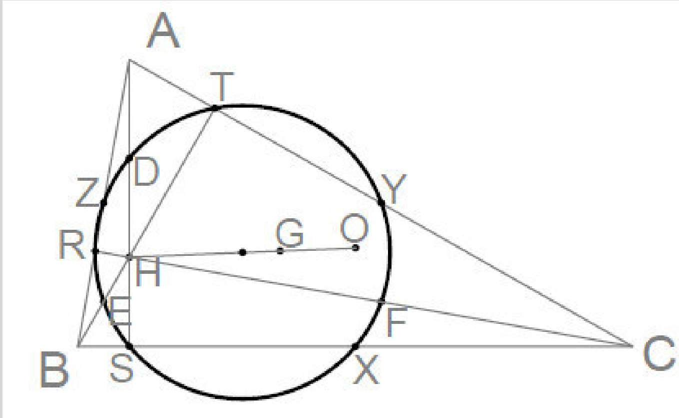
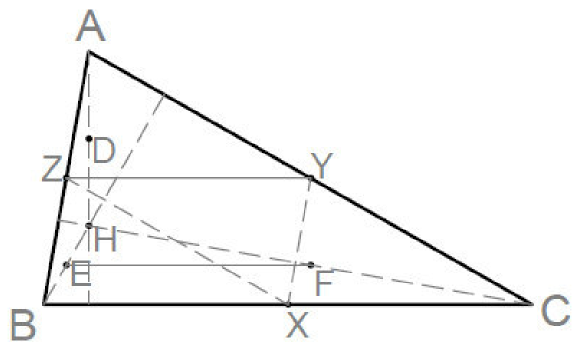
17 LA CIRCONFERENZA DEI NOVE PUNTI (circonferenza di Feuerbach)

In un triangolo acutangolo, i punti medi dei lati, i piedi delle altezze e i punti medi dei segmenti che uniscono i vertici del triangolo con l'ortocentro, appartengono tutti ad una stessa circonferenza, detta "**circonferenza dei nove punti**", il cui centro e' il punto medio del segmento che unisce l'ortocentro e il circocentro del triangolo.



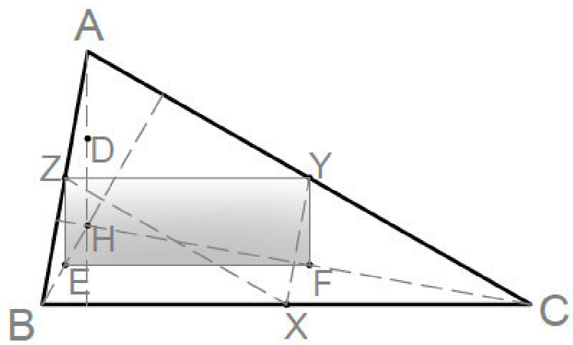
17.1 COSTRUZIONE DELLA CIRCONFERENZA DEI NOVE PUNTI

Ricordando che in un triangolo i punti medi dei segmenti che collegano i vertici all'ortocentro sono detti **punti di Eulero**, consideriamo tali punti (E-D-F) sui segmenti che collegano i vertici del triangolo ABC al suo ortocentro H e consideriamo il triangolo mediale XYZ.

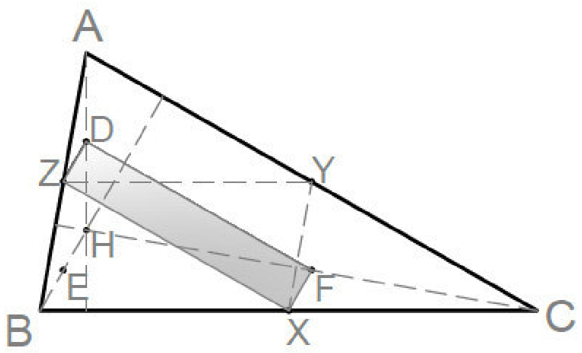


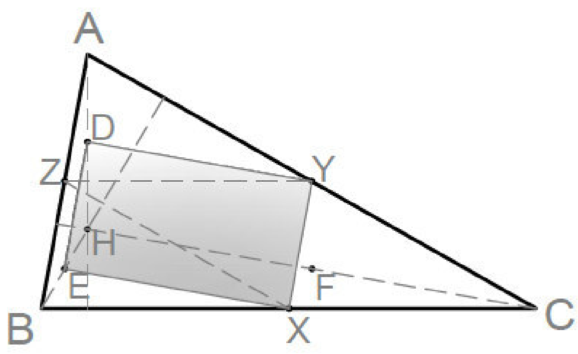
Il segmento ZY, lato del triangolo mediale XYZ, è parallelo al lato BC ed ha lunghezza pari alla sua metà.
Anche il segmento EF, congiungente i punti medi di due lati del triangolo BHC, è parallelo al lato BC ed ha lunghezza pari alla sua metà.Quindi i segmenti ZY ed EF sono congruenti e paralleli.

Notiamo ora che il segmento FY collega i punti medi di due lati del triangolo ACH e pertanto è parallelo al terzo lato AH e uguale alla sua metà.
Anche il segmento EZ, congiungente i punti medi di due lati del triangolo ABH, è parallelo al lato AH e uguale alla sua metà.
Quindi i segmenti FY ed EZ sono congruenti e paralleli.



Inoltre i segmenti FY ed EZ risultano perpendicolari ai segmenti ZY ed EF, in quanto rispettivamente paralleli ad AH e BC. Pertanto il quadrilatero **EFYZ è un parallelogramma ed in particolare è un rettangolo**.
Con analoghe considerazioni possiamo facilmente dimostrare che anche i quadrilateri ZDFX (triangoli riferiti al lato AC) e DEXY (triangoli riferiti al lato AB) sono rettangoli.

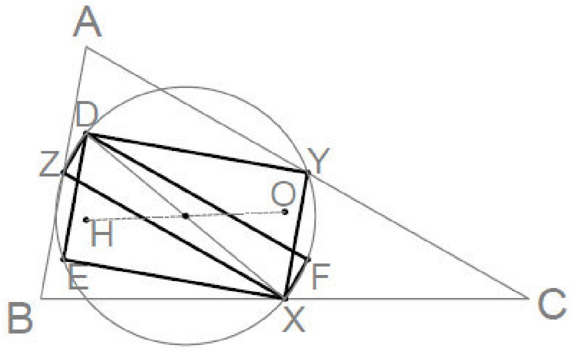




Si può notare che questi tre rettangoli hanno, a due a due, le diagonali in comune e di conseguenza tali diagonali sono tutte congruenti tra loro.

Inoltre i rettangoli, in quanti ciclici, sono tutti inscrivibili in una circonferenza che necessariamente avrà le diagonali del rettangolo come diametri.

Quindi le diagonali dei tre rettangoli, in quanto congruenti, sono diametri della stessa circonferenza e si incontrano nello stesso punto, che sarà il centro di tale circonferenza.

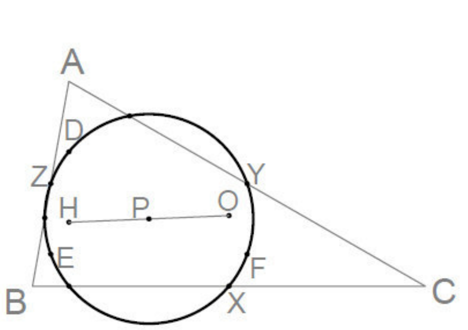


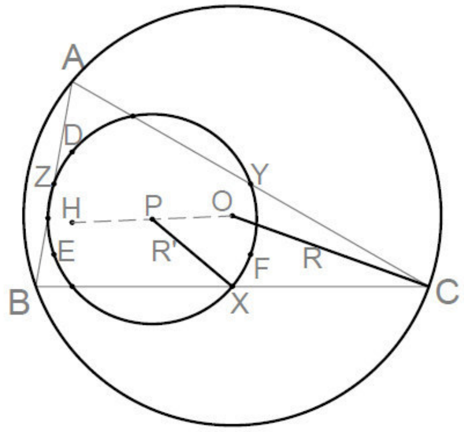
La circonferenza dei nove punti è dunque tracciata e passa per i tre vertici del triangolo mediale (punti medi dei lati dei triangolo ABC), i piedi delle tre altezze del triangolo ABC[23], i tre punti di Eulero.

[23] Con riferimento alla figura iniziale, considerando ad esempio il piede S dell'altezza AS, notiamo che il lato DX del triangolo rettangolo DXS è un diametro della circonferenza e quindi il terzo vertice S dovrà necessariamente appartenere alla stessa circonferenza.

17.2 PROPRIETA' DELLA CIRCONFERENZA DEI NOVE PUNTI [24]

- **Il centro della circonferenza dei nove punti è il punto medio del segmento HO (che congiunge ortocentro e circocentro del triangolo ABC).**
- **Il raggio R' della circonferenza dei nove punti è la metà del raggio R della circonferenza circoscritta al triangolo ABC.**

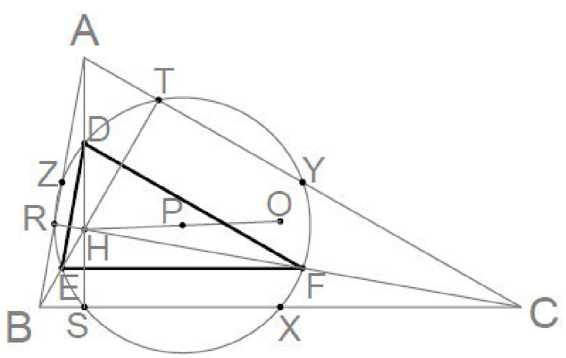


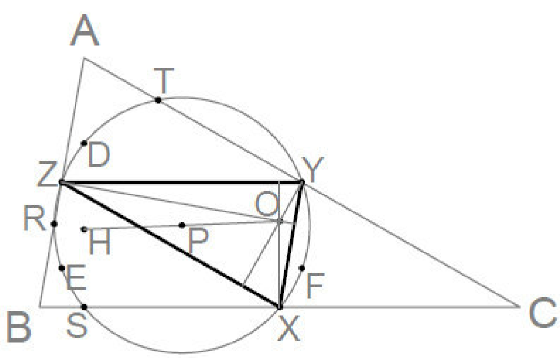


DIMOSTRAZIONE

IPOTESI	XYZ triangolo mediale interno ad ABC DEF triangolo che collega i punti di Eulero	**TESI**	P è il punto medio di HO R = 2R'

L'ortocentro H del triangolo DEF che collega i punti di Eulero coincide con l'ortocentro del triangolo ABC.
L'ortocentro O del triangolo mediale XYZ coincide con il circocentro del triangolo ABC.





[24] Per altre proprietà della circonferenza dei nove punti si segnala http://www.esuppa.it/Articoli/Suppa_Il%20cerchio%20dei%20nove%20punti%20in%20problemi%20sui%20luoghi.pdf

Per quanto esposto in precedenza i due triangoli, entrambi inscritti nella circonferenza dei nove punti, sono congruenti ed hanno i lati ordinatamente paralleli. Pertanto i loro ortocentri si corrispondono in una simmetria centrale rispetto al punto medio del segmento che li collega.Tale segmento appartiene però ad un diametro della circonferenza dei nove punti, essendo esso stesso parte di una delle diagonali dei rettangoli inscritti visti in precedenza, quindi il suo punto medio coincide con il centro della circonferenza.

Dette a, b, c le lunghezze dei lati del triangolo ABC (rispettivamente opposti ai vertici A, B, C) e x, y, z le lunghezze dei lati del triangolo mediale (rispettivamente opposti ai vertici X, Y, Z), scriviamo la relazione che lega le lunghezze dei lati di un triangolo al raggio della circonferenza circoscritta.

$$\boxed{R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4A}}$$ con R raggio della circonferenza circoscritta ad ABC

$$R' = \frac{x \cdot y \cdot z}{4A'}$$ con R' raggio della circonferenza circoscritta a XYZ

Essendo i lati del triangolo mediale di lunghezza pari alla metà di quelli del triangolo ABC ed essendo di conseguenza la misura dell'area del triangolo mediale pari a un quarto di quella del triangolo ABC, possiamo riscrivere la seconda relazione come

$$R' = \frac{\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \left(\frac{b}{2}\right) \cdot \left(\frac{c}{2}\right)}{4\left(\frac{A}{4}\right)}$$ da cui $$\boxed{R' = \frac{a \cdot b \cdot c}{8A}}$$ pari alla metà di R.

17.3 NOTE STORICO-BIOGRAFICHE[25]

La questione della scoperta del cerchio dei nove punti appare alquanto controversa.
Rouché e de Camberousse nel loro famoso Traité de Géometrie (1891) fanno risalire la scoperta ad **Eulero** nel 1765, quando dimostrò che il triangolo mediale e il triangolo ortico sono inscritti nello stesso cerchio.
Nel 1821 i nove punti sono esplicitamente menzionati in un articolo di **Brianchon e Poncelet** pubblicato negli Annales de Mathematiques di Gergonne, dimostrando che questo cerchio passa per altri tre punti notevoli del triangolo e precisamente per i punti medi dei segmenti che uniscono l'ortocentro H con i vertici (detti punti di Eulero). Il cerchio dei nove punti è anche chiamato cerchio di **Feuerbach**, in onore dello studente tedesco che ne studiò approfonditamente le proprietà e che, nel 1822, dimostrò uno dei più famosi teoremi di tutta la geometria del triangolo, noto come **teorema di Feuerbach**[26].
Nel 1842 il cerchio è ufficialmente chiamato cerchio dei nove punti da Terquem, uno degli editori della rivista Nouvelles Annales.

Jean-Victor Poncelet[27] (Metz, 1 luglio 1788 - Parigi, 22 dicembre 1867) fu allievo di Monge all'École Polytechnique, prima di entrare al collegio di ingegneria militare. Nel 1812 partecipò, come ufficiale del genio,

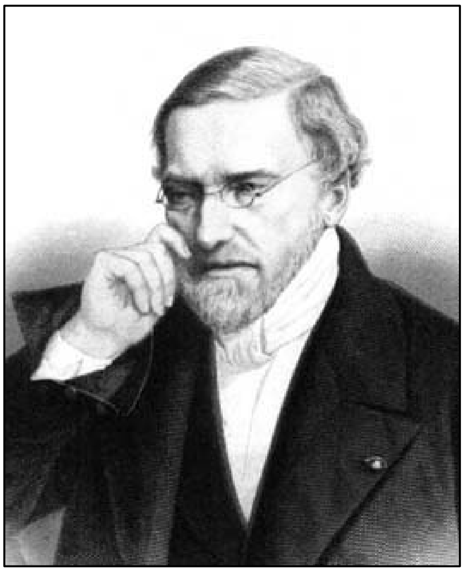
---

25 - prof. Ercole Suppa (http://www.esuppa.it/Articoli/Suppa_Il%20cerchio%20dei%20nove%20punti%20in%20problemi%20sui%20luoghi.pdfhttp://www.esuppa.it/Articoli/Suppa_Il%20cerchio%20dei%20nove%20punti%20in%20problemi%20sui%20luoghi.pdf)
- Wikipedia (https://it.wikipedia.org/wiki/Cerchio_di_Feuerbach)
- Unife (http://dm.unife.it/matematicainsieme/dopoeu/brianc.htm)

26 **Teorema di Feuerbach**. Il cerchio dei nove punti di un triangolo *ABC* è tangente all'incerchio ed a ciascuno dei tre excerchi.

27 - Wikipedia (https://it.wikipedia.org/wiki/Jean_Victor_Poncelet)

alla campagna di Russia con Napoleone e venne catturato durante la battaglia di Krasnoi. Fu imprigionato a Saratov e nei due anni di detenzione intraprese le ricerche sulla geometria proiettiva delle coniche. Nel 1814 fu rimpatriato e, nel 1822, pubblicò il primo volume del fondamentale *Traité des propriétés projectives des figures* (Trattato delle proprietà proiettive delle figure; il secondo volume fu pubblicato nel 1866), considerato l'atto di nascita della geometria proiettiva. L'introduzione delle nozioni di polo e di polare rispetto a una conica e del metodo delle polari reciproche, primo esempio di una trasformazione in cui a un punto corrisponde una retta, e ai punti di tale retta corrispondono tutte le rette passanti per il punto dato, lo portarono alla formulazione del *principio di dualità.* Noto ai suoi tempi soprattutto come cultore di meccanica sperimentale e applicata, fu professore di meccanica all'École d'application (1825-35) e successivamente alla Sorbona.



Jean-Victor Poncelet

Charles Julien Brianchon[28] (Sevres, 19 dicembre 1783 - Versailles, 29 aprile 1864) fu allievo di Monge all'École Polytechnique e, pur potendo continuare la carriera accademica, abbandonò gli studi per arruolarsi nell'esercito di Napoleone, dove divenne ben presto tenente di artiglieria e combatté valorosamente nelle campagne militari in Portogallo ed in Spagna. Nel 1813 fu costretto a lasciare l'esercito a causa di gravi problemi di salute. Cercò allora un posto nell'insegnamento, ma dovette aspettare fino al 1818 per avere la cattedra alla Scuola di Artiglieria delle Guardie Reali a Vincennes. Durante questi anni di disoccupazione scrisse diversi lavori di geometria proiettiva; in particolare tra il 1816 e il 1818 pubblicò parecchi articoli relativi allo studio delle coniche. Uno di questi articoli, scritto con Jean Victor Poncelet, "Recherches sur la dètermination d'une hyperbole èquilatère, au moyen de quatres condition onnèe" (1820), contiene una dimostrazione del teorema del cerchio dei nove punti. Certamente non furono i primi a scoprire questo teorema, ma ne diedero una dimostrazione e per la prima volta fu utilizzato il nome tuttora in uso.

Karl Wilhelm Feuerbach[29] (Jena, 30 maggio 1800 - Erlangen, 12 marzo 1834), ottavo di undici figli e fratello del filosofo Ludwig, non seguì le orme del padre nel campo dello giurisprudenza, ma si dedicò allo studio delle scienze. Il suo percorso scolastico fu tuttavia piuttosto travagliato a causa dei continui spostamenti della famiglia e, una volta in Baviera, ebbe problemi di discriminazione religiosa, visto che era protestante in una regione cattolica.
Dopo diversi problemi legati alle sue frequentazioni politiche che lo portarono anche in carcere, condusse con passione le proprie ricerche matematiche e divenne professore al Gymnasium di Erlangen. La sua attività professionale tuttavia fu molto breve e travagliata anche a causa della sua instabilità mentale che lo portò ad interrompere più volte la propria carriera.
Morì prima di compiere 34 anni ad Erlangen, dove aveva fortemente voluto tornare a vivere e dove spese gli utlimi anni praticamente recluso in casa. Il suo nome è legato alla scoperta del cerchio dei nove punti di un triangolo (1822), che si inserisce nelle sue ricerche sui triangoli (punti notevoli di un triangolo) e sulle piramidi a base triangolare. Il risultato è anche riportato in letteratura come *teorema di Feuerbach*.

Karl Wilhelm Feuerbach

- Mac Tutor (http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Poncelet.html)
- Enciclopedia Treccani (http://www.treccani.it/enciclopedia/poncelet_(Enciclopedia-della-Matematica)/)

28 - Wikipedia (https://it.wikipedia.org/wiki/Charles_Julien_Brianchon)
- Mac Tutor (http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Brianchon.html)
- Enciclopedia Treccani (http://www.treccani.it/enciclopedia/brianchon_(Enciclopedia-della-Matematica)/)

29 - Wikipedia (https://it.wikipedia.org/wiki/Karl_Feuerbach)
- Mac Tutor (http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Feuerbach.html)
- Enciclopedia Treccani (http://www.treccani.it/enciclopedia/feuerbach_(Enciclopedia-della-Matematica)/)