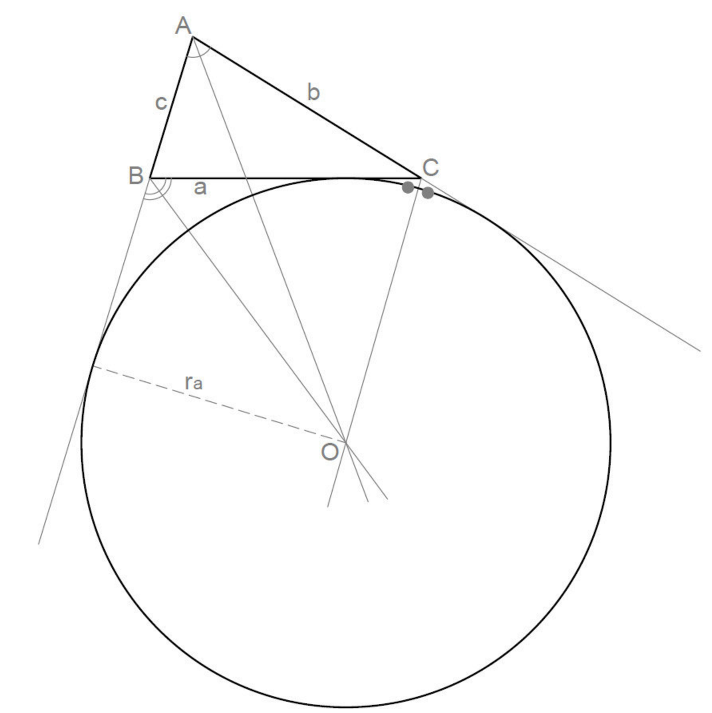
9 MISURA DEI RAGGI DEI CERCHI EX-INSCRITTI AD UN TRIANGOLO

La misura dei raggi del cerchi ex-inscritti a un triangolo è pari al rapporto tra l'area del triangolo e la differenza tra il semiperimetro e la lunghezza del lato tangente al cerchio.

$$r_a = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{p - a}}$$

$$r_b = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{p - b}}$$

$$r_c = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{p - c}}$$



N.B. Il cerchio ex-inscritto al triangolo ABC relativo al lato BC è quel cerchio che è tangente al lato BC ed ai prolungamenti degli altri due lati.

9.1 DIMOSTRAZIONE

IPOTESI	Il cerchio di centro O e raggio r_a è ex-inscritto al triangolo ABC.	TESI	$r_a = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{p - a}}$

Per dimostrare la validità della tesi ricaveremo l'area del triangolo ABC come combinazione delle aree dei triangoli ABO, ACO e BCO; in particolare scriveremo la relazione

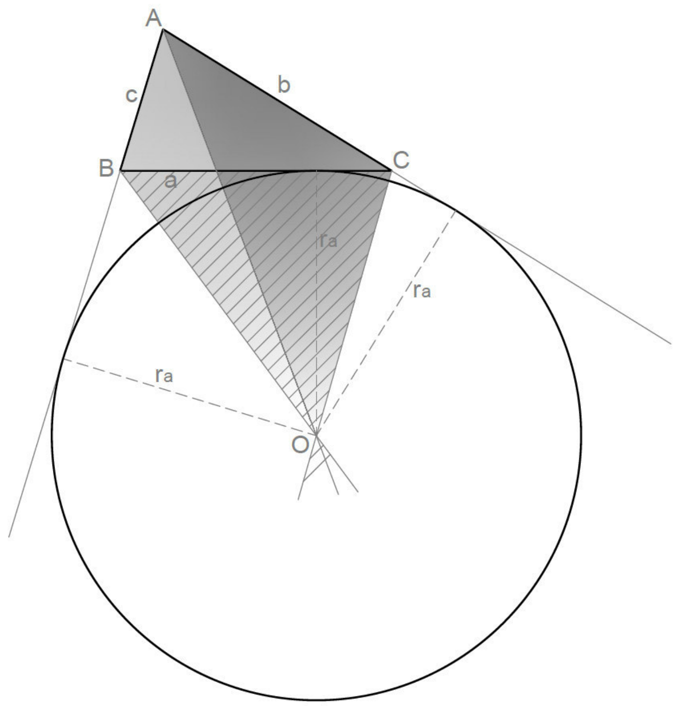
$$A_{ABC} = A_{ABO} + A_{ACO} - A_{BCO}$$

cioè

$$(ABC) = (ABO) + (ACO) - (BCO)$$

Osserviamo che il triangolo ABO ha base AB e altezza relativa ad essa di lunghezza pari a r_a, il triangolo ACO ha base AC e altezza relativa ad essa di lunghezza pari a r_a, il triangolo BCO ha base BC e altezza relativa ad essa di lunghezza pari a r_a.

Dette a, b, c le lunghezze dei lati del triangolo, ricaviamo le tre aree



area di ABO $\quad A_{ABO} = \dfrac{c \cdot r_a}{2}$

area di ACO $\quad A_{ACO} = \dfrac{b \cdot r_a}{2}$

area di BCO $\quad A_{BCO} = \dfrac{a \cdot r_a}{2}$

E' immediato ora calcolare l'area A del triangolo ABC

$$A = \frac{(c + b - a) \cdot r_a}{2}$$

Riscriviamo la somma algebrica al numeratore come

$$c + b - a = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a)$$

con la quale l'area del triangolo ABC diventa $\quad A = (p - a) \cdot r_a$

E' ora immediato ricavare la tesi del teorema $\quad r_a = \dfrac{A}{p - a}$

La stessa dimostrazione può essere usata per i cerchi ex-inscritti tangenti ai lati AC e AB, ottenendo le misure dei raggi $\quad r_b = \dfrac{A}{p - b} \quad$ e $\quad r_c = \dfrac{A}{p - c}$.

- **Osservazione**

E' interessante notare cosa succede sommando i reciproci delle tre relazioni appena trovate:

$$\frac{p - a}{A} + \frac{p - b}{A} + \frac{p - c}{A} = \frac{3p - (a + b + c)}{A} = \frac{p}{A} = \frac{1}{r},$$

cioè la somma dei reciproci dei raggi dei cerchi ex-inscritti al triangolo e uguale al reciproco del raggio del cerchio inscritto.

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$