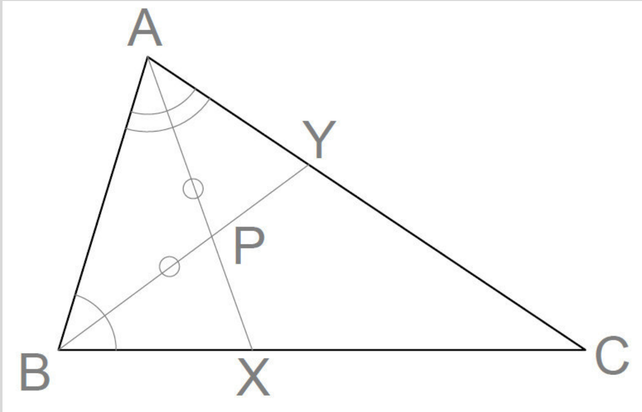
6 SE UN TRIANGOLO HA DUE BISETTRICI CONGRUENTI ALLORA E' ISOSCELE

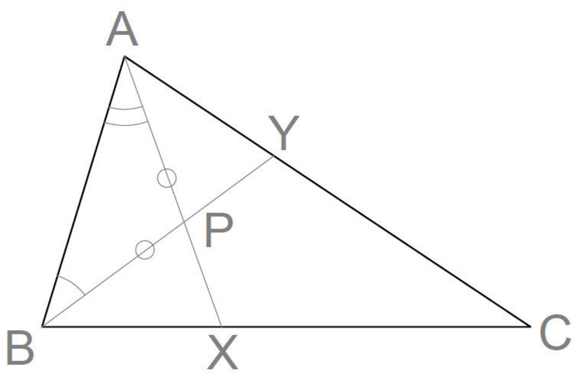
Se un triangolo qualsiasi ha due bisettrici (es. AX e BY) congruenti, allora il triangolo è isoscele.



6.1 DIMOSTRAZIONE

IPOTESI	AX bisettrice dell’angolo A BY bisettrice dell’angolo B AX ≅ BY	**TESI**	AC ≅ BC (triangolo ABC isoscele)

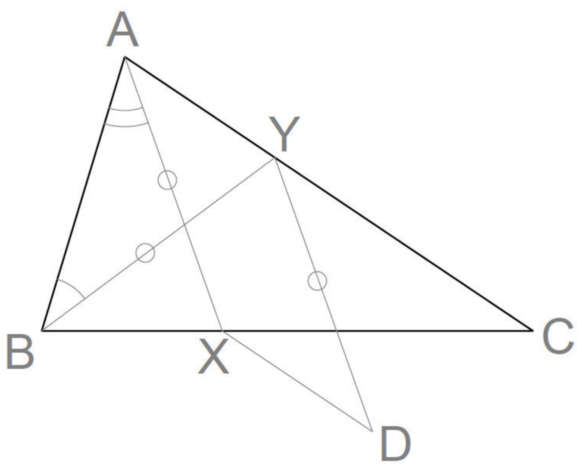
Supponiamo **per assurdo** che i lati AC e BC non siano congruenti: supponiamo che sia **AC < BC** e di conseguenza anche gli angoli alla base saranno diversi, in questo caso sarà **B < A**.
Di conseguenza anche le metà degli angoli A e B, creati dalle bisettrici, staranno tra loro secondo la relazione **B/2 < A/2**.



Consideriamo i triangoli ABY e BAX: essi hanno due lati congruenti (AB in comune e BY ≅ AX) e gli angoli in A e in B che stanno tra loro secondo la relazione B/2 < A/2; quindi i lati ad essi opposti dovranno stare tra loro secondo la relazione **AY < BX**.

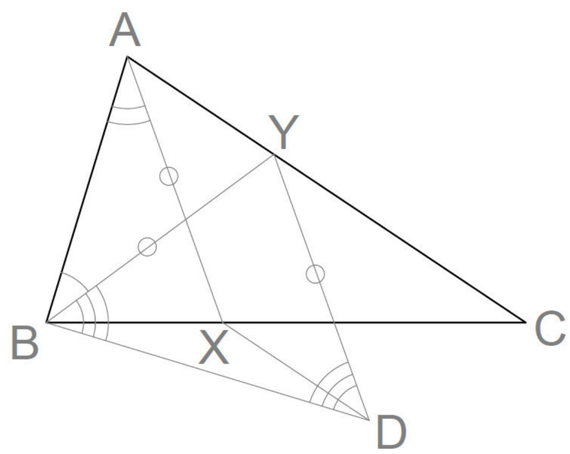
Costruiamo ora il parallelogramma AYDX, che avrà i lati AX e YD congruenti e paralleli; di conseguenza, sfruttando l'ipotesi, sarà valida la relazione AX ≅ YD ≅ BY.

Osserviamo ora che, avendo i lati BY e DY congruenti, il triangolo BDY è isoscele sulla base BD e quindi, per il teorema del triangolo issocele, **gli angoli YBD e YDB sono congruenti**.



L'angolo YBD è formato dalla somma degli angoli XBD e YBX (congruente a B/2).
L'angolo YDB è formato dalla somma degli angoli XDB e YDX (congruente a A/2, in quanto opposto a XAY nel parallelogramma AYDX).

Ma essendo B/2 < A/2 ed essendo il triangolo BDY isoscele, deduciamo che gli angoli XBD e XDB stanno fra loro secondo la relazione XBD > XDB.
Di conseguenza i lati ad essi opposti dovranno rispettare la relazione **DX > BX**.



Ma questo è assurdo, perchè DX ≅ AY e per le considerazioni precedenti era vero che **AY < BX**.

Quindi necessariamente i due segmenti AY e BX dovranno essere congruenti, e di conseguenza dovranno essere congruenti anche gli angoli B/2 e A/2; pertanto anche gli angoli A e B dovranno essere congruenti e il triangolo ABC risulta quindi isoscele.

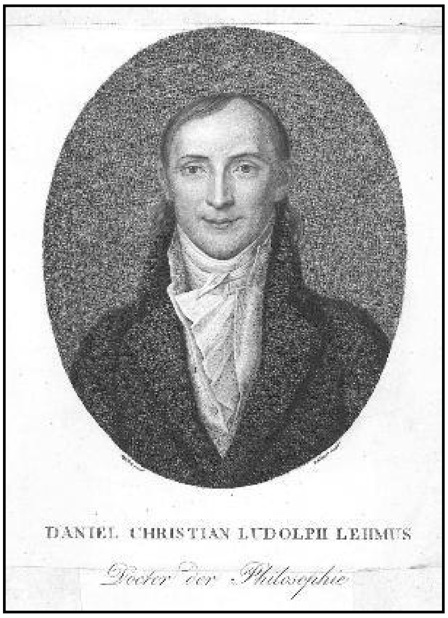
6.2 NOTE STORICO-BIOGRAFICHE[9]

Il risultato del problema di dimostrare che un triangolo con due bisettrici uguali è isoscele è tradizionalmente chiamato "**Teorema di Steiner-Lehmus**" e deve il suo nome ai matematici Jakob Steiner (Utzenstorf, Svizzera, 18 marzo 1796 - Berna, Svizzera, 1 aprile 1863) e Daniel Christian Ludolf Lehmus (Soest, Germania, 3 luglio 1780 - Berlino, Germania, 18 gennaio 1863).

Jakob Steiner

Fu Lehmus che, in una lettera del 1840 scritta al matematico francese Charles Sturm (1803-1855), chiedeva la dimostrazione del teorema che oggi porta il suo nome. Sturm passà il problema ad altri matematici e il primo che presentò una valida dimostrazione fu proprio Steiner.
A questa prima dimostrazione ne seguirono altre, tra cui una dello stesso Steiner del 1844 e una nuova versione da parte di Lehmus nel 1850, fino alle dimostrazioni più recenti (1970).

Steiner studiò prima ad Heidelberg e poi a Berlino e quando, nel 1832, pubblicò il suo *Systematische Entwickelungen* (letteralmente "Sviluppo sistematico"), ricevette il sostegno di Carl Jacobi, all'epoca professore a Konigsberg. Grazie all'impegno dello stesso Jacobi e dei fratelli Alexander e Wilhelm von Humboldt, nel 1834 viene creata una nuova cattedra di geometria all'Università di Berlino e gli viene assegnata. La occuperà fino alla propria morte, nel 1863.
I suoi lavori matematici furono essenzialmente geometrici, ma scrisse anche numerosi articoli sulle curve e le superfici algebriche, tra cui *Allgemeine Eigenschaften algebraischer Curven* (Proprietà generali delle curve algebriche) che conteneva solo risultati, senza dimostrazioni, e che diventò una raccolta di enigmi per le generazioni future. Il primo a completarle tutte fu l'italiano Luigi Cremona, in un suo libro sulle curve algebriche.
Steiner è anche noto per il celeberrimo *teorema di Huygens-Steiner* per il calcolo dei momenti d'inerzia.



Daniel Lehmus

Lehmus studiò alle Università di Erlangen e Jena prima di trasferirsi a Berlino, dove approfondì i propri studi matematici. Fu sempre molto impegnato professionalmente e mantenne una cattedra come docente di matematica e scienze presso il *Hauptbergwerks-Eleven-Institut* di Berlino (una Mining School di ingegneria mineraria) e una presso la *Königlichen Artillerie- und Ingenieurschule* (Military Engineering School); inoltre proseguì l'attività di lettore presso la stessa università.
Scrisse numerosi manuali di matematica e scienze, funzionali alla sua attività di docente, tra cui il più famoso è probabilmente il *Lehrbuch der Geometrie,* che ebbe un gran numero di ristampe.

[9] - Prof. Enrico Gregorio, Università di Verona (http://profs.sci.univr.it/~gregorio/didmat-II.pdf);
- University of Manitoba (CA) - https://www.math.umanitoba.ca/media/ManitobaMathLinks06.pdf
- Bielefeld University - https://www.math.uni-bielefeld.de/~sillke/PUZZLES/steiner-lehmus;
- Wikipedia - www.wikipedia.org.