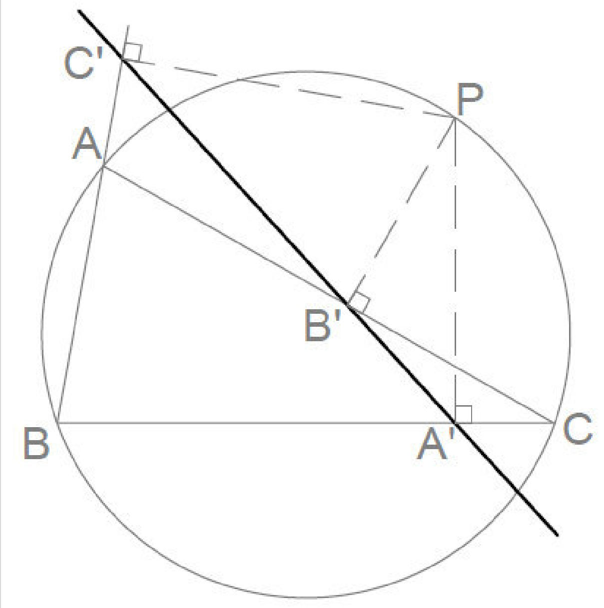
19 RETTA DI SIMSON

Da un punto P appartentente alla circonferenza circoscritta ad un triangolo si conducono le perpendicolari ai lati del triangolo: i piedi di tali perpendicolari sono allineati e la retta cui appartengono è detta **retta di Simson**.



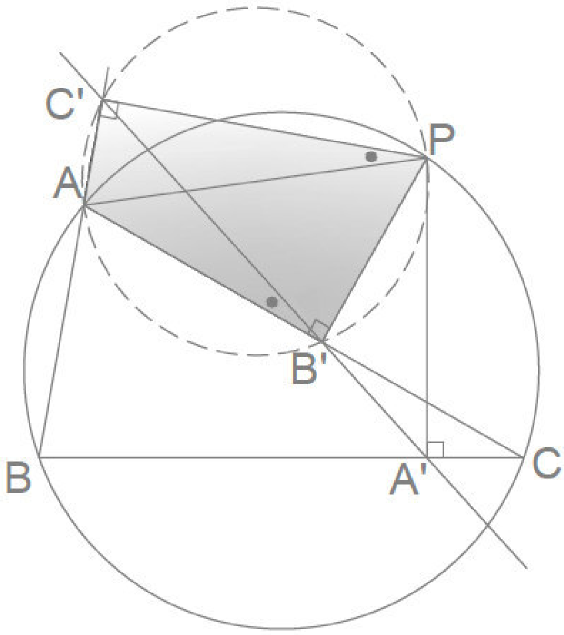
19.1 DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA

IPOTESI	ABC triangolo P appartiene alla circonferenza circoscritta PC', PB', PA' sono perpendicolari ai lati del triangolo	**TESI**	A', B', C' sono allineati

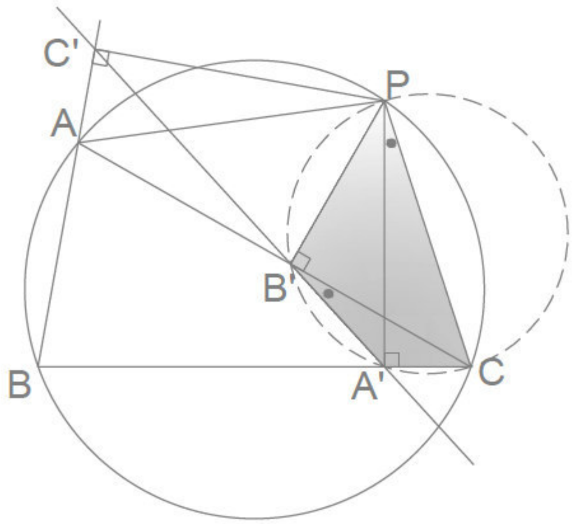
Per dimostrare che i punti A', B', C' sono allineati mostreremo che l'angolo A'B'C' è piatto.

Consideriamo il **quadrilatero AB'PC'**: gli angoli B' e C' sono retti e sono opposti, pertanto il quadrilatero è inscrivibile in una circonferenza perchè ha una coppia di angoli opposti supplementari (il diametro della circonferenza sarà il segmento AP).

Gli angoli AB'C' e APC' sono dunque congruenti perchè angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AC'.



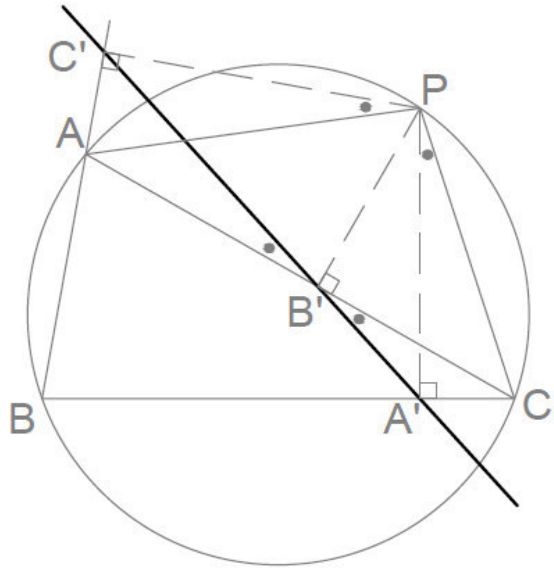
Consideriamo ora il **quadrilatero A'B'PC**: il lato PC è l'ipotenusa comune a due triangoli rettangoli e pertanto è il diametro di una circonferenza circoscritta ai triangoli. Di conseguenza anche il quadrilatero in esame è inscritto nella stessa circonferenza.



Analogamente a quanto visto in precedenza, gli angoli A'B'C e A'PC sono congruenti perchè angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco A'C.

Consideriamo ora il **quadrilatero ABCP** che, essendo inscritto in una circonferenza, ha gli angoli opposti supplementari.
Possiamo quindi scrivere la relazione

$$A\hat{P}C + A\hat{B}C = 180°$$



Anche il **quadrilatero A'PC'B** è ciclico perchè ha due angoli opposti supplementari (entrambi retti), pertanto possiamo scrivere la relazione che lega gli altri due angoli

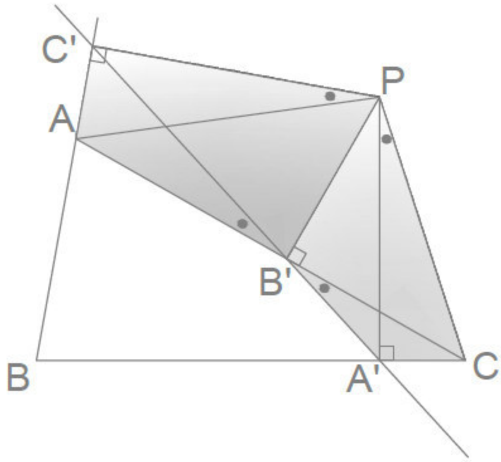
$$C'\hat{P}A' + A\hat{B}C = 180°$$

Ne consegue che $A\hat{P}C \cong C'\hat{P}A'$.
Nota questa uguaglianza, con semplici differenze tra angoli ricaviamo che $A'\hat{P}C \cong C'\hat{P}A$
e di conseguenza, in quanto congruenti ad angoli congruenti, anche gli angoli AB'C' e A'B'C sono congruenti.
Allora $C'\hat{B}'A' = C'\hat{B}'C + C\hat{B}'A' = C'\hat{B}'C + C'\hat{B}'A = 180°$.

Risulta quindi dimostrato che i punti A', B', C' sono allineati ed appartengono a quella che viene definita **retta di Simson del punto P relativa al triangolo ABC**.

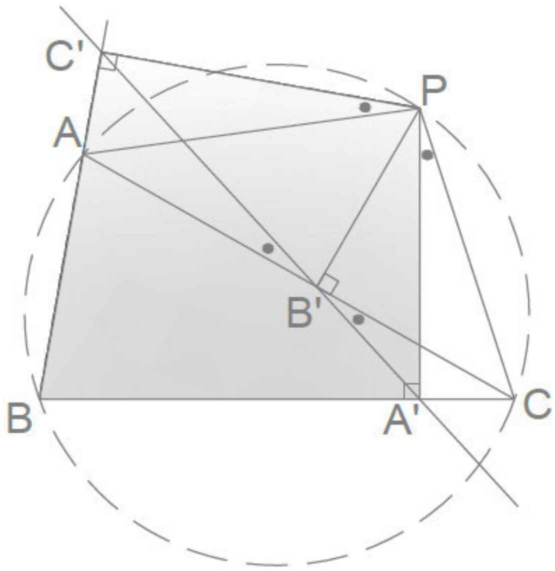
- ## Osservazione: dimostrazione della proprietà inversa

IPOTESI	ABC triangolo I piedi A', B', C' delle perpendicolari ai lati condotte da P sono allineati	**TESI**	P appartiene alla circonferenza circoscritta al triangolo ABC



Prendiamo un punto P esterno al triangolo e conduciamo per P le perpendicolari ai lati e supponiamo che i piedi A', B', C' di queste siano allineati (gli angoli AB'C' e A'B'C sono dunque congruenti in quanto opposti al vertice).

Consideriamo, in maniera del tutto analoga a quanto fatto nella prima parte della dimostrazione, il **quadrilatero ciclico AB'PC'** (ha due angoli retti opposti e supplementari).
Gli angoli AB'C' e APC' sono dunque congruenti perchè angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AC'.



Consideriamo ora il **quadrilatero ciclico A'CPB'** (PC ipotenusa comune a due triangoli rettangoli).
Gli angoli A'B'C e A'PC sono congruenti perchè angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco A'C.
Ne consegue che $A\hat{P}C' \cong A'\hat{P}C$ e quindi $A\hat{P}C \cong C'\hat{P}A'$ perchè somma di angoli congruenti.

Consideriamo ora il quadrilatero ciclico A'PC'B (ha due angoli retti opposti e supplementari) per il quale vale la relazione

$$C'\hat{P}A' + A\hat{B}C = 180°$$

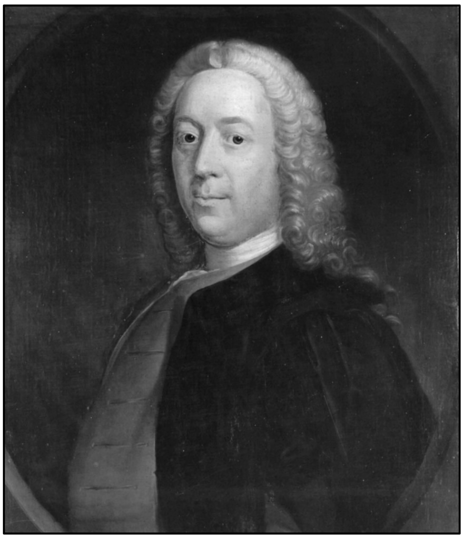
che, per l'uguaglianza scritta sopra, diventa

$$A\hat{P}C + A\hat{B}C = 180°$$

Quindi i due angoli sono supplementari e anche il quadrilatero ABCP è ciclico e quindi inscrivibile, pertanto **il punto P appartiene alla circonferenza circoscritta** al quadrilatero, che è la stessa circoscritta al triangolo ABC.

19.2 NOTE STORICO-BIOGRAFICHE[35]

Robert Simson (West Kilbride, 14 ottobre 1687 - Glasgow, 1 ottobre 1768) fu il primogenito di diciassette figli maschi e il padre John aveva previsto per lui una vita votata al sacerdozio.
Fu solo per caso che ebbe l'occasione di rivolgere il proprio interesse alla matematica: come studente di teologia doveva produrre lavori scritti per i suoi insegnanti, ma trovando tali argomenti poco soddisfacenti trovò più ricreativo leggere qualcosa sulla filologia orientale e poi sulla matematica, in particolare gli Elementi di Euclide.
Studiò e si laureò presso l'Università di Glasgow e nel 1711 ottenne la cattedra di matematica presso la stessa Università; cattedra che conservò per i successivi cinquant'anni istruendo allievi particolarmente dotati come McLaurin e Stewart.



Robert Simson

Il suo talento per la geometria era notevolissimo e il suo contributo alla matematica, anche grazie ai suggerimenti di Edmund Halley, è oggi generalmente riconosciuto per i commentarii e le edizioni critiche delle opere dei grandi matematici greci, come Euclide e Apollonio.

Sull'imponente monumento funebre di West Killbride fu scolpita la frase *"the Restorer of Grecian Geometry, and by his Works the Great Promoter of its Study in the Schools"*, che in poche parole riassume l'impegno di una vita intera nel recupero della geometria classica e nell'insegnamento.

[35] - Mac Tutor (http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Simson.html)
- Wikipedia (https://en.wikipedia.org/wiki/Robert_Simson)
- University of Glasgow (http://www.universitystory.gla.ac.uk/biography/?id=WH0065&type=P)