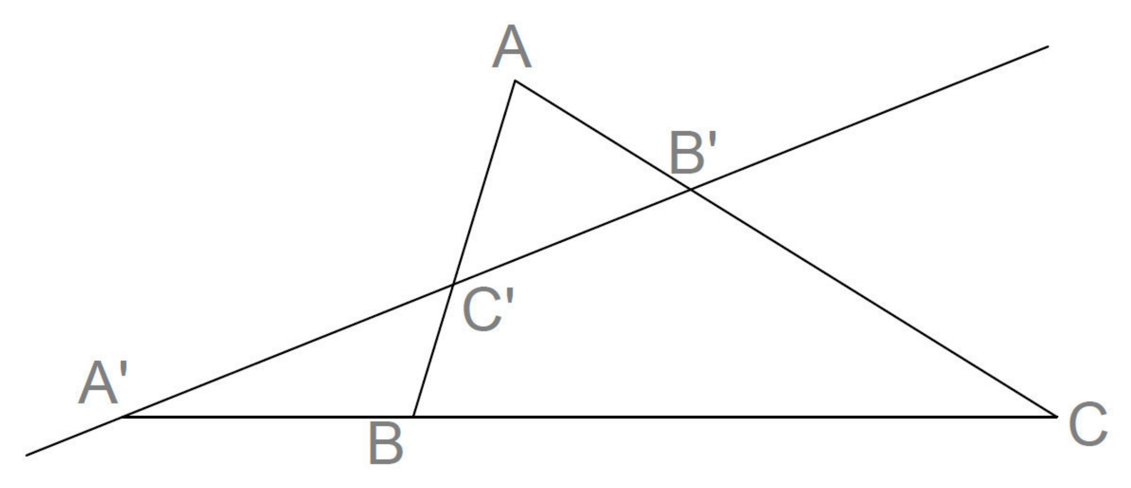
12 TEOREMA DI MENELAO

Dato un triangolo ABC e tre punti A', B', C', due dei quali su due lati del triangolo e uno sul prolungamento del terzo, A', B' e C' sono allineati $\Leftrightarrow$ vale la seguente relazione:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$$



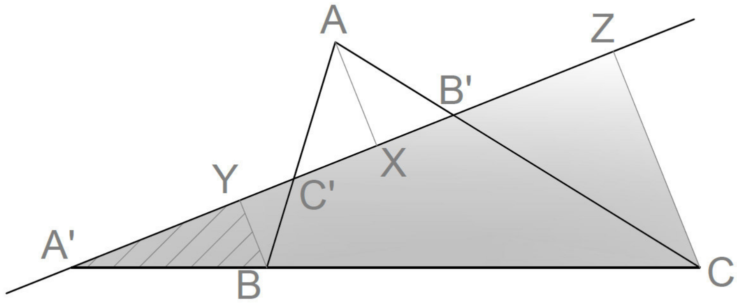
12.1 DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA

- **Parte "$\Rightarrow$"**

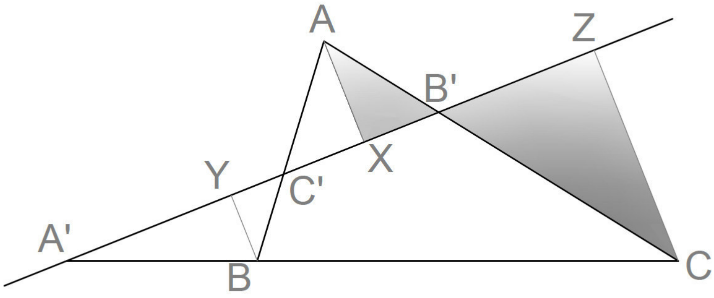
IPOTESI	A', B', C' sono allineati	**TESI**	$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$

Tracciamo le perpendicolari da A, B e C alla retta A'B' e troviamo i punti X, Y e Z.

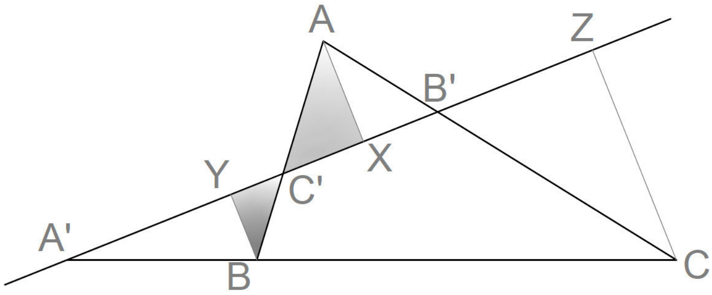
I triangoli A'BY e A'CZ sono rettangoli e sono simili (angolo in A' in comune e angoli retti congruenti) e quindi per similitudine vale la relazione $\frac{A'B}{A'C} = \frac{BY}{CZ}$



Anche i triangoli AB'X e CB'Z sono rettangoli e sono simili (angoli in B' opposti al vertice e angoli retti congruenti) e quindi per similitudine vale la relazione $\frac{B'C}{B'A} = \frac{CZ}{AX}$



Analoghe considerazioni valgono per i triangoli AC'X e BC'Y, che sono rettangoli e sono simili (angoli in C' opposti al vertice e angoli retti congruenti) e quindi per similitudine vale la relazione $\frac{C'A}{C'B} = \frac{AX}{BY}$



Moltiplicando i tre rapporti si ottiene

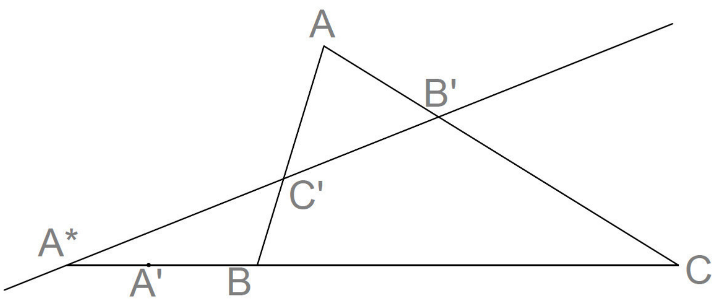
$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = \frac{BY}{CZ} \cdot \frac{CZ}{AX} \cdot \frac{AX}{BY} = 1$$

che è la tesi che si voleva dimostrare.

- **Parte "$\Leftarrow$"**

IPOTESI	$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$	**TESI**	A', B', C' sono allineati

Supponiamo che la retta B'C' tagli BC in A*.
Per la prima parte della dimostrazione sappiamo che vale la relazione $\frac{A^*B}{A^*C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$.



Dal confronto tra le due relazioni $\frac{A^*B}{A^*C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B}$ ricaviamo che $\frac{A^*B}{A^*C} = \frac{A'B}{A'C}$, da cui $\frac{A^*C}{A^*B} = \frac{A'C}{A'B}$, cioè $A^*C : A^*B = A'C : A'B$

Applicando la proprietà dello scomporre otteniamo $\left(A^*C - A^*B\right) : A^*B = \left(A'C - A'B\right) : A'B$

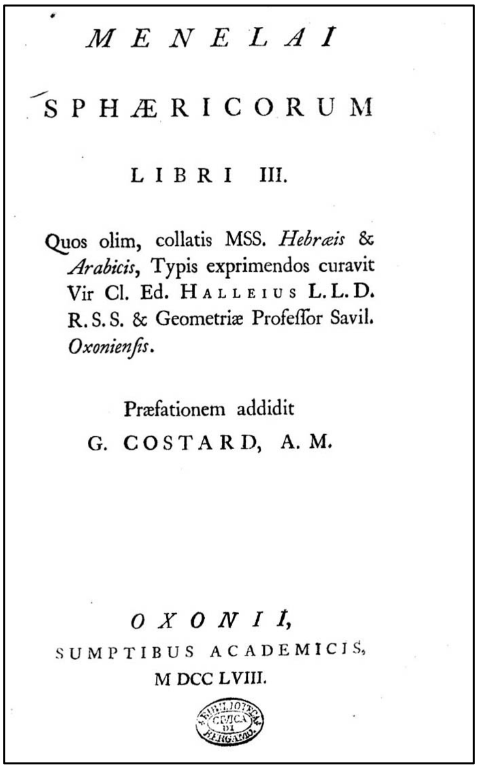
da cui, notando che $A^*C-A^*B = A'C-A'B = BC$, otteniamo $BC : A^*B = BC : A'B$

e quindi necessariamente deve valere l'uguaglianza $A^*B = A'B$, che implica il fatto che i punti A^* e A' sono coincidenti.

Pertanto è dimostrato che i tre punti A', B' e C' sono allineati.

12.2 NOTE STORICO-BIOGRAFICHE[16]

Il teorema che porta il suo nome fu senza dubbio uno dei lavori che diede più fama a Menelao di Alessandria (circa 70 - circa 130), sebbene il suo interesse si fosse rivolto prettamente all'astronomia e alla geometria sferica.
Della sua vita sappiamo in realtà ben poco e le uniche notizie giunte fino a noi sono le citazioni di altri autori. Pappo e Proclo affermano che sia nato ad Alessandria, mentre Claudio Tolomeo ne ricorda alcune osservazioni nel 98 d.c..
L'unica delle opere che gli sono attribuite giunta fino a noi è la *Sphaerica*, un trattato in tre libri di geometria e trigonometria sferica, probabilmente il più importante trasmessoci dall'antichità.
Nel Libro I pone le basi per la trattazione dei triangoli sferici, così come fece Euclide con quelli piani. Questo costituisce un punto di svolta nello sviluppo della trigonometria sferica, ma lo stesso Menelao si dichiara poco convinto del frequente uso che fa Euclide della dimostrazione per assurdo, tanto che propone dimostrazioni alternative degli stessi teoremi affemando che questo modo di procedere è per certi versi più completo di quello di Euclide.
Nel Libro II applica la geometria sferica all'astronomia seguendo generalmente le proposizioni date da Teodosio, ma porta prove e argomentazioni più convincenti.
E' nel Libro III che espone il suo noto teorema e ne propone un'applicazione ai triangoli sferici.
Le traduzioni della Sphaerica giunte fino a noi sono prevalentemente arabe, essendo andate perdute tutte le altre, e proprio alcuni commentatori arabi gli attribuiscono anche un trattato di meccanica.



MENELAI

SPHÆRICORUM

LIBRI III.

Quos olim, collatis MSS. *Hebræis* & *Arabicis*, Typis exprimendos curavit Vir Cl. Ed. HALLEIUS L.L.D. R.S.S. & Geometriæ Profeſſor Savil. *Oxonienſis*.

Præfationem addidit

G. COSTARD, A. M.

OXONII,

SUMPTIBUS ACADEMICIS,

M DCC LVIII.

Il Libro III della Sphaerica, 1758.

[16] - Treccani (http://www.treccani.it/enciclopedia/menelao-di-alessandria/);
- http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Menelaus.html;
- wikipedia (https://it.wikipedia.org/wiki/Menelao_di_Alessandria)