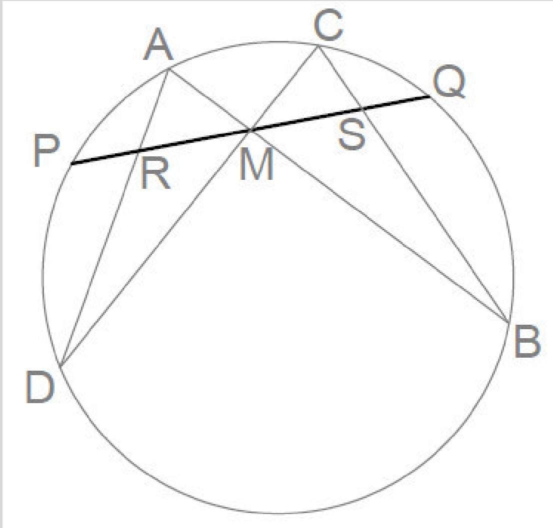
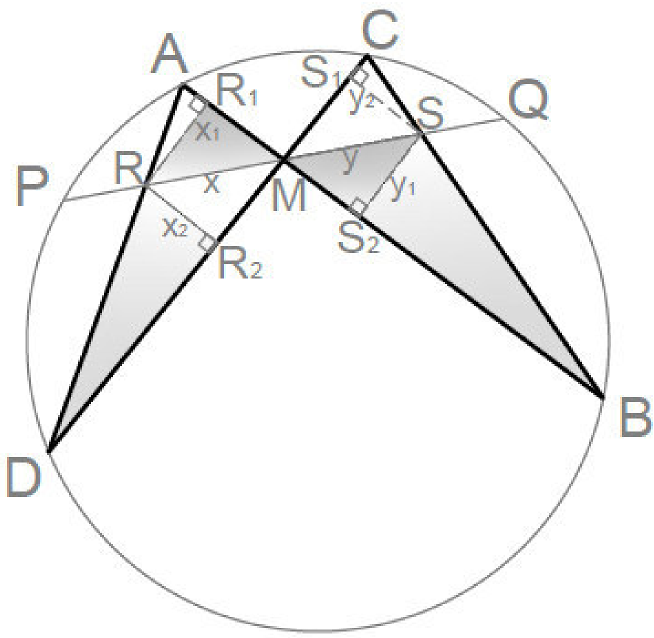
21 TEOREMA DELLA FARFALLA

Se, in un cerchio, per il punto medio M di una corda PQ si conducono altre due corde AB e CD e di seguito le corde AD e BC, che intersecano PQ rispettivamente in R e S, allora M risulta anche il punto medio del segmento RS.



21.1 DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA

IPOTESI	$PM \cong MQ$	**TESI**	$RM \cong MS$



Dette x e y le lunghezze rispettivamente dei segmenti RM e MS, chiamiamo x_1 e x_2 le distanze di R dalle corde AB e CD e chiamiamo y_1 e y_2 le distanze di S dalle corde AB e CD.

I triangoli ADM e CBM sono formati ciascuno da quattro triangoli rettangoli, simili tra loro a due a due:

- $ARR_1 \sim CSS_1$ (due angoli in A e C alla circonferenza e due angoli retti)
- $MRR_1 \sim MSS_2$ (due angoli in M opposti al vertice e due angoli retti)
- $MRR_2 \sim MSS_1$ (due angoli in M opposti al vertice e due angoli retti)
- $DRR_2 \sim BSS_2$ (due angoli in D e B alla circonferenza e due angoli retti)

Possiamo pertanto scrivere le seguenti relazioni:

$$\frac{x_1}{y_2} = \frac{AR}{CS} \qquad \frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1} \qquad \frac{x}{y} = \frac{x_2}{y_2} \qquad \frac{x_2}{y_1} = \frac{DR}{BS}$$

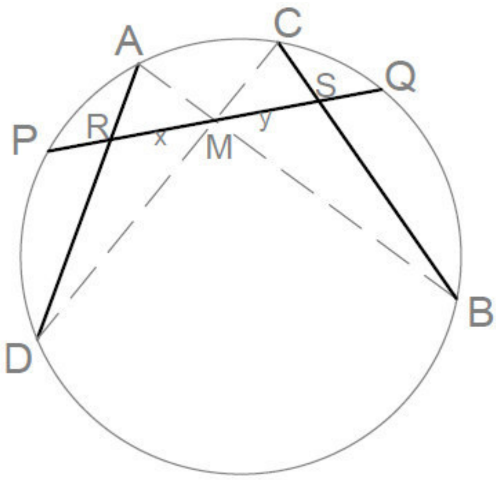
Esprimiamo ora il rapporto dei quadrati di RM ed MS in funzione delle quantità appena ricavate

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_2}{y_1} \cdot \frac{x_1}{y_2} = \frac{DR}{BS} \cdot \frac{AR}{CS} = \frac{DR \cdot AR}{BS \cdot CS}$$

Applichiamo ora il teorema delle corde alle coppie di corde AD, PQ e BC,PQ ricavando le relazioni che seguono

$$AR \cdot DR = PR \cdot QR$$

$$CS \cdot BS = PS \cdot QS$$



che, sostituite nella precedente uguaglianza, ricordando che per ipotesi PM è congruente a MQ e posta la lunghezza dei due segmenti pari ad a, ci permettono di riscrivere la precedente uguaglianza come

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{DR \cdot AR}{BS \cdot CS} = \frac{PR \cdot QR}{PS \cdot QS} = \frac{(a-x)\cdot(a+x)}{(a+y)\cdot(a-y)} = \frac{a^2 - x^2}{a^2 - y^2}$$

che esprimiamo in forma di proporzione come $x^2 : (a^2 - x^2) = y^2 : (a^2 - y^2)$.

Applicando la proprietà del comporre otteniamo $(x^2 + a^2 - x^2) : x^2 = (y^2 + a^2 - y^2) : y^2$

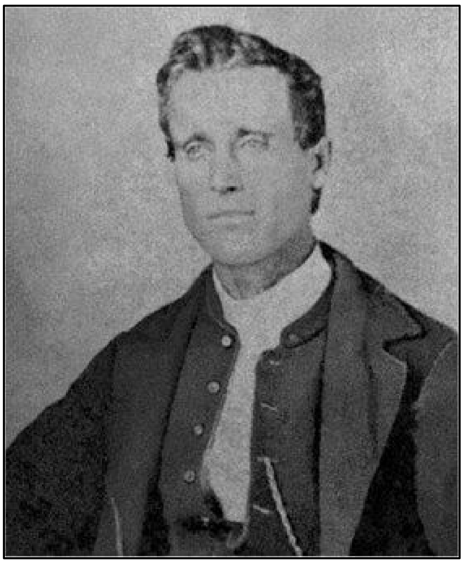
da cui $a^2 : x^2 = a^2 : y^2$ che implica $x^2 = y^2$, cioè $x = y$.

Risulta così dimostrato che effettivamente i due segmenti RM ed MS hanno la stessa lunghezza e che quindi M è anche il punto medio del segmento RS.[39]

[39] Altre dimostrazioni del teorema di possono trovare su http://www.lorenzoroi.net/geometria/Butterfly.html

21.2 NOTE STORICO-BIOGRAFICHE[40]

Il teorema fu presentato per la prima volta su una rivista, in forma di problema, da **William George Horner** (Bristol, 9 giugno 1786 – Bath, 22 settembre 1837) nel 1815 e prende il nome dalla figura cui dà origine. Più di recente, una dimostrazione risalente al 1805 di William Wallace è stata scoperta negli archivi della famiglia di Wallace.[41]
Il suo nome apparve per la prima volta tra i solutori dei problemi matematici proposti dalla rivista "*The Ladies' Diary*", per la quale era solito proporre la soluzione dei quesiti presenti nella sezione dedicata alle scienze. Il suo impegno continuò anche quando la rivista cambiò il proprio nome in "*The Lady's and Gentleman's Diary*" e in seguito in "*The Gentleman's Diary*": è proprio in quest'ultima che nel 1815 pubblica la soluzione del problema proposto l'anno precedente da Thomas Scurr (che prenderà poi il nome di Teorema della farfalla).



William George Horner

Horner è soprattutto ricordato per il metodo, la **regola di Horner** appunto, per risolvere le equazioni algebriche. Più che una regola si tratta di un vero e proprio algoritmo che permette di valutare un polinomio con molte meno operazioni rispetto ai metodi allora in uso.

Esempio di utilizzo dell'algoritmo di Horner

La valutazione del polinomio $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ richiederebbe 6 prodotti (3 dal termine di terzo grado, 2 dal termine di secondo grado e 1 da quello di primo grado) e in generale un polinomio di grado *n* richiederebbe *n+(n-1)+(n-2)+...+1* prodotti, pari a *n(n+1)/2* prodotti.
Il metodo di Horner consente invece di scrivere il polinomio in forma alternativa, riducendo così notevolmente il numero di prodotti necessari.

Si considerano i soli termini in cui compare l'incognita e tra essi si raccoglie la *x* $P(x) = x\left(2x^2 - 3x + 4\right) - 1$ all'interno della parentesi si procede in modo analogo, separando i termini che contengono la *x* e raccogliendo a fattor comune $P(x) = x\left[x\left(2x - 3\right) + 4\right] - 1$
Si nota a questo punto che nell'espressione riportata i prodotti sono solamente 3, contro i 6 indicati in precedenza, con notevole semplificazione del calcolo. In generale quindi si può affermare che con questo metodo servono solamente *n* prodotti, con *n* pari al grado del polinomio di partenza.
Dire che si valuta un polinomio in questo modo significa dire che lo si valuta seguendo l'algoritmo di Horner.

Si verifica facilmente che il noto metodo di Ruffini per eseguire la divisione tra polinomi fornisce esattamente lo stesso risultato. Per dimostrarlo impostiamo la tabella del metodo di Ruffini ipotizzando una generica divisione del polinomio per *x-a*.

	2	-3	4	-1
a		$2a$	$a(2a-3)$	$a[a(2a-3)+4]$
	2	$2a-3$	$a(2a-3)+4$	$a[a(2a-3)+4]-1$

E' ora facile verificare che i coefficienti del quoziente sono gli stessi termini che compaiono nell'espressione del polinomio in precedenza ottenuta con l'algoritmo di Horner. $P(x) = x\left[x\left(2x - 3\right) + 4\right] - 1$
Troviamo infatti il coefficiente *2a-3* è all'interno della parentesi tonda, il coefficiente *a(2a-3)*+4 all'interno della parentesi quadra e il resto rappresenta esattamente il valore del polinomio per *x=a*.
Pertanto il metodo di Ruffini fornisce la stessa espressione che si ottiene con l'algoritmo di Horner.

La conseguenza pratica risiede nel fatto che l'ultima espressione del polinomio ottenuta con Ruffini è la valutazione del polinomio nel punto *a*, cioè *P(a),* e anche il resto della divisione del polinomio iniziale per *x-a*, cioè *P(x):(x-a).*

[40] Wikipedia (https://en.wikipedia.org/wiki/William_George_Horner)
[41] https://vivalascuola.studenti.it/teorema-della-farfalla-dimostrazione-183949.html#steps_0