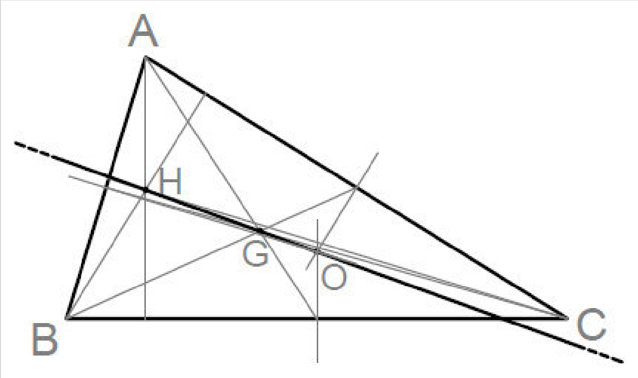
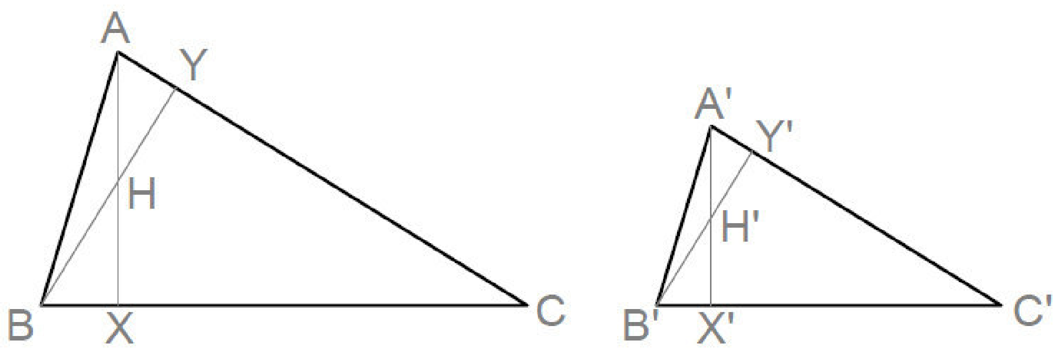
16 LA RETTA DI EULERO (teorema di Eulero sui triangoli)

In un triangolo, **ortocentro H baricentro G e circocentro O sono allineati**, con ortocentro e circocentro da parti opposte rispetto al baricentro e distanziati in modo che la loro distanza dal baricentro rispetti la relazione **HG = 2 OG**.
La retta che li collega è detta "**retta di Eulero**".



16.1 PREMESSA

- **Dati due triangoli simili ABC e A'B'C', le rispettive distanze tra i vertici e gli ortocentri AH e A'H' stanno fra loro secondo lo stesso rapporto di proporzionalità dei lati**

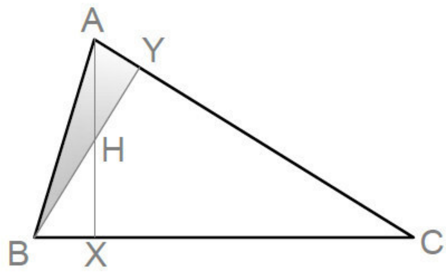


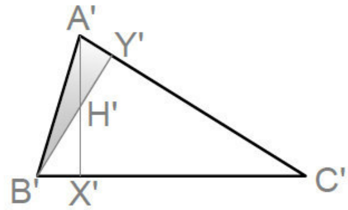
DIMOSTRAZIONE

IPOTESI	I triangoli ABC e A'B'C' sono simili	**TESI**	$\frac{AH}{A'H'} = \frac{AB}{A'B'}$

Consideriamo i triangoli ABY e A'B'Y'.

Essendo simili (angoli A≅A' e Y≅Y') hanno gli angoli ordinatamente congruenti, quindi l'angolo in B del primo triangolo è congruente all'angolo in B' del secondo.





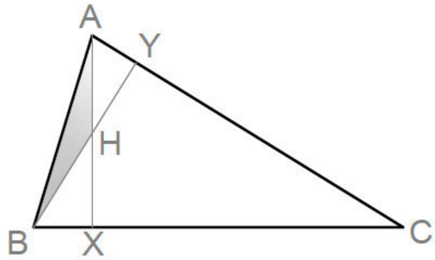
Consideriamo i triangoli ABX e A'B'X'.

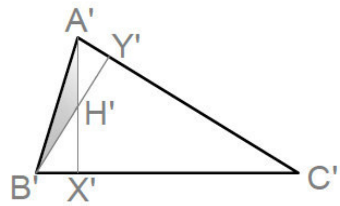
Essendo simili (angoli B≅B' e X≅X') hanno gli angoli ordinatamente congruenti, quindi l'angolo in A del primo triangolo è congruente all'angolo in A' del secondo.

Consideriamo infine i triangoli ABH e A'B'H'.
Avendo gli angoli in A e B rispettivamente congruenti agli angoli in A' e B', sono simili.
Di conseguenza i loro lati sono in proporzione.

Possiamo pertanto scrivere la relazione $\frac{AH}{A'H'} = \frac{AB}{A'B'}$

che dimostra la tesi.

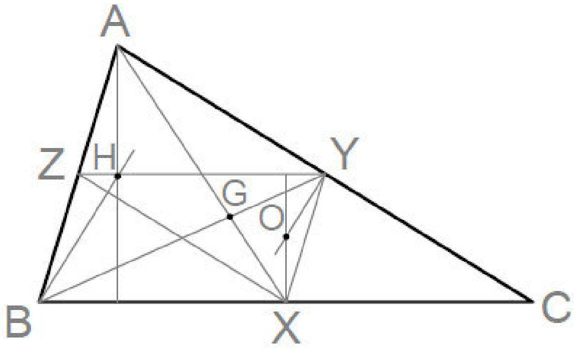




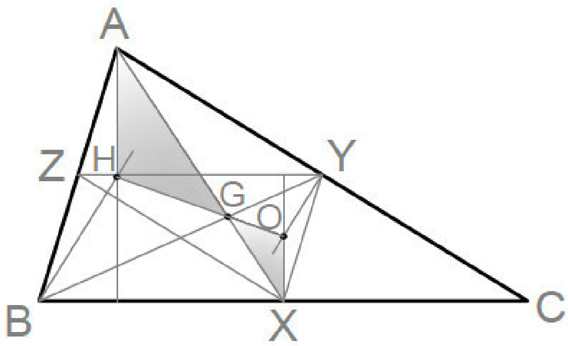
16.2 DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA

IPOTESI	H ortocentro del triangolo ABC G baricentro del triangolo ABC O circocentro del triangolo ABC	**TESI**	H, G, O sono allineati HG = 2 OG

Osserviamo il triangolo mediale XYZ.
Le sue altezze sono perpendicolari anche ai lati del triangolo ABC e coincidono con i suoi assi, visto che partono dai punti medi degli stessi lati.
Pertanto l'ortocentro O del triangolo mediale coincide con il circocentro del triangolo ABC.
Indichiamo sulla figura il baricentro G, che i due triangoli condividono, e i due ortocentri, H per il triangolo ABC e O per il triangolo mediale XYZ.



Consideriamo i triangoli AHG e XGO.



Per quanto dimostrato in precedenza i segmenti AH (relativo ad ABC) e XO (relativo a XYZ) sono in proporzione come i lati dei rispettivi triangoli, quindi è

valida la relazione $\dfrac{AH}{XO} = 2$

Lo stesso rapporto di proporzionalità vale anche tra i segmenti che collegano i vertici e il baricentro, quindi è

valida anche la relazione $\dfrac{AG}{XG} = 2$

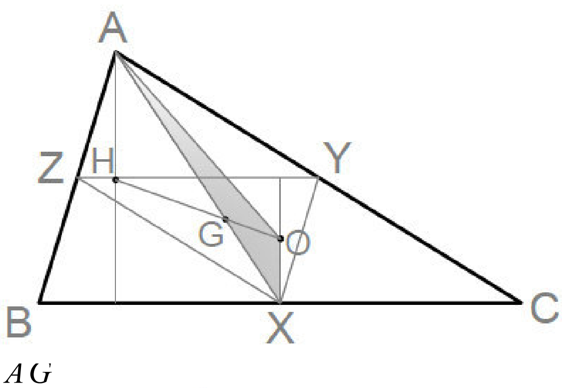
Inoltre gli angoli HAG e OXG sono congruenti perchè alterni interni formati dalle rette parallele AH e XO tagliate dalla trasversale AX.

Quindi i triangoli AHG e XGO sono simili per il secondo criterio di similitudine dei triangoli e di conseguenza anche gli angoli AGH e OGX sono congruenti; pertanto $A\hat{G}H + A\hat{G}O = O\hat{G}X + A\hat{G}O = 180°$

ed è quindi dimostrato che i punti H, G, O sono allineati.

Per le stesse proprietà della similitudine anche i lati dei due triangoli saranno in proporzione e quindi è dimostrato anche che HG = 2 OG.

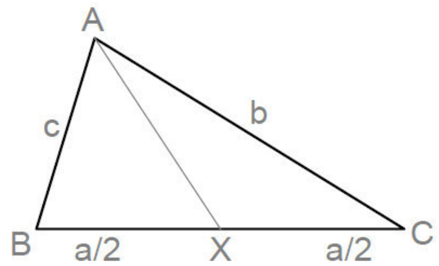
16.3 CALCOLO DELLA DISTANZA TRA ORTOCENTRO E CIRCOCENTRO DI UN TRIANGOLO



Per calcolare la lunghezza del segmento HO è sufficiente calcolare la lunghezza del segmento OG e sfruttare poi la relazione che lo lega al segmento HG.

Applichiamo dunque il teorema di Stewart al triangolo AOX, considerando la ceviana OG, e scriviamo la relazione

$$AX\left(OG^2 + AG \cdot GX\right) = AO^2 \cdot GX + OX^2 \cdot AG$$



da cui, essendo AX = 3GX ed essendo AG = 2GX,

$$3GX\left(OG^2 + 2GX^2\right) = AO^2 \cdot GX + 2OX^2 \cdot GX$$

che equivale, dopo aver semplificato il termine GX, alla relazione

$$3OG^2 + 6GX^2 = AO^2 + 2OX^2 \qquad *$$

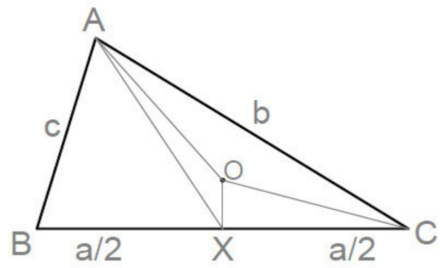
Applichiamo ora il teorema della mediana al triangolo ABC, considerando la mediana AX,

$$AX^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

da cui, essendo GX = AX/3,

$$GX^2 = \frac{AX^2}{9} = \frac{b^2 + c^2}{18} - \frac{a^2}{36} \qquad \text{cioè} \qquad 6GX^2 = \frac{b^2 + c^2}{3} - \frac{a^2}{6}$$

Essendo, come già visto, il punto O il circocentro del triangolo ABC, è evidente che i segmenti AO e OC hanno lunghezza pari al raggio R della circonferenza circoscritta ad ABC.
Quindi il segmento OX può essere espresso in funzione dei lati del triangolo rettangolo OXC, applicando il teorema di Pitagora



$$OX^2 = R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Sostituendo nella relazione *, otteniamo

$$3OG^2 + \frac{b^2 + c^2}{3} - \frac{a^2}{6} = R^2 + 2R^2 - \frac{a^2}{2}$$

da cui, sommando i termini simili,

$$3OG^2 = 3R^2 - \frac{b^2 + c^2}{3} - \frac{a^2}{3} \qquad \text{e di seguito} \qquad 3OG^2 = 3R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

Essendo HO = 3OG, è facile ricavare la relazione

$$HO^2 = 9OG^2 = 9R^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

che rappresenta la misura della distanza tra ortocentro e circocentro in un triangolo.

16.4 NOTE STORICO-BIOGRAFICHE[21]

Leonhard Euler

Leonhard Euler è nato a Basilea il 15 aprile 1707.
Visse tra San Pietroburgo, alla corte di Caterina la Grande, e Berlino, al servizio di Federico il Grande.
"Figura chiave della matematica del Settecento, il più grande fisico teorico del secolo, l'uomo che dovrebbe essere accostato ad Archimede, Newton e Gauss" - scrive di lui lo storico della matematica Morris Kline.
Per il divertimento e l'istruzione di figli e nipoti proponeva problemi e realizzava piccoli esperimenti di fisica che dimostravano anche la sua grande capacità divulgativa.

Entrò all'Università di Basilea nel 1720, all'età di 14 anni, ed ebbe la fortuna di conoscere il celebre matematico Johann Bernoulli che lo aiutò nei suoi studi.
A vent'anni, si trasferì a San Pietroburgo e non ritornò mai più in Svizzera. Fu prima matematico al servizio della Grande Caterina, imperatrice di Russia e poi per venticinque anni alla corte berlinese di Federico il Grande, dove gli succederà il matematico torinese Lagrange.
Ottenuta una sistemazione anche economicamente decorosa, decise di sposarsi con Katharina Gsell, figlia di un pittore svizzero, in quel periodo direttore dell'Accademia di pittura di San Pietroburgo, dalla quale ebbe tredici figli, dei quali però soltanto cinque sopravvissero all'infanzia. Eulero confessò di aver fatto le sue più importanti scoperte matematiche mentre aveva un bambino tra le braccia, e altri marmocchi che ruzzolavano ai suoi piedi. Poco salottiero e tutt'altro che brillante, non piaceva molto a Federico il Grande, che lo soprannominò il "mio ciclope matematico". Eulero infatti aveva perso l'occhio destro a trent'anni, sembra per l'impegno eccessivo nel suo lavoro.

Nel 1766 venne nominato direttore dell'Accademia a Pietroburgo, e qui, dopo breve tempo, una cataratta all'occhio ancora sano lo portò alla cecità completa, ma questo non fermò il suo lavoro che continuò con l'aiuto dei figli. La sua memoria era eccezionale e gli consentiva di avere ben presenti le pagine che andava dettando: ricordava a memoria tutte le più importanti formule matematiche, i quadrati, i cubi e le potenze quarte, quinte e seste dei primi cento numeri, oltre a centinaia di poesie e all'intera Eneide.
Il 7 settembre 1783 iniziò la sua giornata come al solito, con una lezione di matematica a uno dei suoi tanti nipoti, e proseguì discutendo con alcuni amici le novità del giorno, gli esperimenti dei fratelli Montgolfier e la scoperta di Urano. Alle cinque del pomeriggio, colpito da emorragia cerebrale, ebbe appena il tempo di mormorare "sto morendo" prima di perdere coscienza. Poche ore dopo, come disse il marchese di Condorcet nell'orazione funebre, "cessò di calcolare e di vivere".

Il grande merito di Eulero è stato quello di aver saputo sistemare e collegare campi ai suoi tempi separati della matematica, utilizzando in modo geniale le risorse della geometria, dell'algebra e dell'analisi.
E' stato probabilmente il matematico più prolifico: la sua opera omnia comprende 74 volumi, dedicati non solo alla matematica, ma anche alla meccanica, all'astronomia e ancora all'ottica, all'acustica, alla termologia, all'elettricità e al magnetismo.
Per cinquant'anni, dopo la sua morte, l'Accademia di Pietroburgo continuò a pubblicare suoi lavori inediti. Alcune delle sue opere rimangono fondamentali, come la Meccanica, la prima opera nella quale venga sistematicamente applicata l'analisi alla meccanica e l'Introductio in analysin infinitorum, l'opera con la quale, possiamo dire, inizia l'analisi matematica come studio, secondo Eulero, delle funzioni.

Fra i tanti meriti di Eulero, ricordiamo almeno l'introduzione di simboli usati oggi da tutti gli studenti quali π, "i"

[21] Larga parte della biografia di Eulero è tratta dall'ottimo articolo del prof. Federico Peiretti del Politecnico di Torino, che si trova in forma integrale al link https://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/Interventi/Articoli/EuleroAnniversario/EuleroAnniversario.htm

per indicare $\sqrt{-1}$, "e" come base dei logaritmi naturali, *f(x)* per la funzione di *x*, il simbolo Σ per indicare una sommatoria.

Sua è anche la formula che si trova su tutti i libri di geometria, valida per i poliedri semplici, cioè privi di buchi, nota come formula di Eulero per i poliedri:

$$V - E + F = 2$$

dove V, E ed F indicano rispettivamente il numero dei vertici, degli spigoli e delle facce del poliedro.

E' nota come formula di Eulero anche la seguente formula che stabilisce una stretta relazione tra funzioni gonometriche e funzione esponenziale: $e^{i\pi} = \cos x + i \sin x$

Un suo caso particolare, con $x = \pi$, nota come **identità di Eulero**, una delle più belle formule della matematica.

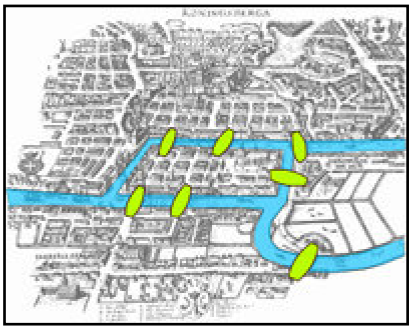
$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

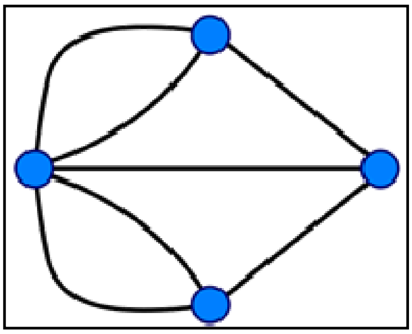
Eulero sapeva giocare con i numeri ed è proprio nella teoria dei numeri che ottenne risultati straordinari, tanto numerosi che è impossibile per noi ricordarli tutti.

Uno dei risultati più brillanti nello studio delle serie infinite, è il calcolo dei reciproci dei quadrati dei numeri interi, un problema che molti matematici avevano tentato invano di risolvere:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$

Lo affascinavano i numeri primi e la loro misteriosa ripartizione nell'insieme dei numeri naturali: "Un mistero - diceva - nel quale lo spirito umano non saprà mai penetrare".





Un problema, indicativo del modo di lavorare del grande matematico, riguarda la città di Könisberg, celebre per aver dato i natali a Kant.
La città, attraversata dal fiume Pregel, aveva sette ponti che collegavano fra loro i vari quartieri. Erano in molti a chiedersi se fosse possibile attraversare tutti e sette i ponti ritornando alla fine al punto di partenza, dopo essere passati una volta sola su ogni ponte. Il problema, al tempo di Kant, aveva attirato l'attenzione dei più celebri matematici, i quali avevano tentato invano di trovare una soluzione.
Anche Eulero non riuscì a risolvere il problema, ma dimostrò che era impossibile, cioè che non esisteva una soluzione. Per prima cosa egli tracciò un grafico della situazione: trasformò le quattro parti della città, collegate dai ponti, in punti e i sette ponti in linee di collegamento fra questi. Eulero costruì in tal modo quello che oggi si chiama un grafo, con nodi, i punti e gli archi, cioè le linee, e allargò poi la sua indagine ai problemi di percorso, in generale.
Egli stabilì che un grafo composto soltanto da nodi pari, collegato cioè a un numero pari di archi, è sempre percorribile e che si può ritornare al punto di partenza, senza sovrapposizioni di percorso. Se un grafo contiene nodi pari e soltanto due nodi dispari è ancora percorribile, ma non si può più ritornare al punto di partenza.
Se contiene invece più di due nodi dispari, non è percorribile, senza sovrapposizioni di percorso. La passeggiata sui ponti di Könisberg è di quest'ultimo tipo, porta a un grafo composto da quattro nodi dispari, e quindi non ha soluzione.
Quello che sembrava un piccolo rompicapo senza importanza, nelle mani di Eulero diventò un grande problema matematico, punto di partenza della teoria dei grafi e di una nuova scienza, la topologia, destinata a grandi sviluppi un secolo più tardi.[22]

[22] Sono numerosissime le biografie di Eulero Tra le tante fonti presenti online segnaliamo:
- Wikipedia (https://it.wikipedia.org/wiki/Eulero)
- https://www.matematicamente.it/cultura/storia-della-matematica/eulero-mozart-della-matematica/
- Università Bocconi (http://matematica.unibocconi.it/articoli/eulero-genio-pensatore-maestro)
- MacTutor (http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Euler.html)