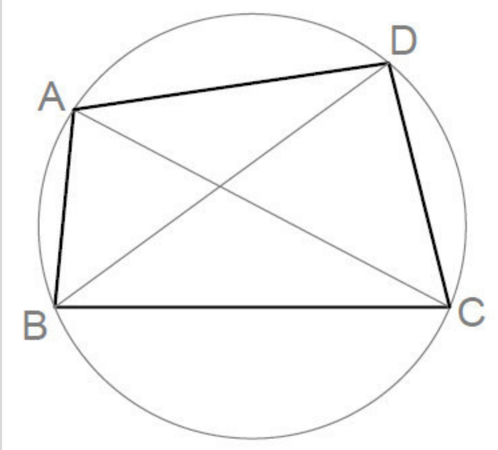
20 TEOREMA DI TOLOMEO

Il rettangolo costruito con le diagonali di un quadrilatero inscritto in un cerchio è equivalente alla somma dei rettangoli costruiti con le coppie dei lati opposti.

Lo stesso enunciato può essere anche esposto in un'altra forma: dato un quadrilatero ciclico vale la seguente relazione:

$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + BC \cdot AD$$



N.B. Ricordiamo che un quadrilatero è **inscrivibile** (cioè ciclico) in una circonferenza se e solo se i suoi angoli opposti sono supplementari; un quadrilatero è **circoscrivibile** ad una circonferenza se e solo se la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due.

20.1 DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA

IPOTESI	ABCD quadrilatero ciclico	TESI	$AC \cdot BD = AB \cdot DC + BC \cdot AD$

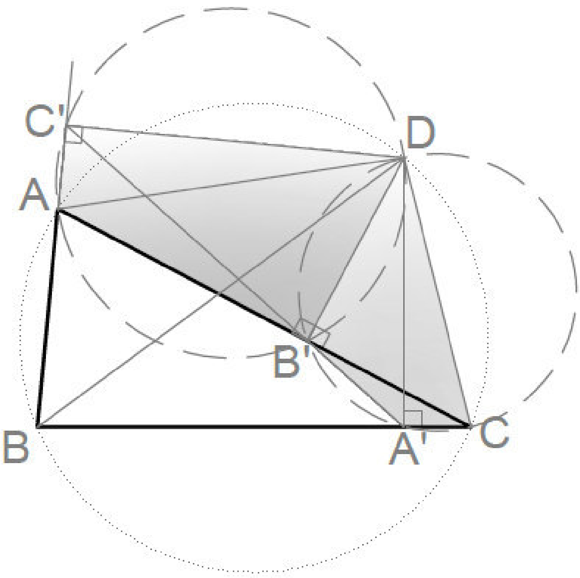
Per dimostrare la tesi vogliamo utilizzare le proprietà delle retta di Simson, pertanto tracciamo dal punto D le perpendicolari ai lati del triangolo ABC.

I piedi A', B', C' di tali perpendicolari sono allineati e possiamo scrivere la relazione

$A'C' = A'B' + B'C'$-

Esprimiamo ciascun segmento della relazione utilizzando il **teorema della corda**.

Il **quadrilatero AB'DC'** è ciclico (due angoli retti opposti), quindi la corda B'C' può essere espressa in funzione del diametro AD secondo la relazione



$$B'C' = AD \cdot sen C'\hat{A}B' = AD \cdot sen B\hat{A}C$$

($sen C'\hat{A}B' = sen B\hat{A}C$ perchè i due angoli sono supplementari)

Il **quadrilatero A'B'DC** è ciclico (due triangoli rettangoli con la stessa ipotenusa DC), quindi la corda A'B' può essere espressa in funzione del diametro DC secondo la relazione

$$A'B' = DC \cdot sen A\hat{C}B$$

Il **quadrilatero BA'DC'** è ciclico (due angoli retti opposti), quindi la corda A'C' può essere espressa in funzione del diametro BD secondo la relazione

$$A'C' = BD \cdot sen A\hat{B}C$$

Applicando lo stesso teorema della corda[36] anche al triangolo ABC, considerando ciascun lato come una corda, otteniamo le relazioni

$$AB = 2r \cdot sen A\hat{C}B \qquad \text{da cui} \qquad sen A\hat{C}B = \frac{AB}{2r}$$

$$BC = 2r \cdot sen B\hat{A}C \qquad \text{da cui} \qquad sen B\hat{A}C = \frac{BC}{2r}$$

$$AC = 2r \cdot sen A\hat{B}C \qquad \text{da cui} \qquad sen A\hat{B}C = \frac{AC}{2r}$$

Sostituendo l'espressione del seno dei tre angoli nelle uguaglianze precedentemente ricavate, si ottiene

$$B'C' = AD \cdot \frac{BC}{2r} \qquad A'B' = DC \cdot \frac{AB}{2r} \qquad A'C' = BD \cdot \frac{AC}{2r}$$

che, sostituite nella relazione $A'C' = A'B' + B'C'$,

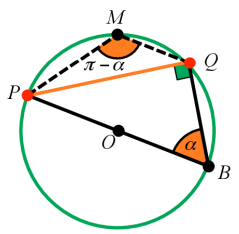
danno $$AD \cdot \frac{BC}{2r} + DC \cdot \frac{AB}{2r} = BD \cdot \frac{AC}{2r}$$

che, semplificando per la quantità positiva *2r*, dimostra la tesi.

[36] Ricordiamo l'enunciato del Teorema della corda

*La lunghezza di una corda di una circonferenza di raggio **r** è uguale al prodotto tra il diametro **2r** e il seno dell'angolo alla circonferenza che insiste su uno dei due archi determinati dalla corda.*

$$PQ = 2r\,\mathrm{sen}(\pi - \alpha) = 2r\,\mathrm{sen}\,\alpha$$



- **<u>Teorema</u>: Se in un quadrilatero il prodotto della lunghezza delle diagonali è uguale alla somma dei prodotti delle lunghezze dei lati opposti, allora il quadrilatero è ciclico.**

IPOTESI	$AC \cdot BD = AB \cdot DC + BC \cdot AD$	**TESI**	ABCD quadrilatero ciclico

Supponiamo **per assurdo** che il quadrilatero ABCD non sia ciclico.

In questo caso A', B', C' non sono allineati e individuano un triangolo A'B'C' per il quale valgono le note disuguaglianze, in particolare vale quella che afferma che ciascun lato e minore della somma degli altri due.

Possiamo quindi scrivere la disuguaglianza $A'C' < A'B' + B'C'$

Se ora sostituiamo nella disuguaglianza le espressioni ricavate in precedenza che definiscono i tre lati in funzione del raggio, otteniamo

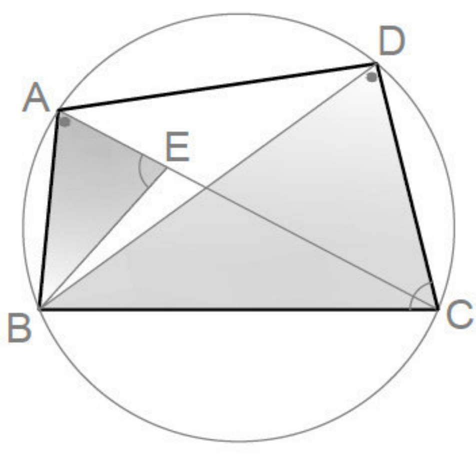
$$AD \cdot \frac{BC}{2r} + DC \cdot \frac{AB}{2r} > BD \cdot \frac{AC}{2r} \qquad \text{cioè} \qquad AB \cdot DC + BC \cdot AD > AC \cdot BD$$

che contraddice l'ipotesi.
Pertanto i tre punti non possono individuare un triangolo e devono essere allineati, quindi il quadrilatero ABCD deve essere ciclico.

20.2 DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA CON LA SIMILITUDINE

IPOTESI	ABCD quadrilatero ciclico	**TESI**	$AC \cdot BD = AB \cdot DC + BC \cdot AD$

Dimostriamo il teorema utilizzando le similitudini, in una versione più simile a quella originaria di Tolomeo.

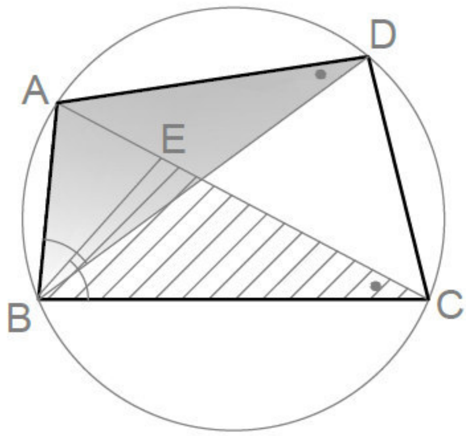


Prendiamo un punto E sulla diagonale AC in modo che l'angolo AEB sia congruente all'angolo BCD.

Consideriamo i triangoli ABE e BCD che risultano simili perchè, oltre agli angoli appena citati, hanno congruenti anche gli angoli BAC e BDC, in quanto angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco BC.

I lati corrispondenti sono quindi in proporzione tra loro secondo la relazione $AE : DC = AB : BD$ da cui $AB \cdot DC = AE \cdot BD$

Consideriamo i triangoli ABD e BCE che risultano simili perchè hanno gli angoli ABD e CBE congruenti perchè somma di angoli congruenti e gli angoli ACB e ADB congruenti perchè angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AB.



I lati corrispondenti sono quindi in proporzione tra loro secondo la relazione

$EC : BC = AD : BD$ da cui $AD \cdot BC = EC \cdot BD$

Sommando membro a membro le due uguaglianze ottenute dalle due similitudini otteniamo

$AB \cdot DC + AD \cdot BC = AE \cdot BD + EC \cdot BD$ da cui $AB \cdot DC + AD \cdot BC = BD \cdot (AE + EC)$

che corrisponde alla tesi che si voleva dimostrare $AB \cdot DC + AD \cdot BC = BD \cdot AC$ [37]

[37] Si noti che se il quadrilatero ABCD fosse un rettangolo, il Teorema di Tolomeo assumerebbe l'aspetto del Teorema di Pitagora.

20.3 NOTE STORICO-BIOGRAFICHE[38]

Nonostante la sua fama sia sopravvissuta ai secoli, sono pochissime le notizie sulla vita di **Claudio Tolomeo** che conosciamo: sappiamo che nacque a Pelusio, in Egitto, e che visse e lavorò per tutta la sua vita ad Alessandria, dove morì quasi ottantenne attorno al 168 d.C..
I suoi interessi spaziarono attraverso molti campi delle scienze, dalla matematica alla geografia, dalla fisica all'astronomia, ma è grazie a quest'ultima che deve la sua straordinaria notorietà.
Autorevolissimo studioso dell'astronomia e della trigonometria sferica, grazie anche alle osservazioni di illustri predecessori quali Eudosso, Aristarco, Ipparco e Apollonio di Perga, Tolomeo lasciò un grandioso compendio astronomico in tredici libri, la "*Syntaxis matematica*" meglio conosciuta sotto il nome di "**Almagesto**", grazie alla traduzione che gli arabi fecero in ossequio al suo lavoro (la parola significa infatti "il grande trattato").
E' proprio nel primo libro dell'Almagesto che compare il teorema qui enunciato e dimostrato.

Claudio Tolomeo

Il suo sistema geocentrico (il Sistema Tolemaico appunto), le sue misurazioni e il suo metodo di calcolo furono un punto di riferimento imprescindibile per tutti gli astronomi, gli astrologi e i navigatori, almeno fino alle grandi scoperte geografiche del del XV e XVI secolo.

Si interessa proficuamente anche di matematica anticipando di fatto lo studio della trigonometria e applicando le proprie teorie alla costruzione di astrolabi e meridiane. Di notevole importanza storica è l'opera intitolata *"Geografia"* che, assumendo un sistema di latitudine e longitudine, influenzò i cartografi per centinaia di anni, pur non contenendo dati affidabili. Nel trattato dal titolo *"Armoniche"*, Tolomeo espone poi una "*Teoria di suoni*" della musica greca e nell '"*Ottica*" giunge ad analizzare le proprietà della luce, in particolare la rifrazione e la riflessione.

Una pagina dell'Almagesto, nella traduzioe araba del IX secolo

[38] - Mac Tutor (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Ptolemy.html)
- Wikipedia (https://it.wikipedia.org/wiki/Claudio_Tolomeo)
- Free.it.scienzaastrologia (http://fisa.altervista.org/claudio_tolomeo.html)
- Astronomiamo (https://www.astronomiamo.it/Articolo.aspx?Arg=Tolomeo_Claudio)