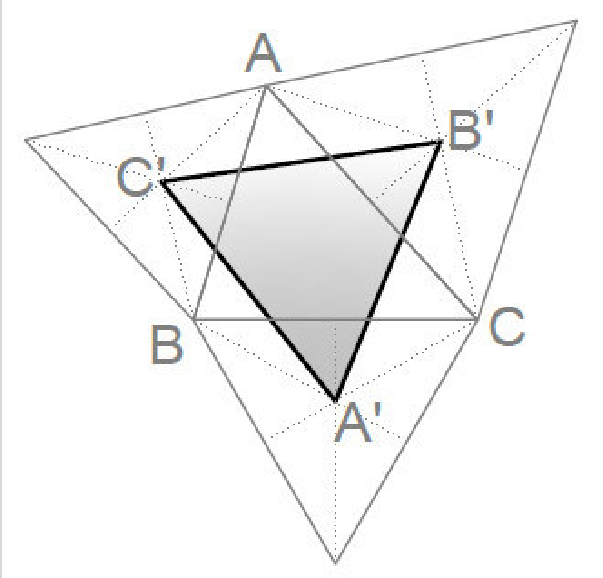
22 TEOREMA DI NAPOLEONE

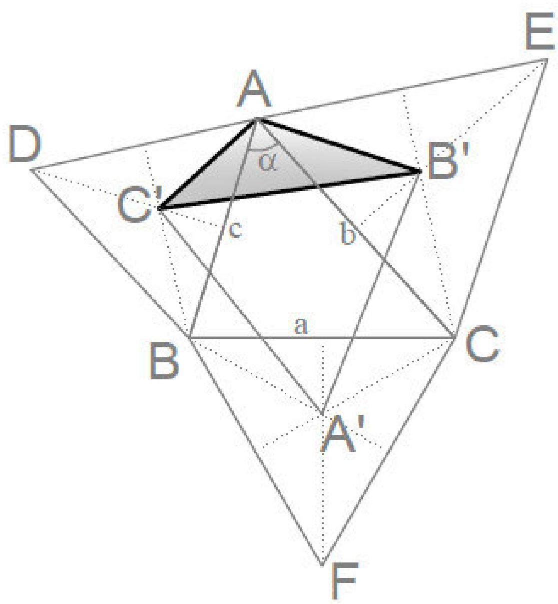
Il triangolo che si ottiene congiungendo i centri A', B', C' dei triangoli equilateri costruiti esternamente sui lati di un triangolo ABC qualunque, è equilatero.



22.1 DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA

IPOTESI	ABD triangolo equilatero ACE triangolo equilatero BCF triangolo equilatero	**TESI**	A'B'C' triangolo equilatero

Dette a, b, c le lunghezze rispettivamente dei lati BC, AC e AB del triangolo ABC e α l'ampiezza dell'angolo in A, consideriamo il triangolo AB'C'.



Il lato AC' appartiene all'altezza del triangolo equilatero ABD e in particolare C' è il centro del triangolo[42], quindi la sua lunghezza è facilmente calcolabile e vale

$$AC' = \frac{2}{3} \cdot \frac{c\sqrt{3}}{2} = \frac{c\sqrt{3}}{3}.$$

[42] Ricordiamo che in un triangolo equilatero, detta l la lunghezza del lato, l'altezza h vale $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ e il centro è posto a 1/3 dell'altezza rispetto alla base.

Il lato AB' appartiene all'altezza del triangolo equilatero ACE e in particolare B' è il centro del triangolo, quindi la sua lunghezza è facilmente calcolabile e vale

$$AB' = \frac{2}{3} \cdot \frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{b\sqrt{3}}{3}.$$

Osserviamo che l'ampiezza degli angoli BAC' e CAB' è 30° perchè sono formati dalle altezze dei triangoli equilateri, che sono anche bisettrici. Applichiamo quindi il Teorema di Carnot per ricavare l'espressione della lunghezza del terzo lato, B'C'

$$(B'C')^2 = (AC')^2 + (AB')^2 - 2AC' \cdot AB' \cos(60 + \alpha)$$

Sostituendo i valori ottenuti in precendenza $(B'C')^2 = \frac{c^2}{3} + \frac{b^2}{3} - 2\frac{bc}{3}\cos(60 + \alpha)$

Per le note formule di addizione possiamo scrivere il *cos(60+α)* come

$$\cos(60 + \alpha) = \cos 60 \cdot \cos\alpha - sen 60 \cdot sen\alpha = \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} sen\alpha$$

Applichiamo ora il Teorema di Carnot al triangolo ABC per calcolare la lunghezza del lato BC

$$(BC)^2 = a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \qquad \text{da cui} \qquad \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Inoltre l'area del triangolo ABC vale $A = \frac{1}{2} bc \cdot sen\alpha$ da cui $sen\alpha = \frac{2A}{bc}$

Sostituiamo e ricaviamo $\cos(60 + \alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4bc} - \frac{\sqrt{3}A}{bc} = \frac{b^2 + c^2 - a^2 - 4\sqrt{3}A}{4bc}$

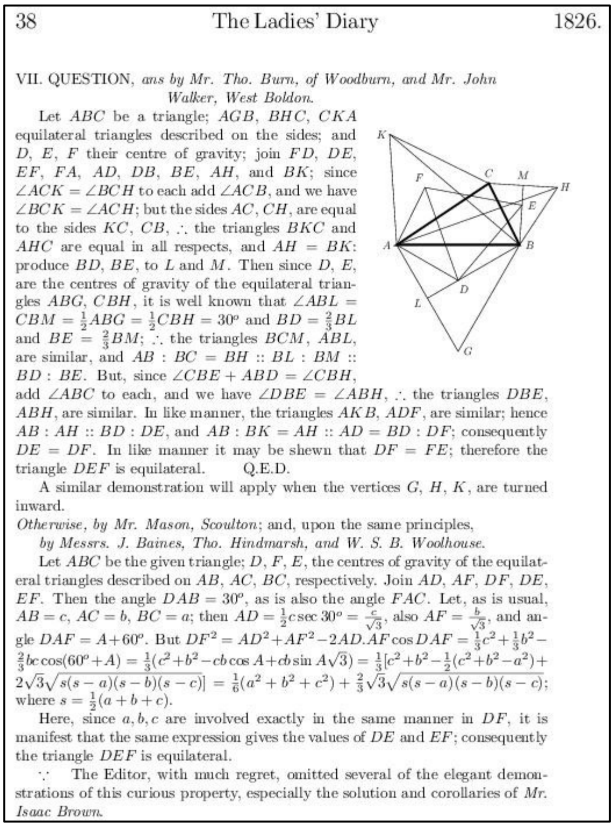
Pertanto l'espressione del quadrato della lunghezza del lato B'C' diventa

$$(B'C')^2 = \frac{c^2}{3} + \frac{b^2}{3} - 2\frac{bc}{3} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2 - 4\sqrt{3}A}{4bc} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}A}{6}$$

Notiamo che l'espressione è simmetrica in *a, b, c*, cioè il valore che otteniamo non cambia al variare dell'assegnazione dei valori di *a, b, c* ai diversi lati: in pratica arriveremmo alla stessa espressione scegliendo uno qualunque dei lati, pertanto il triangolo A'B'C' è equilatero.

22.2 NOTE STORICO-BIOGRAFICHE[43]

Tale teorema è stato attribuito a **Napoleone Bonaparte** (Ajaccio, 15 agosto 1769 - Isola di Sant'Elena, 5 maggio 1821), probabilmente più per riconoscergli un certo interesse nei riguardi della geometria che per l'effettivo merito della scoperta. Di certo è che Napoleone, sulla scia della Rivoluzione Francese fondò, o rifondò delle eccellenti scuole tecniche quali l'École Normale e l'École Polytechnique, scuole dove tenevano lezione i maggiori matematici del tempo quali Lagrange, Laplace, Monge, e che contribuirono non poco alla rinascita e alla diffusione della matematica.[44]
Il teorema è un caso particolare di un teorema più generale, per il quale, se i tre triangoli costruiti sono simili tra di loro e nella stessa orientazione, allora i loro centri formano un triangolo che è loro simile. Anche l'esistenza di un punto in cui concorrono i tre segmenti che uniscono i centri dei triangoli ai vertici opposti del triangolo di partenza è una proprietà generale della costruzione.
Nel 1796, durante la campagna d'Italia, Napoleone incontrò il matematico italiano Lorenzo Mascheroni e fu subito affascinato dal suo libro "*La Geometria del compasso*". E' possibile che il teorema di Napoleone sia in realtà opera di Mascheroni, che abbia voluto rendere omaggio all'imperatore lasciando a lui l'onore della scoperta.[45]


38 The Ladies' Diary 1826.

VII. QUESTION, *ans by Mr. Tho. Burn, of Woodburn, and Mr. John Walker, West Boldon.*

Let ABC be a triangle; AGB, BHC, CKA equilateral triangles described on the sides; and D, E, F their centre of gravity; join FD, DE, EF, FA, AD, DB, BE, AH, and BK; since $\angle ACK = \angle BCH$ to each add $\angle ACB$, and we have $\angle BCK = \angle ACH$; but the sides AC, CH, are equal to the sides KC, CB, $\therefore$ the triangles BKC and AHC are equal in all respects, and $AH = BK$: produce BD, BE, to L and M. Then since D, E, are the centres of gravity of the equilateral triangles ABG, CBH, it is well known that $\angle ABL = CBM = \frac{1}{2}ABG = \frac{1}{2}CBH = 30^o$ and $BD = \frac{2}{3}BL$ and $BE = \frac{2}{3}BM$; $\therefore$ the triangles BCM, ABL, are similar, and $AB : BC = BH :: BL : BM :: BD : BE$. But, since $\angle CBE + ABD = \angle CBH$, add $\angle ABC$ to each, and we have $\angle DBE = \angle ABH$, $\therefore$ the triangles DBE, ABH, are similar. In like manner, the triangles AKB, ADF, are similar; hence $AB : AH :: BD : DE$, and $AB : BK = AH :: AD = BD : DF$; consequently $DE = DF$. In like manner it may be shewn that $DF = FE$; therefore the triangle DEF is equilateral. Q.E.D.

A similar demonstration will apply when the vertices G, H, K, are turned inward.

Otherwise, by Mr. Mason, Scoulton; and, upon the same principles, *by Messrs. J. Baines, Tho. Hindmarsh, and W. S. B. Woolhouse.*

Let ABC be the given triangle; D, F, E, the centres of gravity of the equilateral triangles described on AB, AC, BC, respectively. Join AD, AF, DF, DE, EF. Then the angle $DAB = 30^o$, as is also the angle FAC. Let, as is usual, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$; then $AD = \frac{1}{2}c\sec 30^o = \frac{c}{\sqrt{3}}$, also $AF = \frac{b}{\sqrt{3}}$, and angle $DAF = A + 60^o$. But $DF^2 = AD^2 + AF^2 - 2AD.AF\cos DAF = \frac{1}{3}c^2 + \frac{1}{3}b^2 - \frac{2}{3}bc\cos(60^o + A) = \frac{1}{3}(c^2 + b^2 - cb\cos A + cb\sin A\sqrt{3}) = \frac{1}{3}[c^2 + b^2 - \frac{1}{2}(c^2 + b^2 - a^2) + 2\sqrt{3}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}] = \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{2}{3}\sqrt{3}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$; where $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Here, since a, b, c are involved exactly in the same manner in DF, it is manifest that the same expression gives the values of DE and EF; consequently the triangle DEF is equilateral.

$\because$ The Editor, with much regret, omitted several of the elegant demonstrations of this curious property, especially the solution and corollaries of *Mr. Isaac Brown.*

La pagina di "The Ladies' Diary".

Questo teorema è uno dei più scoperti e riscoperti della matematica. La sua prima sicura comparsa avvenne in un articolo del 1826 sulla già citata agenda londinese "*The Ladies' Diary*", che fu pubblicata annualmente dal 1704 al 1841, in cui William Rutherford (1798-1871) lo pubblicava come problema.
È probabile che il teorema fosse già noto prima di Rutherford, come del resto che lo stesso Rutherford fosse in grado dimostrarlo, ma non esiste alcuna prova diretta che possa essere attribuito a Napoleone Bonaparte, anche se è noto che egli fosse piuttosto portato per la matematica e la geometria in particolare.
Secondo il suo biografo Felix Markham (*Napoleon, 1963*) *"per i suoi insegnanti Napoleone era un allievo modello e promettente, specialmente in matematica (…) L'ispettore scolastico scrisse che l'attitudine di Napoleone per la matematica lo rendeva adatto alla marina, ma alla fine si decise che avrebbe dovuto tentare l'ingresso in artiglieria, dove l'avanzamento per merito e abilità matematica era più aperto (…)".*

Napoleone era appassionato di tutte le scienze e ne seguì gli sviluppi per tutta la vita. Nel suo esilio finale a Sant'Elena, passava il tempo leggendo la Histoire naturelle di Buffon, l'Astronomie di Delambre, il corso di cristallografia e cosmogonia dell'Abate Haüy, il corso di chimica di Fourcroy, quello di matematica di Lacroix, che annotò personalmente, tutti libri di testo che erano diventati dei riferimenti e che l'Imperatore aveva fatto redigere dagli scienziati più prestigiosi.

---

[43] - Larga parte di questa nota biografica è tratta dall'ottimo articolo del prof. Marco Fulvio Barozzi pubblicato sul blog Popinga, che si trova in forma integrale al link
http://keespopinga.blogspot.it/2012/09/la-geometria-di-napoleone.html
- Wikipedia (https://en.wikipedia.org/wiki/Napoleon%27s_theorem)
-L'infinito teatro del cosmo (http://www.infinitoteatrodelcosmo.it/2017/03/08/la-vera-storia-di-napoleone-un-grande-matematico-che-adorava-la-geometria-con-tanti-bei-quiz-facoltativi/)
[44] http://www.lorenzoroi.net/geometria/Napoleone.html
[45] Università di Pisa
(http://www.dm.unipi.it/~georgiev/club/progects/DYNAMAT/PUBLIC/D11_D13_D15_Ecourse_workshops/PisaMaterials/ProjectsAfter/Baldini_Napoleone.pdf)

Sotto il suo regno, la Francia divenne la potenza scientifica più importante al mondo, risultato di una politica attiva, concepita con passione e realizzata con talento da una elite scientifica unita e selezionata, sedotta dal ruolo sociale e politico concesso dall'Imperatore.
Sin dai tempi del Primo Consolato, egli era orgoglioso di essere membro dell'Institute de France, per il quale trovò una sede degna nel 1805, diventato Imperatore, nell'antico Collège des Quatre-Nations, di fianco al Palazzo del Louvre.
Egli era amico di diversi matematici e scienziati, molti dei quali erano tra i 150 che avevano partecipato alla Campagna d'Egitto del 1798, come Fourier, Monge e Berthollet, vera accademia in movimento con la quale si intratteneva in lunghe discussioni notturne, sotto gli sguardi preoccupati e attoniti dei suoi generali. Fourier divenne persino governatore del Basso Egitto.

Napoleone Bonaparte

Anche Laplace, che aveva interrogato il giovane corso per l'ammissione in artiglieria, era assai amico di Napoleone, ricevendo titoli e incarichi prestigiosi. Egli fu tuttavia rimosso dall'incarico di Ministro dell'Interno dopo solo sei settimane perché, disse poi l'Imperatore, *"cercava sottigliezze dappertutto, aveva solo idee dubbiose e portava nell'amministrazione lo spirito dell'infinitamente piccolo"*.
Il più noto dialogo tra i due, riportato da diverse fonti, tra le quali Victor Hugo, avvenne quando Laplace diede a Napoleone una copia della sua *Mécanique Céleste*.
L'imperatore sfogliò il grande volume e disse *"Comment, vous faites tout le système du monde, vous donnez les lois de toute la création et dans tout votre livre vous ne parlez pas une seule fois de l'existence de Dieu!"* (Ma come, voi trattate tutti i sistemi del mondo, date le leggi di ogni creazione e nel vostro libro non menzionate una sola volta l'autore dell'universo!). Laplace rispose *"Sire, je n'avais pas besoin de cette hypothèse-là"* (Sire, non avevo bisogno di quell'ipotesi).