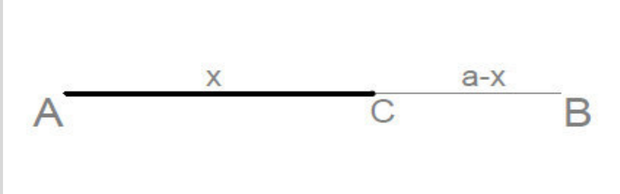
24 LA SEZIONE AUREA DI UN SEGMENTO

La sezione aurea di un segmento è la parte di segmento media proporzionale tra il segmento stesso e la parte rimanente.

$$AB : AC = AC : BC$$



24.1 CALCOLO DELLA SEZIONE AUREA E NUMERO AUREO

Detta a la lunghezza del segmento AB e x la lunghezza della parte AC che abbiamo definito "sezione aurea", impostiamo la proporzione $a : x = x : (a - x)$.

Per le note proprietà ricaviamo $x^2 = a(a - x)$, da cui $x^2 + ax - a^2 = 0$.

Applicando la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado ricaviamo le due radici dell'equazione e consideriamo solo quella positiva, visto che rappresenta la lunghezza di un segmento.

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}, \quad \text{quindi} \quad \boxed{x = \frac{a\left(\sqrt{5} - 1\right)}{2}}$$

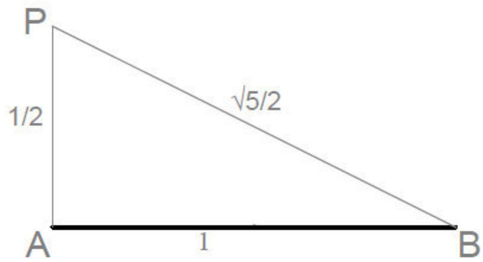
che rappresenta la sezione aurea di un segmento di lunghezza a (nel caso in esame è la lunghezza di AC).

Il rapporto tra la lunghezza del segmento e la sua sezione aurea è detto "**rapporto aureo**" e il suo valore è definito come "**numero aureo**", indicato con la lettera greca φ[47].

$$\frac{a}{\frac{a\left(\sqrt{5} - 1\right)}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} + 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \quad \text{quindi} \quad \boxed{\varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \cong 1,618...}$$

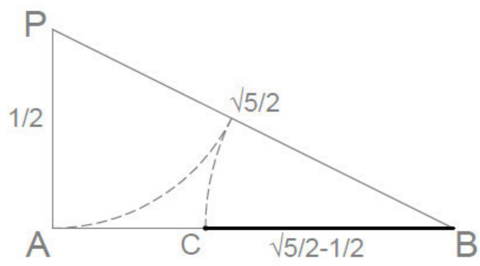
24.2 COSTRUZIONE DELLA SEZIONE AUREA DI UN SEGMENTO

Consideriamo un segmento AB di lunghezza unitaria e, da A, tracciamo la perpendicolare al segmento di lunghezza pari alla metà del segmento stesso. Colleghiamo l'estremo P del segmento AP con il punto B e otteniamo un segmento PB lungo $\sqrt{5}/2$ (valore calcolato applicando il teorema di Pitagora).



[47] La scelta della lettera φ deriverebbe dal nome dello scultore greco Fidia, che usò il rapporto aureo per progettare il Partenone di Atene.

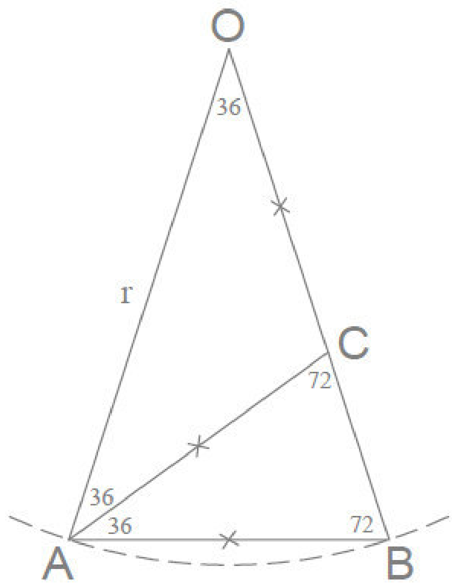
Ora, con apertura pari ad AP, puntiamo il compasso in P e riportiamo la lunghezza di AP sull'ipotenusa PB.
La parte rimanente di ipotenusa avrà lunghezza $\sqrt{5}/2-1/2$. Riportiamo tale lunghezza sul segmento AB e otteniamo il segmento BC, che è appunto la **sezione aurea** di AB ed ha lunghezza $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.



24.3 APPLICAZIONI DELLA SEZIONE AUREA

- **Il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza ha come lunghezza la sezione aurea del raggio**

Consideriamo un solo lato del decagono regolare inscritto nella circonferenza di centro O e il **triangolo isoscele OAB** che forma con i due raggi OA e OB.
L'angolo al vertice è evidentemente un angolo al centro ed ha ampiezza pari a 36°; di conseguenza gli angoli alla base hanno ampiezza pari a 72°.
Tracciamo la bisettrice dell'angolo A che individua il punto C sul lato OB: il triangolo OAC ha due angoli di 36° ed è isoscele, quindi $OC \cong AC$.
Anche il triangolo ABC[48] è isoscele perchè ha due angoli di 72°, qunidi $AC \cong AB$.
Notiamo inoltre che i triangoli OAB e ABC sono simili perchè hanno tutti gli angoli di uguale ampiezza, quindi possiamo impostare la proporzione $OA:AB=AB:BC$.



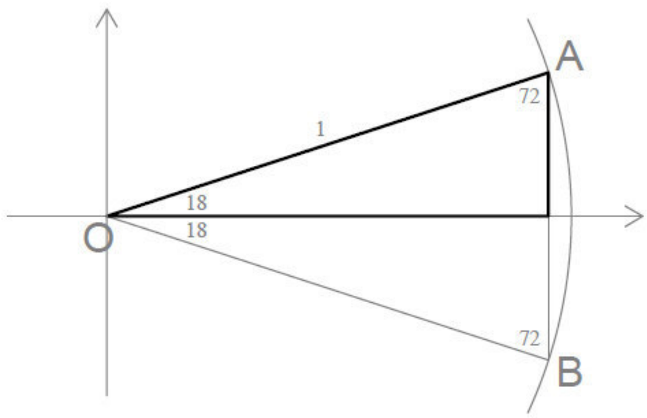
Per le uguaglianze precedenti possiamo infine scrivere $\boxed{OA:AB=AB:(OA-AB)}$, cioè il lato del decagono è medio proporzionale tra il raggio e il segmento risultante dalla differenza tra il raggio e il lato stesso, quindi **il lato del decagono regolare è la sezione aurea del raggio della circonferenza**.

48 Proprio per quanto esposto in questo paragrafo, il triangolo isoscele con gli angolo alla base di 72° è detto **triangolo aureo** e la sua base è la sezione aurea del lato obliquo.
Analogamente, il rettangolo che ha per lati un segmento e la sua sezione aurea si dice **rettangolo aureo**.

• Il valore delle funzioni seno e coseno degli angoli di 18°, 36°, 54° e 72°.

Nella circonferenza goniometrica (raggio unitario) consideriamo un angolo di 18°.

Per simmetria il segmento AB è la corda che sottende l'angolo di 36°, cioè il lato del decagono regolare inscritto nella circonferenza: per quanto già visto la lunghezza di AB, in quanto sezione aurea del raggio, sarà $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.



E' ora semplice ricavare il valore del seno dell'angolo di 18°, pari a

$$\boxed{sen18° = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos 72°}$$

Utilizzando la relazione fondamentale della goniometria ricaviamo il valore del coseno dell'angolo di 18°:

$$\cos 18° = \sqrt{1 - sen^2 18°} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{5+1-2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

quindi $\boxed{\cos 18° = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = sen72°}$

Grazie alle formule di duplicazione possiamo facilmente ricavare il valore del seno dell'angolo di 36°:

$$sen36° = 2sen18° \cos 18° = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2 \left(10+2\sqrt{5}\right)}}{8} = \frac{\sqrt{40-8\sqrt{5}}}{8} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

quindi $\boxed{sen36° = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \cos 54°}$

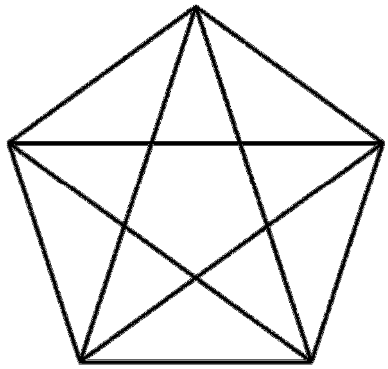
Utilizzando la relazione fondamentale della goniometria ricaviamo il valore del coseno dell'angolo di 36°:

$$\cos 36° = \sqrt{1 - sen^2 36°} = \sqrt{1 - \frac{10-2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}}$$

quindi $\boxed{\cos 36° = \frac{1}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}} = sen54°}$

24.3 NOTE STORICO-BIOGRAFICHE[49]

Il rapporto aureo fu introdotto dai pitagorici come rapporto tra la diagonale e il lato del pentagono regolare: la diagonale del pentagono regolare era in realtà il lato del pentagono stellato, simbolo dei pitagorici.
Non è ancora chiaro se, prima dei greci, babilonesi ed egizi conoscessero la sezione aurea e la utilizzassero consapevolmente; ad esempio nella piramide di Cheope la metà del lato di base sarebbe la sezione aurea dell'altezza.



Il pentagono stellato dei pitagorici e il pentagono regolare

Sarebbe stato il pitagorico **Ippaso di Metaponto**, nel VI secolo a.C., a scoprire il rapporto aureo e ad associarvi il concetto di incommensurabilità. Sarà poi **Euclide**, intorno al 300 a.C., a darne una definizione rigorosa nel XIII libro degli Elementi fornendo la definizione di divisione di un segmento in *"ultima e media ragione"*.

Sarà **Leonardo Pisano** (Pisa, 1175 - 1235 circa), detto Fibonacci, a rinnovare l'importanza del rapporto aureo nel suo *Liber Abaci*, creando la famosa successione che porta il suo nome: il rapporto tra ogni numero della successione 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89... e il precedente tende al rapporto aureo.

Leonardo Pisano (Fibonacci)

Nel 1509 **Luca Pacioli** (1445-1517) pubblica il *De divina proportione* e contribuisce in maniera decisiva a rinnovare l'interesse per il numero aureo, definendolo appunto "proporzione divina", accostandone la proprietà di irrazionalità del numero (che lo rende compiutamente inesprimibile per mezzo di una ratio o frazione) e l'inconoscibilità del divino per mezzo della ragione umana. Pacioli non riuscì tuttavia a scoprire il rapporto tra i numeri della successione di Fibonacci e si dovette attendere il 1611, quando **Keplero** (1571-1630) intuì la relazione esistente tra ogni numero della successione e il precedente ed affermò che *"La geometria ha due grandi tesori: uno è il teorema di Pitagora; l'altro è la divisione di un segmento secondo il rapporto medio ed estremo. Possiamo paragonare il primo a una certa quantità d'oro, e definire il secondo una pietra preziosa."*.
La dimostrazione dell'esattezza della scoperta di Keplero arrivò un secolo più tardi per merito di **Robert Simson** (1687-1768), mentre la formula generatrice della serie di Fibonacci fu opera di **Jacques Binet** (1786-1856).

Il numero aureo trova applicazione in tutti i campi delle scienze e delle arti[50], dalla matematica alla biologia, dall'architettura alla pittura[51], ed è riconoscibile in tantissime leggi naturali.

[49] Wikipedia (https://it.wikipedia.org/wiki/Sezione_aurea) e altri
[50] Sull'applicazione della **sezione aurea in fotografia** citiamo l'articoli pubblicato su Tecnica Fotografica https://tecnicafotografica.net/la-sezione-aurea-nella-composizione-fotografica-7a0a1eefdff5/
[51] Tra le curiosità riguardanti l'uso della sezione aurea c'è quella riguardante la **creazione di alcuni famosi loghi pubblicitari** su The different group https://www.thedifferentgroup.com/2016/11/23/sezione-aurea-logo-famoso-apple-twitter-pepsi/