac{DF}{AI} = \frac{AB}{AI} = 1$$

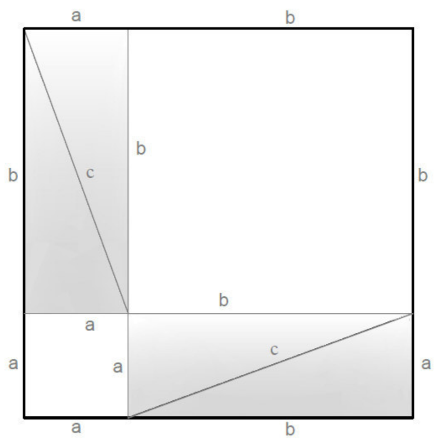
che è equivalente alla $\dfrac{(BCFG)+(ACDE)}{(ABHI)} = \dfrac{BC^2 + AC^2}{AB^2} = 1$, che corrisponde alla tesi del teorema di Pitagora $BC^2 + AC^2 = AB^2$.

• Una dimostrazione grafica[56]



Consideriamo un quadrato di lato *a+b* e lo dividiamo in due modi diversi.

Nel primo caso prendiamo quattro triangoli rettangoli congruenti posti con due cateti adiacenti di lunghezza *a* e *b* e ipotenusa di lunghezza *c*.
Grazie a semplici considerazioni sugli angoli è facile verificare che la figura è formata dai quattro triangoli rettangoli più un quadrato di lato *c*.



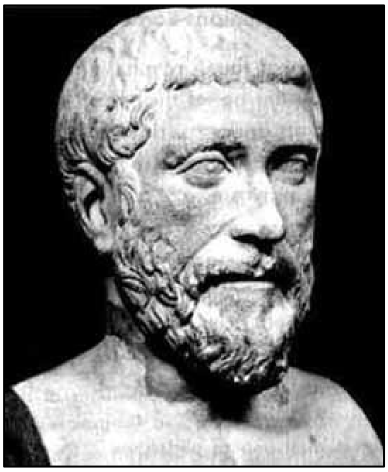
Per la seconda suddivisione del quadrato iniziale usiamo gli stessi quattro triangoli rettangoli congruenti disposti a due a due con l'ipotenusa in comune.
E' evidente che ora la figura è formata dai quattro triangoli rettangoli più due quadrati, uno di lato *a* e uno di lato *b*.

Essendo evidentemente l'area del quadrato iniziale sempre uguale, così come le aree dei quattro triangoli rettangoli congruenti, concludiamo che l'area del quadrato di lato *c* della prima suddivisione dovrà essere uguale alla somma delle aree dei due quadrati di lati *a* e *b* della seconda, cioè $a^2 + b^2 = c^2$.

---

56 - Altre dimostrazioni grafiche al link
https://www.matematicamente.it/staticfiles/approfondimenti/Porta-Dimostrazioni-grafiche-Teorema-Pitagora.pdf
- 121 dimostrazioni del teorema al link https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/

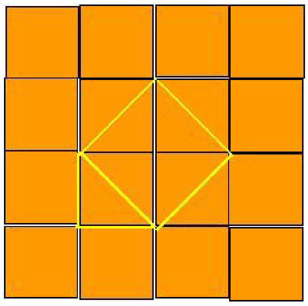
25.5 NOTE STORICO-BIOGRAFICHE[57]



Pitagora

Nonostante la sua fama, conosciamo ben poco della vita di **Pitagora** (Samo, 570 a.C. circa - Metaponto, 495 a.C. circa) e le informazioni di cui disponiamo derivano dalle biografie che vennero scritte in epoche successive.
Di certo sappiamo che fondò a Crotone, intorno al 530 a.C., una delle più importanti scuole di pensiero della storia. L'originalità della scuola consisteva nel presentarsi come setta mistica-religiosa, comunità scientifica ed insieme partito politico aristocratico che, sotto questa veste, governò direttamente in alcune città dell'Italia meridionale.
La coincidenza dei tre diversi aspetti della **scuola pitagorica** si spiega con il fatto che l'aspetto mistico nasceva dalla convinzione che la scienza libera dall'errore, che era considerato una colpa, e quindi, attraverso il sapere, ci si liberava dal peccato dell'ignoranza, ci si purificava e ci avvicinava a Dio, l'unico che possiede tutta intera la verità.

Secondo il mito, ai pitagorici si devono numerose scoperte, tra cui quella che la somma degli angoli interni di un triangolo è pari a due angoli retti e più in generale, nel caso di un poligono di n lati, la somma degli angoli interni è uguale a 2n-4 angoli retti; che in un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti, ossia l'enunciato (ma non la dimostrazione) del teorema noto come teorema di Pitagora; la soluzione geometrica di alcune equazioni algebriche; la scoperta dei numeri irrazionali (tenuta nascosta poiché contraddiceva la teoria pitagorica secondo cui tutte le quantità possibili sono esprimibili come frazioni); la costruzione dei solidi regolari.



A proposito del noto teorema, la leggenda vuole che Pitagora l'abbia concepito mentre stava aspettando di essere ricevuto da Policrate. Seduto in un grande salone del palazzo del tiranno di Samo, Pitagora si mise ad osservare le piastrelle quadrate del pavimento: se avesse tagliato in due una piastrella lungo una diagonale, avrebbe ottenuto due triangoli rettangoli uguali. Inoltre l'area del quadrato costruito sulla diagonale di uno dei due triangoli rettangoli risultava il doppio dell'area di una piastrella. Questo quadrato risultava infatti composto da quattro mezze piastrelle, cioè da due piastrelle. Ma i quadrati costruiti sugli altri lati del triangolo corrispondevano ognuno all'area di una piastrella.

La tavoletta paleobabilonese

In realtà la prima testimonianza nota relativa a quello che verrà ricordato come teorema di Pitagora è contenuta in una tavoletta paleobabilonese, databile tra il 1800 e il 1600 a. C., in cui è disegnato un quadrato con le due diagonali. Il lato del quadrato porta il numero 30, lungo la diagonale troviamo i numeri (in notazione sessagesimale) 1;24,51,10, cioè 1+24/60+51/602+10/603 ,e 42;25,35, ovvero 42+25/60+35/602 , che riportati in forma decimale danno 1,414213 e 42,42639. Il primo è un'ottima approssimazione della radice di 2; il secondo è la diagonale del quadrato di lato 30, ed è uguale al prodotto di 30 per il primo numero. Il fatto che la diagonale del quadrato si ottenga moltiplicando il suo lato per la radice di 2 denota la conoscenza del teorema di Pitagora, almeno nel caso del triangolo con i cateti uguali.

Più dubbie le altre attribuzioni. Quella più volte ripetuta, secondo la quale i geometri egizi, per trovare un angolo retto, si servivano di una corda con segnati tratti di lunghezza 3, 4 e 5, che formano i lati di un triangolo rettangolo, sembra sprovvista di ogni fondamento, e semmai ha a che fare

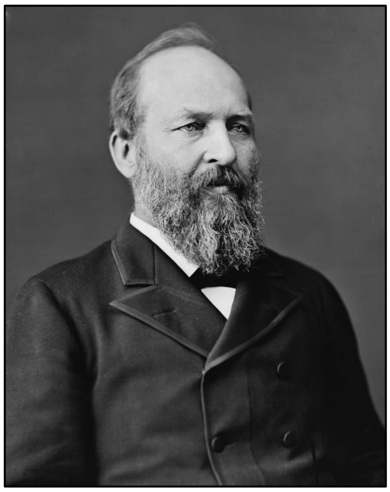
[57] - Politecnico di Torino, progetto Polymath (https://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/APPUNTI/TESTI/Gen_02/Cap5.html)
- Unifi, Il giardino di Archimede (https://php.math.unifi.it/archimede/archimede/pitagora/exh_pitagora/schede.php?id=1)
- MacTutor (http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Pythagoras.html)
- Wikipedia (https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_Pitagora)

con l’inverso del teorema di Pitagora.
Anche la figura cinese "hsuan-thu", che risale forse (ma la datazione è incerta) al 1200 a. C., è stata vista da alcuni come una prova della conoscenza del teorema di Pitagora, ma questa affermazione è controversa. In effetti la figura mostra un triangolo di lati 3, 4 e 5, con il quadrato di lato 7=3+4 che contiene quello di lato 5, a sua volta composto da quattro triangoli e un quadratino di lato 1=4-3.

La figura cinese "hsuan-thu"

Il primo enunciato preciso e la prima dimostrazione inequivocabile del teorema si trovano nel **I libro degli Elementi di Euclide** (circa 300 a. C, proposizione 47[58]): *Nei triangoli rettangoli, il quadrato del lato opposto all’angolo retto è uguale ai quadrati dei lati che contengono l’angolo retto.*
Oggi in genere il "lato opposto all’angolo retto" si chiama ipotenusa, mentre i "lati che contengono l’angolo retto" prendono il nome di cateti. Inoltre, invece di "uguale" si preferisce dire equivalente, o che ha la stessa area. Così la formulazione moderna è quella che conosciamo:
Nei triangoli rettangoli, l’area del quadrato costruito sull’ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti. - o anche, dato che l’area del quadrato è uguale al quadrato del lato, *Nei triangoli rettangoli, il quadrato dell’ipotenusa è equivalente ai quadrati dei cateti.*

Una delle dimostrazioni riportate è opera di **James Abram Garfield**[59] (Moreland Hills, OH, 19 novembre 1831 - Long Branch, NJ, 19 settembre 1881), ventesimo presidente degli Stati Uniti d'America, eclettico e geniale predicatore, appassionato traduttore dal greco e dal latino con una grande passione per la matematica.
Completò la sua dimostrazione nel 1876, cinque anni prima di essere eletto presidente, carica che però ricoprì per soli sei mesi, visto che morì in seguito alle ferite riportate in un attentato in una stazione ferroviaria di Washington D.C..


James Garfield

E' interessante anche l'attribuzione di una dimostrazione del teorema ad **Ann Condit**[60], una studentessa sedicenne dell'American High School (equivalente alla nostra Scuola Secondaria di Secondo Grado) che nell'ottobre del 1938 andò dal proprio professore di matematica e, mostrandogli un pezzo di carta con un disegno, disse semplicemente: "Ho trovato una nuova dimostrazione del teorema di Pitagora."[61].
La sua dimostrazione apparve nel 1998 su *Pythagoras*, una rivista olandese di matematica per studenti, in un articolo a firma Bruno Ernst.

[58] Clark University (https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/propI47.html)
[59] - Wikipedia (https://it.wikipedia.org/wiki/James_A._Garfield)
- Repubblica.it (http://www.repubblica.it/venerdi/presidenti/2016/06/03/news/james_garfield_e_il_teorema_del_destino-141193388/)
- MAA, Mathematical Association of America (https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasure-james-a-garfields-proof-of-the-pythagorean-theorem)
- Politecnico di Torino, progetto Polymath (https://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/APPUNTI/TESTI/Gen_02/Cap6.html)
[60] University of Massachusetts (http://www.faculty.umb.edu/gary_zabel/Courses/Phil%20281b/Philosophy%20of%20Magic/Arcana/Neoplatonism/Pythagoras/index.shtml.html)
[61] Van de Brandhof-Guichelaar-Jaspers (2015), *Half a century of Pythagoras Magazine*, Edizioni MAA