18 POTENZA DI UN PUNTO RISPETTO A UNA CIRCONFERENZA

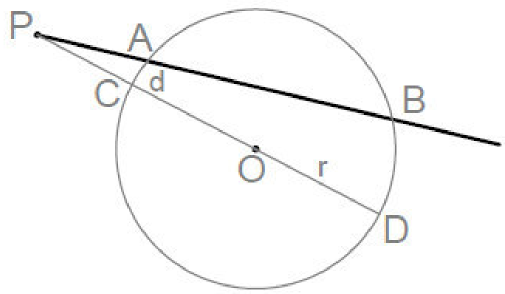
18.1 DEFINIZIONE DI POTENZA DI UN PUNTO RISPETTO AD UNA CIRCONFERENZA

Sia P un punto esterno ad una circonferenza di centro O e tracciamo una secante per P e la retta PO. Detti A,B e C,D i punti di intersezione con la circonferenza, rispettivamente della secante e di PO, per il il teorema delle secanti[30] risulta

$$PC \cdot PD = PA \cdot PB$$

ossia, dette *d* la distanza PO ed *r* la misura del raggio,

$$\boxed{PA \cdot PB = (d-r)\cdot(d+r) = d^2 - r^2}$$



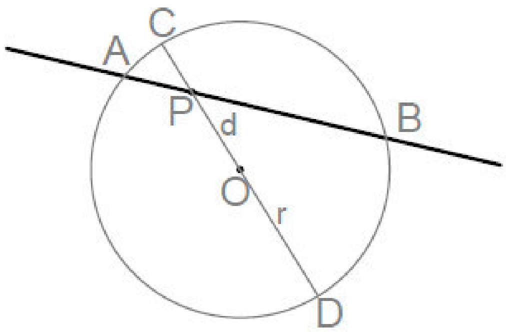
Questo mostra che il valore di $PA \cdot PB$ non dipende dalla secante, ma solo dalla posizione di P rispetto alla circonferenza.

Se il punto P è interno alla circonferenza e consideriamo una corda AB passante per P otteniamo, utilizzando questa volta il teorema delle corde[31],

$$\boxed{PA \cdot PB = (r-d)\cdot(r+d) = r^2 - d^2}$$

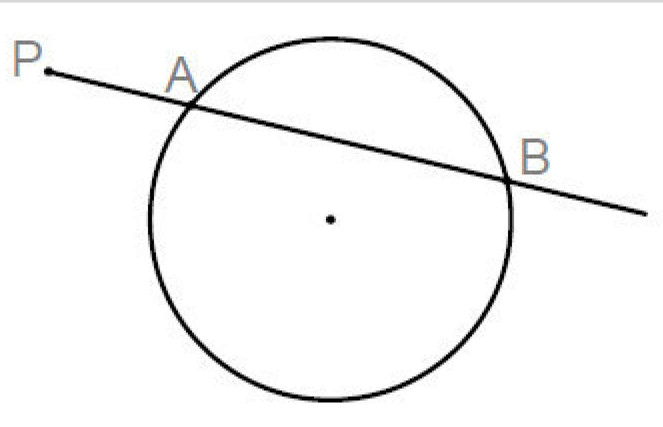
dove *d* è sempre la distanza di P da O.

Anche in questo caso, quindi, il valore di $PA \cdot PB$ non dipende dalla scelta della corda, ma solo dalla posizione di P.



Preso un punto P interno o esterno ad una circonferenza e tracciata una secante per P che interseca la circonferenza nei punti A e B, si definisce "**potenza di P rispetto alla circonferenza**" il prodotto delle lunghezze dei segmenti PA e PB.

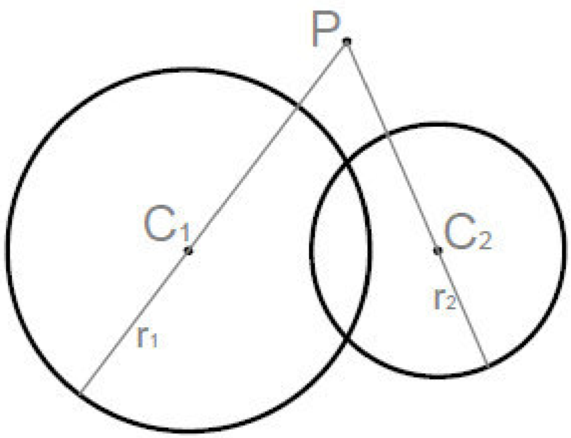
Tale valore è positivo se P è esterno alla circonferenza e negativo se è interno.



[30] Ricordiamo l'enunciato del **Teorema delle secanti**: se da un punto esterno ad una circonferenza si tracciano due secanti, l'intera secante e la sua parte esterna formano i medi, l'altra intera secante a la sua parte esterna formano gli estremi di una proporzione. *PD : PB = PA : PC* *da cui* $PC \cdot PD = PA \cdot PB$

18.2 APPLICAZIONI DEL CONCETTO DI POTENZA DI UN PUNTO RISPETTO AD UNA CIRCONFERENZA

- **L'asse radicale di un fascio di circonferenze è il luogo dei punti che hanno la stessa potenza rispetto a tutte le circonferenze del fascio.**



Condideriamo due circonferenze γ_1 e γ_2 non concentriche con centri rispettivamente in C1 e C2 e cerchiamo di determinare il luogo dei punti che hanno la stessa potenza rispetto ad entrambe.

Utilizzando le relazioni della geometria analitica, possiamo scrivere le equazioni delle due circonferenze, le coordinate dei loro centri e l'espressione dei loro raggi:

$$\gamma_1 : \quad x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$\gamma_2 : \quad x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

$$C_1\left(-\frac{a_1}{2}; -\frac{b_1}{2}\right) \qquad r_1 = \sqrt{\frac{a_1^2}{4} + \frac{b_1^2}{4} - c_1}$$

$$C_2\left(-\frac{a_2}{2}; -\frac{b_2}{2}\right) \qquad r_2 = \sqrt{\frac{a_2^2}{4} + \frac{b_2^2}{4} - c_2}$$

Essendo le due circonferenze non concentriche, sappiamo che almeno una delle coordinate dei centri è diversa.

Prendiamo ora il punto $P(x,y)$, ne calcoliamo la potenza rispetto a ciascuna delle due circonferenze ed imponiamo che i due risultati siano uguali.

$PC_1^2 - r_1^2 = PC_2^2 - r_2^2$ da cui, sostituendo, otteniamo[32]

$$\left(x + \frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b_1}{2}\right)^2 - \frac{a_1^2}{4} - \frac{b_1^2}{4} + c_1 = \left(x + \frac{a_2}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b_2}{2}\right)^2 - \frac{a_2^2}{4} - \frac{b_2^2}{4} + c_2$$

Svolgiamo tutti i calcoli

$$x^2 + \frac{a_1^2}{4} + a_1x + y^2 + \frac{b_1^2}{4} + b_1y - \frac{a_1^2}{4} - \frac{b_1^2}{4} + c_1 = x^2 + \frac{a_2^2}{4} + a_2x + y^2 + \frac{b_2^2}{4} + b_2y - \frac{a_2^2}{4} - \frac{b_2^2}{4} + c_2$$

e dopo semplici operazioni otteniamo

---

[31] Ricordiamo l'enunciato del **Teorema delle corde**: se in un cerchio due corde si intersecano fra loro, le parti di una delle due secanti formano i medi e le parti dell'altra secante formano gli estremi di una proporzione.
PA : PC = PD : PB *da cui* $PC \cdot PD = PA \cdot PB$

[32] Ricordiamo la formula per calcolare la distanza tra due punti, note le coordinate dei punti
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

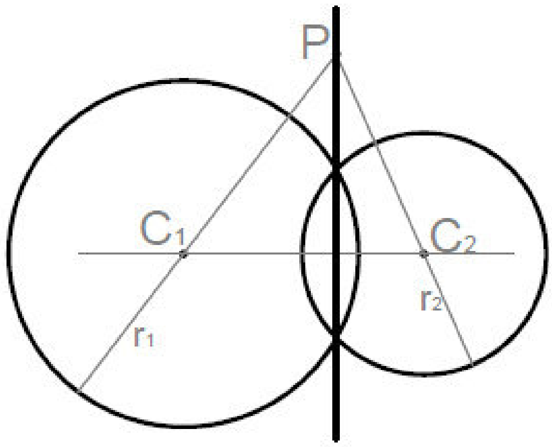
$a_1x + b_1y + c_1 = a_2x + b_2y + c_2$ cioè

$$\left(a_1 - a_2\right)x + \left(b_1 - b_2\right)y + c_1 - c_2 = 0$$

che rappresenta l'equazione di una retta avente coefficiente angolare $-\dfrac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2}$.

Consideriamo ora la retta passante per i centri delle circonferenze e ne calcoliamo il coefficiente angolare *m*[33].

$$m = \frac{-\frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}}{-\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2}} = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}$$



Dal confronto dei due coefficienti angolari appena calcolati concludiamo che, essendo uno l'antireciproco dell'altro, **la retta passante per P è perdendicolare alla retta passante per i due centri**.

Sappiamo che questa retta, passante per P, è l'**asse radicale** del fascio di circonferenze.
Infatti l'asse radicale è la retta la cui equazione si ottiene dalla sottrazione membro a membro delle due equazioni delle circonferenze generatrici (o di qualunque due circonferenze distinte del fascio)[34].
L'asse radicale risulta sempre perpendicolare all'asse centrale (retta che unisce i centri) e passa per i punti base, nel caso essi siano presenti.

[33] Ricordiamo la formula per calcolare il coefficiente angolare di una retta passante per due punti assegnati

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

[34] E' facile verificarlo sottraendo membro a membro le equazioni delle due circonferenze γ_1 e γ_2 assegnate.