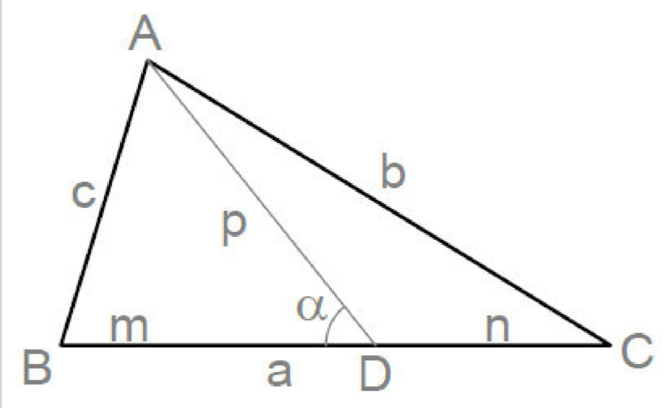
11 TEOREMA DI STEWART

La lunghezza di una qualunque ceviana si può esprimere in funzione della lunghezza dei lati con la seguente relazione

$$a\left(p^2 + mn\right) = b^2 m + c^2 n$$



11.1 DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA

IPOTESI	AB = c	AC = b	BC = a	**TESI**	$a\left(p^2 + mn\right) = b^2 m + c^2 n$
	AD = p	BD = m	CD = n		

Detta α l'ampiezza dell'angolo formato dalla ceviana con il lato BC, applichiamo il teorema di Carnot al lato AB del triangolo ABD e al lato AC nel triangolo ACD, ottenendo le relazioni

$$c^2 = p^2 + m^2 - 2pm\cos\alpha \qquad b^2 = p^2 + n^2 - 2pn\cos\left(\pi - \alpha\right)$$

Ricordando che $\cos\left(\pi - \alpha\right) = -\cos\alpha$ ricaviamo il termine $\cos\alpha$ da entrambe le relazioni

$$\cos\alpha = \frac{p^2 + m^2 - c^2}{2pm} \qquad \cos\alpha = \frac{-p^2 - n^2 + b^2}{2pn}$$

da cui, uguagliando le due espressioni $p^2 n + m^2 n - c^2 n = -p^2 m - n^2 m + b^2 m$

da cui $p^2(n + m) + mn(n + m) = b^2 m + c^2 n$

ed essendo $a = m + n$ $p^2 a + mna = b^2 m + c^2 n$

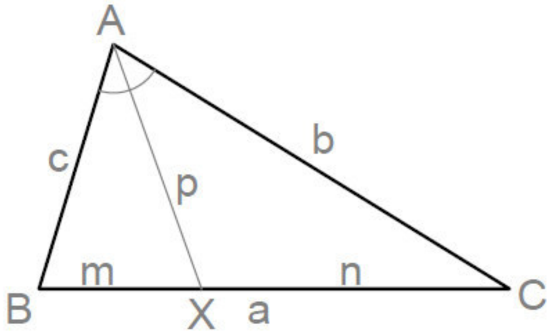
da cui si ricava la relazione del teorema[14] $a\left(p^2 + mn\right) = b^2 m + c^2 n$

[14] Possiamo scrivere la stessa relazione esplicitando il quadrato della lunghezza della ceviana $p^2 = \dfrac{b^2 m + c^2 n}{a} - mn$

11.2 APPLICAZIONI DEL TEOREMA

- **Calcolo della lunghezza di una bisettrice di un triangolo**

Il teorema di Stewart risulta utile nel caso in cui si voglia conoscere la lunghezza di una bisettrice.
In questo caso calcoliamo la lunghezza della bisettrice AX.



Per il teorema della bisettrice $m : n = c : b$

da cui, applicando la proprietà del comporre, otteniamo

$(m + n) : m = (c + b) : c$

ed essendo $a = m + n,$ $a : m = (c + b) : c$

Dalla proporzione siamo in grado di esplicitare l'espressione dei due segmenti di lunghezza *m* ed *n*

$$m = \frac{ac}{c+b} \qquad n = \frac{ab}{c+b}$$

Inseriamo questi due valori nella formula del teorema di Stewart ed otteniamo

$$a\left(p^2 + \frac{ac}{b+c}\cdot\frac{ab}{b+c}\right) = \mathrm{b}^2\frac{ac}{b+c} + c^2\frac{ab}{b+c}$$

da cui

$$a\left[p^2 + \frac{a^2bc}{(b+c)^2}\right] = abc \qquad \text{e di seguito} \qquad p^2 + \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = bc$$

Esplicitando il quadrato della lunghezza della bisettrice otteniamo

$$p^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} \qquad \text{equivalente alla} \qquad p^2 = bc\left[1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]$$

11.3 NOTE STORICO-BIOGRAFICHE[15]

Matthew Stewart

Matthew Stewart nacque a Rothesay (Isle of Bute, Scozia) il 15 gennaio del 1717 e già diciassettenne iniziò a collaborare con i due grandi matematici scozzesi Simson (dal 1734) e McLaurin (dal 1741).
La sua carriera nel campo della matematica fu tuttavia, almeno in età giovanile, ostacolata dal forte desiderio del padre di avviarlo sulla strada del sacerdozio: le pressioni paterne furono tali che Stewart prese i voti sulla sua isola natale, ma il suo desiderio di dedicarsi alla matematica prevalse quando ottenne la cattedra che era stata di McLaurin all'Università di Edimburgo nel 1747.

Sposò Marjorie Stewart, dalla quale ebbe numerosi figli, ma solo Dugald sopravvisse fino all'età adulta e divenne un matematico ancora più popolare e famoso del padre.
Matthew si interessò anche di astronomia e cercò di trattare il moto della Luna e dei pianeti (seconda legge di Keplero) usando metodi strettamente geometrici.

La sua opera più nota è *Some general theorems of considerable use in the higher parts of mathematics* (Alcuni teoremi generali di uso considerevole nella matematica superiore, 1746) in cui enunciò il teorema che porta il suo nome.

Fu uno dei fondatori della Royal Society di Edimburgo e quando nel 1772 la sua salute cominciò a peggiorare, il suo posto venne preso dal figlio Dugald. Morì il 23 gennaio del 1785 a Catrine, in Scozia.

[15] - MacTutor (http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Stewart.html);
- Treccani (http://www.treccani.it/enciclopedia/stewart_%28Enciclopedia-della-Matematica%29/).