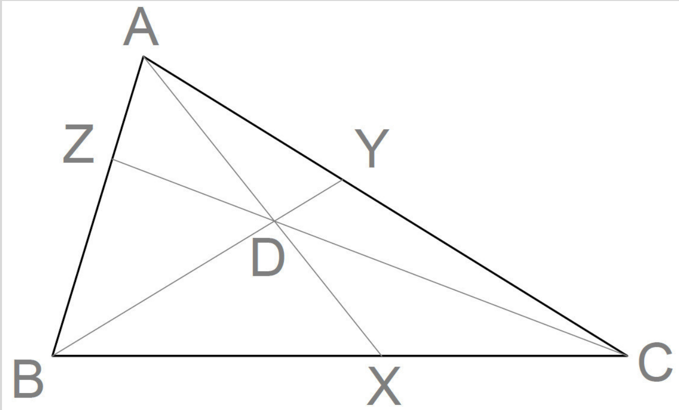
13 TEOREMA DI VAN AUBEL

Dato un triangolo ABC con tre ceviane AX, BY, CZ concorrenti in un punto D, vale la relazione

$$\frac{AD}{DX} = \frac{AY}{CY} + \frac{AZ}{BZ}$$

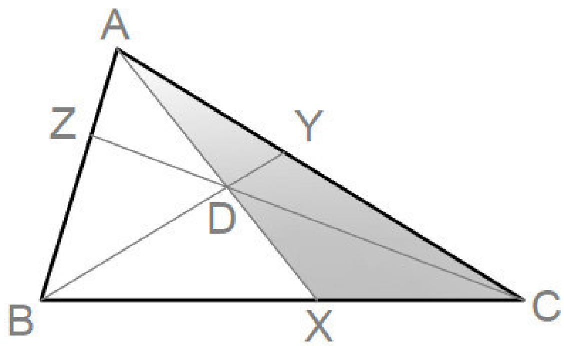


13.1 DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA

IPOTESI	AX, BY, CZ ceviane concorrenti in D	**TESI**	$\frac{AD}{DX} = \frac{AY}{CY} + \frac{AZ}{BZ}$

Applichiamo il teorema di Menelao al triangolo ACX, considerando Y, D, B i tre punti allineati indicati nell'enunciato.
E' quindi valida la relazione

$$\frac{BX}{BC} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AD}{DX} = 1$$



Analogamente applichiamo il teorema di Menelao al triangolo ABX, considerando Z, D, C i tre punti allineati indicati nell'enunciato. E' quindi valida la relazione

$$\frac{CX}{BC} \cdot \frac{BZ}{AZ} \cdot \frac{AD}{DX} = 1$$

Ricaviamo da entrambe le relazioni l'espressione degli addendi al secondo membro della tesi

$$\frac{AY}{CY} = \frac{BX}{BC} \cdot \frac{AD}{DX}$$

(dalla prima, triangolo ACX)

$$\frac{AZ}{BZ} = \frac{CX}{BC} \cdot \frac{AD}{DX}$$

(dalla seconda, triangolo ABX)

Esplicitiamo la loro somma (come nella tesi del teorema) e verifichiamo che l'uguaglianza sia verificata.

$$\frac{AY}{CY}+\frac{AZ}{BZ}=\frac{BX}{BC}\cdot\frac{AD}{DX}+\frac{CX}{BC}\cdot\frac{AD}{DX}=\frac{AD}{DX}\cdot\left(\frac{BX}{BC}+\frac{CX}{BC}\right)$$

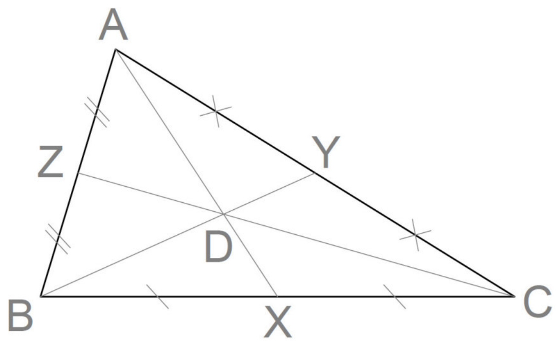
da cui

$$\frac{AD}{DX}\cdot\left(\frac{BX}{BC}+\frac{CX}{BC}\right)=\frac{AD}{DX}\cdot\frac{BX+CX}{BC}=\frac{AD}{DX}\cdot\frac{BC}{BC}=\frac{AD}{DX}$$

e quindi è verificata la tesi del teorema[17]

$$\frac{AY}{CY}+\frac{AZ}{BZ}=\frac{AD}{DX}$$

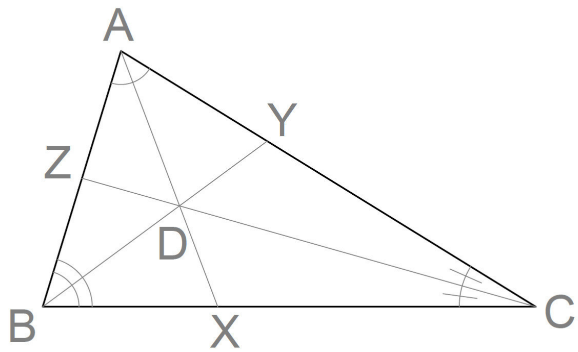
- **Osservazione**



Se le tre ceviane fossero le tre **mediane**, i segmenti AY e CY sarebbero congruenti, così come i segmenti AZ e BZ e pertanto la relazione appena dimostrata assumerebbe la nota forma

$$\boxed{\frac{AD}{DX}=2}$$

- **Osservazione**



Se le tre ceviane fossero le tre **bisettrici**, potremmo applicare il teorema della bisettrice ai segmenti BY e CZ, ottenendo le relazioni

$$\frac{AY}{CY}=\frac{AB}{BC} \qquad \frac{AZ}{BZ}=\frac{AC}{BC}$$

dalla cui somma si ricava la relazione

$$\boxed{\frac{AD}{DX}=\frac{AB+AC}{BC}}$$

- **Osservazione**

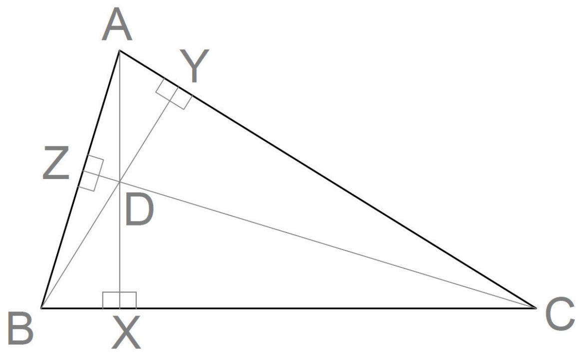
Se le tre ceviane fossero le tre **altezze** di un triangolo acutangolo, potremmo considerare i triangoli rettangoli ABY e ACZ e riscrivere le relazioni che definiscono gli addendi del secondo membro del teorema come di seguito

[17] Analogamente a quanto dimostrato prendendo come riferimento la ceviana AX, si possono ricavare gli stessi rapporti anche per le altre due ceviane, BY e CZ, secondo le formule seguenti

$$\frac{BD}{DY}=\frac{BX}{CX}+\frac{BZ}{AZ} \qquad \frac{CD}{DZ}=\frac{CY}{AY}+\frac{CX}{BX}$$

$$\frac{AY}{CY}=\frac{BY\cdot \mathrm{ctg}\hat{A}}{BY\cdot \mathrm{ctg}\hat{C}}=\frac{\mathrm{tg}\hat{C}}{\mathrm{tg}\hat{A}}$$

$$\frac{AZ}{BZ}=\frac{CZ\cdot \mathrm{ctg}\hat{A}}{CZ\cdot \mathrm{ctg}\hat{B}}=\frac{\mathrm{tg}\hat{B}}{\mathrm{tg}\hat{A}}$$



dalla cui somma si ricava

$$\frac{AZ}{BZ}+\frac{AY}{CY}=\frac{\mathrm{tg}\hat{C}+\mathrm{tg}\hat{B}}{\mathrm{tg}\hat{A}}=\frac{\dfrac{\mathrm{sen}\hat{C}}{\cos\hat{C}}+\dfrac{\mathrm{sen}\hat{B}}{\cos\hat{B}}}{\dfrac{\mathrm{sen}\hat{A}}{\cos\hat{A}}}=\frac{\dfrac{\mathrm{sen}\hat{C}\cdot\cos\hat{B}+\mathrm{sen}\hat{B}\cdot\cos\hat{C}}{\cos\hat{C}\cdot\cos\hat{B}}}{\dfrac{\mathrm{sen}\hat{A}}{\cos\hat{A}}}=\frac{\mathrm{sen}(\hat{B}+\hat{C})}{\cos\hat{C}\cdot\cos\hat{B}}\cdot\frac{\cos\hat{A}}{\mathrm{sen}\hat{A}}$$

e ricordando che angoli supplementari, in questo caso $\hat{B}+\hat{C}$ e $\hat{A}$, hanno lo stesso seno, l'espressione della tesi del teorema diventa

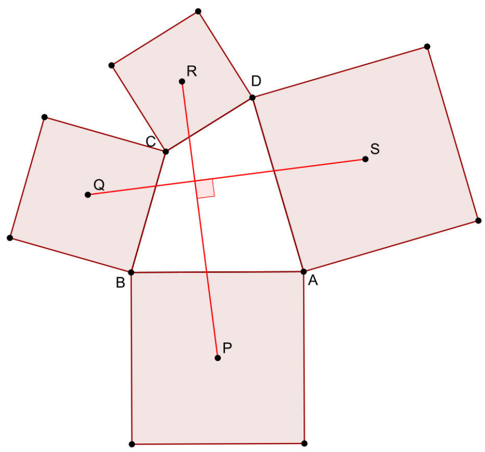
$$\boxed{\frac{AD}{DX}=\frac{\cos\hat{A}}{\cos\hat{C}\cdot\cos\hat{B}}}$$

13.2 NOTE STORICO-BIOGRAFICHE[18]

Henricus Hubertus van Aubel nacque a Maastricht (Olanda) il 20 novembre 1830 e fu insegnante di matematica presso il Royal Atheneum di Anversa.

Il suo nome, spesso erroneamente riportato come von Aubel, è legato anche ad un altro teorema, più celebre di quello esposto in queste pagine, in cui si dimostra che i segmenti che collegano i centri dei quadrati costruiti sui lati di un quadrilatero qualsiasi sono congruenti e tra loro perpendicolari.
Morì il 3 febbraio del 1906 ad Anversa, in Belgio.

Henry van Aubel



[18] - http://www.pandd.demon.nl/lemoine/vanaubel.htm;
- http://dynamicmathematicslearning.com/aubelparm.html.