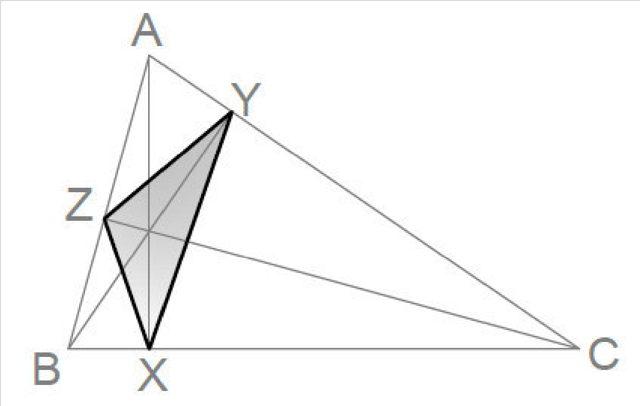
14 IL TRIANGOLO ORTICO

Dato un triangolo acutangolo ABC, il triangolo interno ad ABC che ha come vertici i piedi delle tre altezze si definisce **triangolo ortico**.



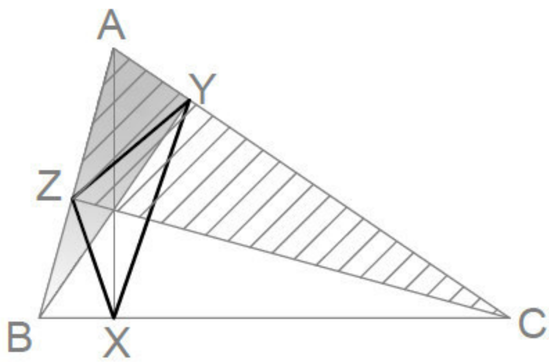
14.1 PROPRIETA' DEL TRIANGOLO ORTICO

- **Le altezze del triangolo acutangolo assegnato sono le bisettrici del triangolo ortico. Di conseguenza l'ortocentro del triangolo assegnato coincide con l'incentro del triangolo ortico.**

DIMOSTRAZIONE

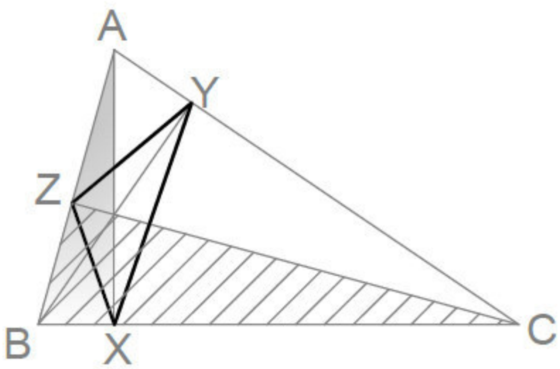
IPOTESI	ZXY triangolo ortico interno ad ABC	**TESI**	Le altezze di ABC sono le bisettrici di ZXY.

Consideriamo i triangoli rettangoli ABY e ACZ che, avendo l'angolo in A in comune, sono simili.
Pertanto possiamo impostare la proporzione $\frac{BY}{CZ} = \frac{AY}{AZ}$. Inoltre, ricordando che BY e CZ sono altezze dello stesso triangolo ABC, possiamo impostare la proporzione che lega le altezze alle basi, cioè $\frac{BY}{AB} = \frac{CZ}{AC}$, da cui $\frac{BY}{CZ} = \frac{AB}{AC}$.



Di conseguenza possiamo scrivere la proporzione $\frac{AY}{AZ} = \frac{AB}{AC}$, grazie alla quale affermiamo che **i triangoli AZY e ABC**, avendo anche l'angolo in A in comune, **sono simili**.

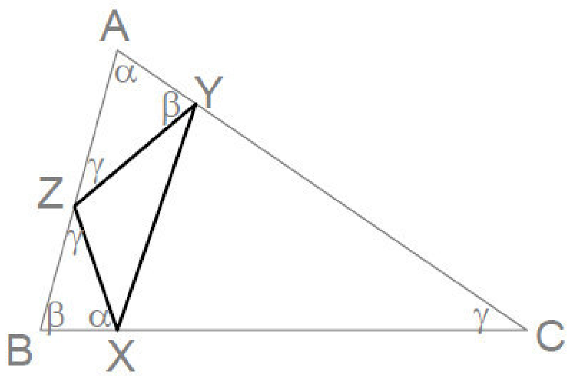
Analogamente consideriamo i triangoli rettangoli ABX e BCZ che, avendo l'angolo in B in comune, sono simili. Pertanto possiamo impostare la proporzione $\frac{AX}{CZ} = \frac{BX}{BZ}$. Inoltre, ricordando che AX e CZ sono altezze dello stesso triangolo ABC, possiamo impostare la proporzione che lega le altezze alle basi, cioè $\frac{AX}{AB} = \frac{CZ}{BC}$, da cui $\frac{AX}{CZ} = \frac{AB}{BC}$.



Di conseguenza possiamo scrivere la proporzione $\frac{BX}{BZ} = \frac{AB}{BC}$, grazie alla quale affermiamo che **i triangoli BZX e ABC**, avendo anche l'angolo in B in comune, **sono simili**.

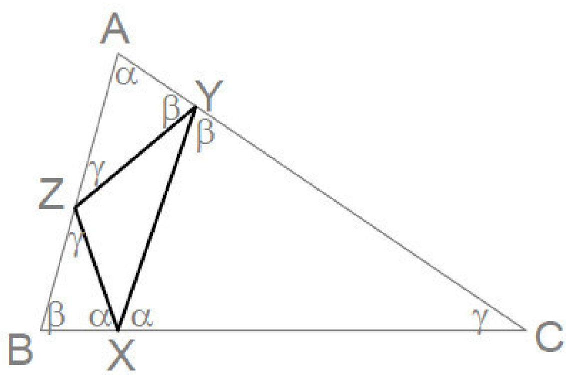
In virtù di queste proporzionalità possiamo determinare la misura degli angoli interni dei triangoli AZY e BZX, ordinatamente congruenti agli angoli interni del triangolo ABC.

Dette α, β, γ le ampiezze degli angoli rispettivamente in A, in B e in C, avremo le misure degli angoli interni riportate nella figura a fianco.



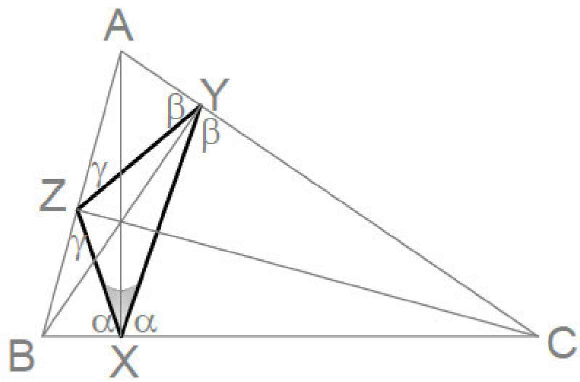
Con considerazioni del tutto analoghe si dimostra che anche il triangolo CXY è simile al triangolo ABC e quindi i suoi angoli sono ordinatamente congruenti a quelli del triangolo di partenza.

Pertanto le misure degli angoli interni sono come riportato nella figura a fianco.



A questo punto è immediato osservare che gli angoli retti formati da ciascuna altezza del triangolo ABC sono esprimibili come somma di uno degli angoli interni α, β, γ con metà degli angoli interni del triangolo ortico.

Ad esempio, considerando l'altezza AX, possiamo affermare che l'angolo retto AXB è congruente alla somma dell'angolo ZXB (uguale ad α) con l'angolo ZXA; analogamente l'angolo retto AXC è congruente alla somma dell'angolo YXC (uguale ad α) con l'angolo YXA.



Essendo quindi gli angoli ZXA e YXA complementari dello stesso angolo possiamo affermare che sono congruenti e che quindi l'altezza AX del triangolo ABC è bisettrice dell'angolo ZXY del triangolo ortico.

Analoga dimostrazione per le altezze CZ e BY, anch'esse bisettrici degli angoli interni del triangolo ortico.

- **Gli angoli del triangolo ortico sono supplementari dei doppi degli angoli del triangolo assegnato.**

Questa proprietà risulta evidente osservando la figura precendente: ciascun angolo piatto sui lati del triangolo ABC è dato dalla somma di uno degli angoli interni del triangolo ortico con il doppio degli angoli interni del triangolo di partenza.

- **Fra tutti i triangoli "inscritti" in un triangolo acutangolo, il triangolo ortico[19] è quello con il perimetro minore.[20]**

[19] Le proprietà riportate e altri interesanti approfondimenti sono reperibili su numerosi siti, tra cui segnaliamo
http://www.2dcurves.com/line/linet.html
http://www.MathWorld.com
[20] Si veda la dimostrazione di questa proprietà al capitolo 29.