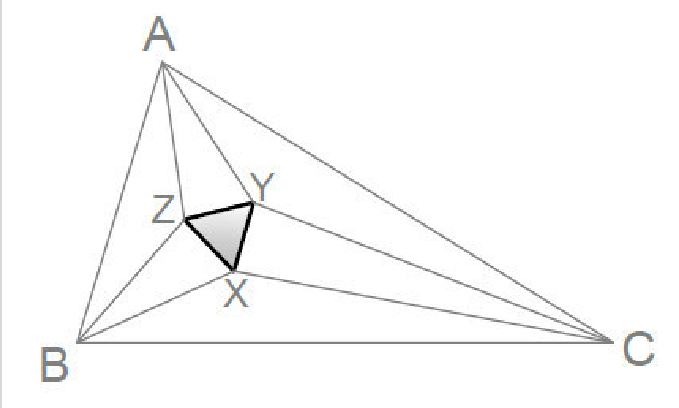
23 TEOREMA DI MORLEY

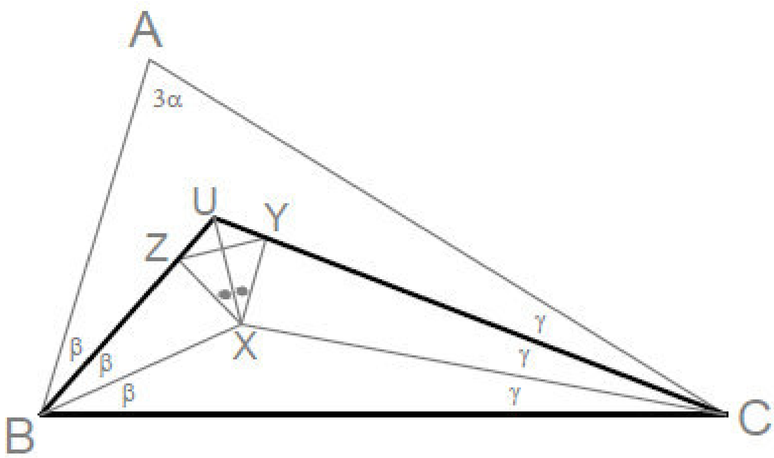
In un triangolo, le trisettrici di ogni angolo formano, incrociandosi a due a due, un triangolo equilatero.



23.1 DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA

IPOTESI	$B\hat{A}Z \cong Z\hat{A}Y \cong C\hat{A}Y$ $A\hat{B}Z \cong Z\hat{B}X \cong C\hat{B}X$ $A\hat{C}Y \cong X\hat{C}Y \cong B\hat{C}X$	**TESI**	XYZ triangolo equilatero

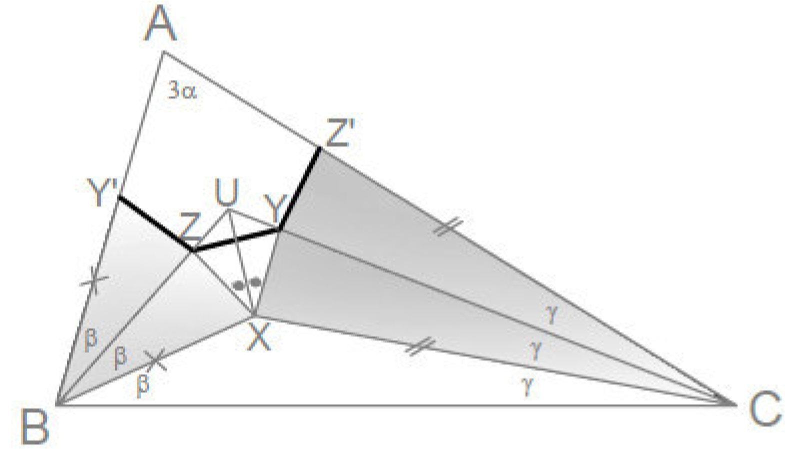
Dette $3\alpha,\ 3\beta,\ 3\gamma$ le ampiezze degli angoli in A, B e C, per le proprietà sulla somma degli angoli nterni di un triangolo possiamo scrivere la relazione $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180°$ e quindi $\alpha + \beta + \gamma = 60°$.



Consideriamo il triangolo BUC: BX e CX sono le bisettrici degli angoli in B e C e si incontrano nel punto X quindi, sapendo che le tre bisettrici di un triangolo si incontrano nello stesso punto, UX sarà la bisettrice dell'angolo in U.

Tracciamo i segmenti XZ e XY in modo che formino angoli di 30° con UX e consideriamo i triangoli XZU e XYU: avendo il lato UX in comune e gli angoli in U (bisettrice) e in X (costruzione) congruenti, sono congruenti per il secondo criterio di congruenza dei triangoli. Di conseguenza i lati XZ e XY sono congruenti e **il triangolo XYZ è equilatero** perchè ha due lati congruenti e l'angolo tra essi compreso di 60°.

Per completare la dimostrazione dobbiamo ore verificare che i segmenti AZ e AY appartengano effettivamente alle trisettrici dell'angolo in A.



Prendiamo il punto Y' su AB in modo che il segmento BY' sia congruente a BX e prendiamo il punto Z' su AC in modo che il segmento CZ' sia congruente a CX.

E' immediato verificare che i triangoli BZY' e BZX sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli (BZ in comune, BY' e BX congruenti per costruzione, gli angoli in B congruenti per ipotesi), così come sono congruenti i triangoli CYZ' e CYX (CY in comune, CZ' e CX congruenti per costruzione, gli angoli in C congruenti per ipotesi). Di conseguenza XZ è congruente a ZY', così come XY è congruente a YZ' e quindi, per quanto dimostrato in precedenza, risulta che $ZY' \cong ZY \cong YZ'$

Consideriamo ora l'angolo in Z, per il quale vale la relazione $Y'\hat{Z}Y \cong Y'\hat{Z}U + U\hat{Z}Y$, e cerchiamo di esplicitare i due addendi al secondo membro.

Essendo $Z\hat{U}X \cong \frac{1}{2} B\hat{U}C = \frac{1}{2}\left[180° - (2\beta + 2\gamma)\right] = 90° - (\beta + \gamma)$, è facile ricavare

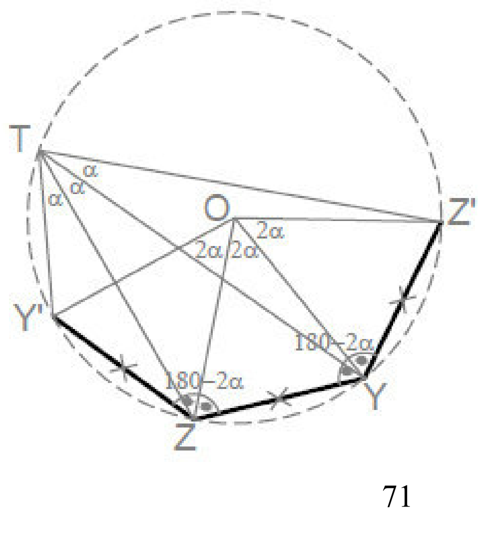
$$Z\hat{U}X = 90° - (60 - \alpha) = 30° + \alpha .$$

Nel triangolo XZU vale la relazione $U\hat{Z}X = 180° - 30° - Z\hat{U}X = 120° - \alpha$, ed essendo BU la bisettrice dell'angolo in Z otteniamo l'espressione del primo addendo $Y'\hat{Z}U = 120° - \alpha$.

Osservando gli angoli del triangolo XZU è facile ricavare l'espressione $U\hat{Z}Y = 60° - \alpha$.

Quindi, sostituendo, otteniamo $\boxed{Y'\hat{Z}Y \cong 120° - \alpha + 60° - \alpha = 180° - 2\alpha}$.

Con considerazioni del tutto analoghe ricaviamo $\boxed{Z'\hat{Y}Z \cong Z'\hat{Y}U + U\hat{Y}Z = 180° - 2\alpha}$, quindi concludiamo che i due angoli sono congruenti, cioè $Y'\hat{Z}Y \cong Z'\hat{Y}Z$.



La spezzata Y'ZYZ' è dunque formata da tre segmenti congruenti che formano a due a due angoli congruenti.

Tracciamo le bisettrici degli angoli in Z e in Y che si incrociano nel punto O e formano un triangolo isoscele. Se uniamo O con Y' e con Z' otteniamo altri due triangoli, entrambi congruenti a OZY (hanno infatti un lato in comune, le basi congruenti e l'angolo tra essi compreso generato dalle bisettrici); pertanto i segmenti tracciato da O sono tutti congruenti $OY' \cong OZ \cong OY \cong OZ'$ e di conseguenza la circonferenza di centro O passerà per tutti i vertici della spezzata.

E' inoltre immediato verificare che tutti gli angoli al centro valgono 2α.

Se prendiamo un generico punto T sulla circonferenza e lo colleghiamo ai quattro vertici della spezzata Y'ZYZ', i quattro segmenti così tracciati formeranno angoli alla circonferenza tutti congruenti e tutti di ampiezza pari alla metà dei corrispondenti angoli al centro (insistenti sugli stessi archi), quindi tutti di ampiezza pari ad α.

Ci rendiamo conto a questo punto che il vertice A del triangolo ABC deve necessariamente appartenere alla stessa circonferenza e quindi i segmenti AZ e AY individuano angoli alla circonferenza di ampiezza α e dunque sono le trisettrici dell'angolo in A.

E' pertanto dimostrato che i vertici del triangolo equilatero XYZ sono i punti di intersezione delle trisettrici degli angoli del triangolo ABC.

23.2 NOTE STORICO-BIOGRAFICHE[46]

Frank Morley

Uno dei risultati più sorprendenti di geometria elementare, nei tempi moderni, fu enunciato nel 1899 da **Frank Morley** (Woodbridge, 9 settembre 1860 - Baltimore, MA, 17 ottobre 1937) e comparve come caso particolare di un altro teorema nel primo volume delle *Transactions of the American Mathematical Society*. Subito la proprietà si diffuse e cominciò a circolare, non indisturbata, fra la curiosità dei matematici interessati alla "*geometria del triangolo*", finché, secondo Coxete, fu finalmente dimostrata con metodi elementari daW.E. Philip nel 1914.

In seguito la dimostrazione conobbe ulteriori versioni e, per la sua singolarità, all'interno della comunità matematica la proprietà meritò l'appellativo di "***miracolo di Morley***".

Morley crebbe in una famiglia di quaccheri del Suffolk e si laureò in scienze a Cambridge, prima di trasferirsi in Pennsylvania nel 1887. Si occupò sempre di matematica e in particolare di geometria, tanto da ricoprire la carica di presidente della American Mathematical Society nel 1919 e nel 1920, oltre a quella di docente presso la Hopkins University. Amava porre questiti matematici e nell'arco di cinquant'anni ne pubblicò più di sessanta, per la maggior parte di natura geometrica, su *Educational Times*.

Fu anche un ottimo giocatore di scacchi: una volta sconfisse il collega matematico Emanuel Lasker, all'epoca campione del mondo in carica.

[46] - Wikipedia (https://it.wikipedia.org/wiki/Frank_Morley)
- MacTutor (http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Morley.html)
- UniBocconi Milano (http://matematica.unibocconi.it/autore/frank-morley e anche http://matematica.unibocconi.it/articoli/il-miracolo-di-morley-e-altre-regolarit%C3%A0-dei-triangoli)
- University of Evansville, IN (https://faculty.evansville.edu/ck6/bstud/morley.html)