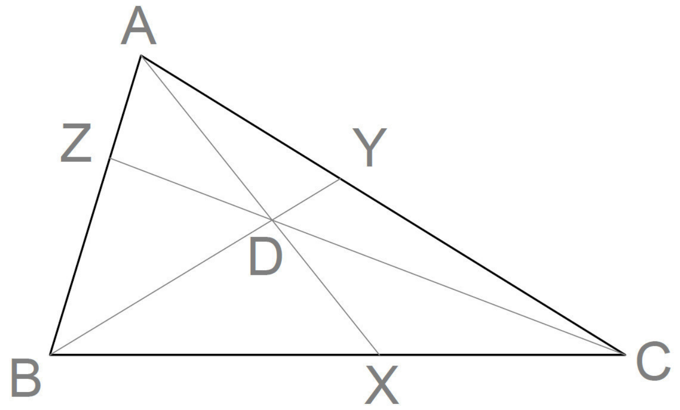
1 TEOREMA DI CEVA

In un triangolo, una ceviana è un qualunque segmento che unisce un vertice ad un punto del lato opposto.

Le tre ceviane AX, BY, CZ concorrono in uno stesso punto

$\Leftrightarrow$ vale la seguente relazione:

$$\frac{BX}{CX}\cdot\frac{CY}{AY}\cdot\frac{AZ}{BZ}=1$$



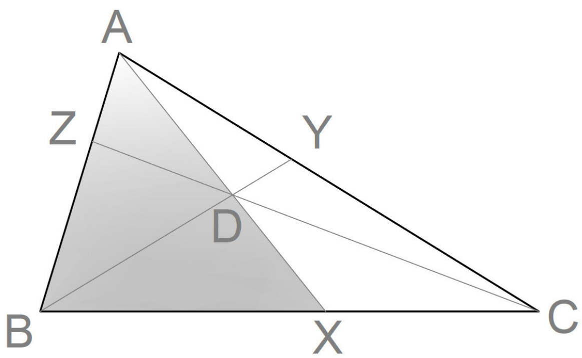
1.1 DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA

- **Parte "$\Rightarrow$"**

IPOTESI	AX, BY, CZ concorrono nello stesso punto D	**TESI**	$\frac{BX}{CX}\cdot\frac{CY}{AY}\cdot\frac{AZ}{BZ}=1$

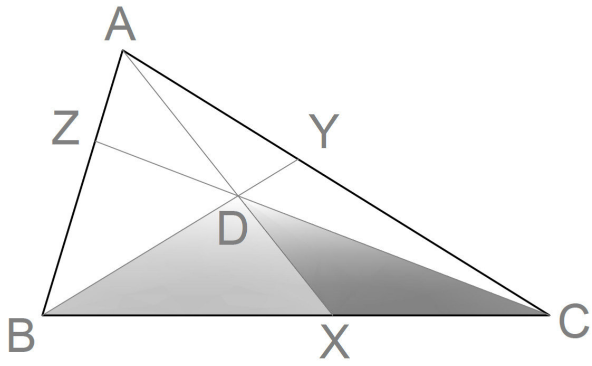
Consideriamo (ABX) e (ACX)[1] e ne facciamo il rapporto.

E' immediato notare che i due triangoli hanno la stessa altezza relativamente alle basi BX e CX, pertanto il rapporto tra le aree risulta uguale al rapporto tra le basi, cioè $\frac{(ABX)}{(ACX)}=\frac{BX}{CX}$.



[1] Con la notazione (ABC) si intende l'area del triangolo ABC.

Facciamo le stesse considerazioni per i triangoli BDX e CDX, che hanno la stessa altezza relativamente alle basi BX e CX, e per i quali il rapporto delle aree sarà uguale al rapporto delle basi, cioè $\frac{(BDX)}{(CDX)} = \frac{BX}{CX}$.



Pertanto risulta

$$\frac{BX}{CX} = \frac{(BDX)}{(CDX)} = \frac{(ABX)}{(ACX)}$$

ed applicando la proprietà dello scomporre delle proporzioni si ottiene $\frac{BX}{CX} = \frac{(BDX)}{(CDX)} = \frac{(ABX)}{(ACX)} = \frac{(ABX) - (BDX)}{(ACX) - (CDX)} = \frac{(ABD)}{(ACD)}$ cioè $\frac{BX}{CX} = \frac{(ABD)}{(ACD)}$.

Da analoghe considerazioni sulle altre coppie di triangoli è facile ricavare le relazioni

$$\frac{CY}{AY} = \frac{(BDC)}{(ABD)} \qquad \text{e} \qquad \frac{AZ}{BZ} = \frac{(ACD)}{(BDC)}$$

Moltiplicando i tre rapporti si ottiene

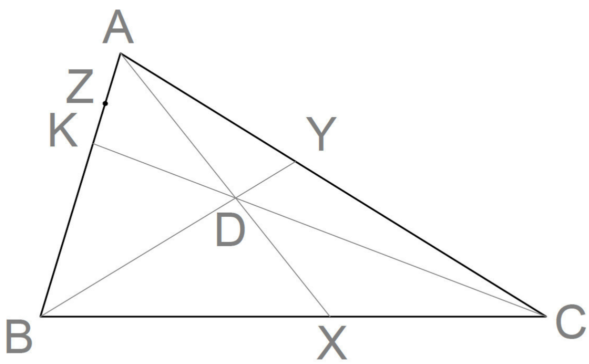
$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = \frac{(ABD)}{(ACD)} \cdot \frac{(BDC)}{(ABD)} \cdot \frac{(ACD)}{(BDC)} = 1$$

che è la tesi che si voleva dimostrare.

- **Parte $" \Leftarrow "$**

IPOTESI	$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1$	**TESI**	AX, BY, CZ concorrono nello stesso punto D

Consideriamo le due ceviane AX e BY. Se consideriamo la ceviana CK passante per il punto D (intersezione di AX e BY), sappiamo che vale la relazione $\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AK}{BK} = 1$.



Dimostrando che il punto K e il punto Z coincidono, dimostreremo che le tre ceviane AX, BY e CZ passano tutte per lo stesso punto.

Dall'uguaglianza $\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AK}{BK}$ ricaviamo che $\frac{AZ}{BZ} = \frac{AK}{BK}$, cioè $AZ : BZ = AK : BK$.

Applicando la proprietà del comporre otteniamo $\left(AZ + BZ\right) : BZ = \left(AK + BK\right) : BK$

da cui, notando che AZ + BZ = AK + BK = AB, otteniamo $AB : BZ = AB : BK$

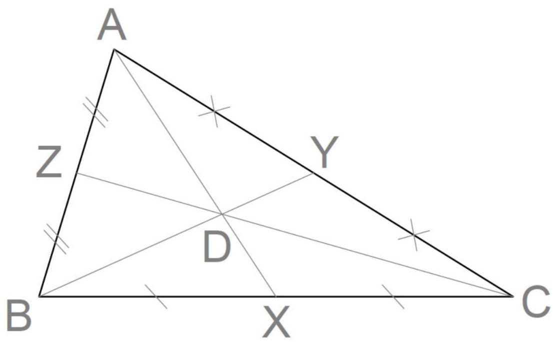
e quindi necessariamente deve valere l'uguaglianza BZ = BK, che implica il fatto che i punti K e Z sono coincidenti.

Pertanto è dimostrato che le tre ceviane AX, BY, CZ concorrono nello stesso punto D.

1.2 APPLICAZIONI DEL TEOREMA

- **Le tre mediane di un triangolo si incontrano nello stesso punto[2]**

Essendo congruenti per ipotesi (ogni mediana divide a metà il lato opposto) i segmenti formati da ciascuna ceviana sui tre lati, la relazione $\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1$ è evidentemente verificata perchè ogni rapporto risulta uguale a 1.



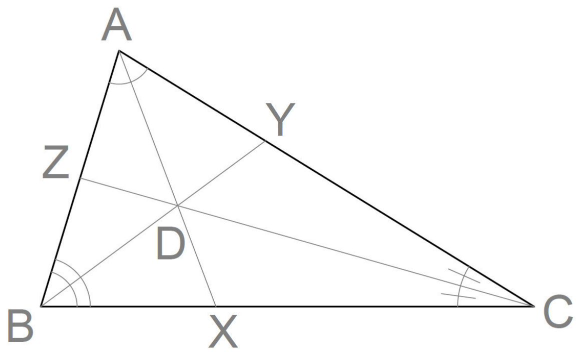
- **Le tre bisettrici di un triangolo si incontrano nello stesso punto[3]**

Per utilizzare il teorema di Ceva dobbiamo prima richiamare il **teorema della bisettrice** (la bisettrice di un angolo divide il lato opposto in due parti che sono in proporzione tra loro come lo sono i lati dell'angolo).

Quindi, applicando il teorema della bisettrice ai tre angoli del triangolo, avremo le relazioni $\frac{BX}{CX} = \frac{AB}{AC}$;

$\frac{CY}{AY} = \frac{BC}{AB}$;

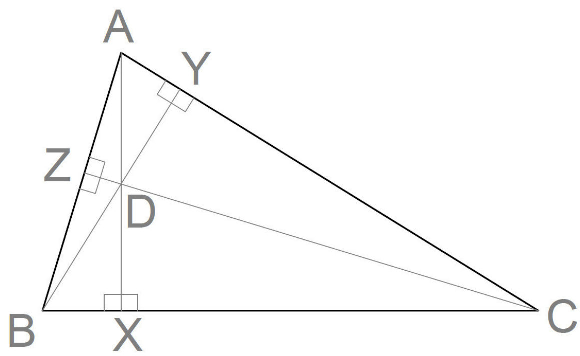
$\frac{AZ}{BZ} = \frac{AC}{BC}$.



Moltiplicando i tre rapporti si ottiene $\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AC}{BC} = 1$ e quindi per il teorema di Ceva possiamo affermare che le tre bisettrici passano effettivamente per uno stesso punto.

[2] Questa proprietà viene dimostrata anche in seguito, senza l'uso del teorema di Ceva.
[3] Questa proprietà viene dimostrata anche in seguito, senza l'uso del teorema di Ceva.

- **Le tre altezze di un triangolo acutangolo si incontrano nello stesso punto**



Consideriamo i triangoli rettangoli ABX e BCZ.
Avendo l'angolo B in comune risultano simili (i tre angoli congruenti) e quindi i loro lati sono in proporzione secondo la relazione $\frac{BX}{BZ} = \frac{AB}{BC}$.

Consideriamo i triangoli rettangoli ACX e BCY.
Avendo l'angolo C in comune risultano simili (i tre angoli congruenti) e quindi i loro lati sono in proporzione secondo la relazione $\frac{CY}{CX} = \frac{BC}{AC}$.

Consideriamo i triangoli rettangoli ABY e ACZ.
Avendo l'angolo A in comune risultano simili (i tre angoli congruenti) e quindi i loro lati sono in proporzione secondo la relazione $\frac{AZ}{AY} = \frac{AC}{AB}$.

Dalle tre relazioni appena ricavate è facile verificare che $\frac{BX}{BZ} \cdot \frac{CY}{CZ} \cdot \frac{AZ}{AY} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1$

e quindi per il teorema di Ceva possiamo affermare che le tre altezze passano effettivamente per uno stesso punto.

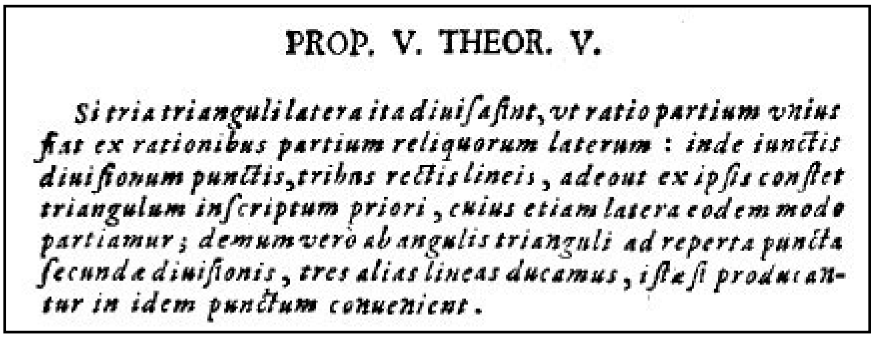
1.3 NOTE STORICO-BIOGRAFICHE[4]

Giovanni Ceva

Giovanni Ceva nacque a Milano nel 1647 e spese gli anni della sua formazione primaria presso un collegio dell'ordine dei gesuiti, dove rivelò una precoce propensione verso le scienze. Si trasferì successivamente a Pisa e la frequentazione di ambienti di ispirazione galileiana ebbe un impatto notevole su di lui, non solo dal punto di vista dottrinale e metodologico, ma indirettamente anche sulle sue vicende biografiche. Il primo problema matematico al quale si applicò fu quello classico della quadratura del cerchio, per cui egli si valse degli indivisibili del Cavalieri; ma dopo essersi illuso più volte d'aver trovato una soluzione, dovette alla fine desistere del tutto scoraggiato. Di questi tentativi giovanili non resta traccia nella produzione matura, ma la loro caratteristica di fondo, l'approccio ad una tematica consueta, ritenuta definita nei termini e nelle procedure, con uno strumento concettuale precedentemente non adibito al suo studio, resterà distintiva di tutta la sua opera matematica. Ad una prima valutazione, infatti, Ceva appare studioso d'impostazione strettamente tradizionale e ciò, nel particolare contesto della cultura matematica italiana al finire del secolo XVII, significa che i suoi studi s'iscrissero entro la geometria classica, senza il ricorso a sussidi analitici. In nessun modo, tuttavia, ciò giustifica un giudizio riduttivo circa l'importanza dei suoi lavori che al tradizionalismo della tematica uniscono una spiccata originalità nella metodologia[5]. Proprio l'intensificarsi dell'interesse verso questioni fisiche e sperimentali fu all'origine della sua chiamata a Mantova, dove assunse il ruolo di funzionario del governo ducale deputato ad affrontare una varietà di questioni tecniche.

La prima opera di Ceva è probabilmente anche la più nota: si tratta del *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio*, pubblicato a Milano nel 1678 con dedica al duca di Mantova Ferdinando Carlo Gonzaga. Il trattato, impostato metodologicamente secondo canoni tradizionali (con un prevalere della geometria classica), verte sullo studio di problemi geometrici a partire dal punto di vista della statica e della determinazione dei baricentri.

Il primo a riconoscere a Ceva l'importanza dei suoi risultati fu Michel Chasles (1793-1880), che nel 1837 riconobbe i suoi meriti nella dimostrazione del teorema che porta il suo nome[6]. In realtà il teorema era già stato dimostrato circa seicento anni prima dal matematico arabo Yusuf al-Mu'taman ibn Hud[7].



PROP. V. THEOR. V.

Si tria trianguli latera ita diuiſa ſint, vt ratio partium vnius fiat ex rationibus partium reliquorum laterum : inde iunctis diuiſionum punctis, tribus rectis lineis, adeout ex ipſis conſtet triangulum inſcriptum priori, cuius etiam latera eodem modo partiamur; demum verò ab angulis trianguli ad reperta puncta ſecundæ diuiſionis, tres alias lineas ducamus, iſtæ ſi producantur in idem punctum conuenient.

[In figura, l'enunciato del teorema di Ceva tratto dal De lineis.[8]]

Come già detto, l'interesse di Ceva per gli aspetti fisico-tecnici, già visibile nella concezione che sottende al *De lineis*, diventa preponderante quattro anni più tardi, negli *Opuscula mathematica de potentiis obliquis, de pendulis, de vasis et de fluminibus*, pubblicati a Milano nel 1682. Questa seconda opera, che verte intorno a svariate questioni di geometria e idrodinamica segna dunque un deciso passaggio a problemi applicati.

Parallelamente al progredire della carriera di Ceva come funzionario al servizio della corte dei Gonzaga, si accentuò anche il suo interesse per questioni di natura più schiettamente tecnico-amministrativa con la pubblicazione, ad esempio, di un trattato dal titolo *De re numaria quoad fieri potuit geometrice tractata*, Mantova 1711, in cui l'autore si poneva problemi legati al funzionamento di un certo tipo di sistema monetario. Ciò non significò tuttavia una perdita di interesse verso i problemi che erano stati da sempre al centro della sua attività scientifica. Morì a Mantova nel corso di un'epidemia scoppiata nel 1734 mentre l'area intorno alla città era occupata dai franco-piemontesi.

---

[4] - Mathematica italiana (mathematica.sns.it);
- Università Bocconi (http://matematica.unibocconi.it/autore/giovanni-ceva)

[5] Treccani (http://www.treccani.it/enciclopedia/giovanni-ceva_(Dizionario-Biografico)/)

[6] http://dm.unife.it/matematicainsieme/dopoeu/ceva.htm.

[7] http://biccari.altervista.org/c/insegnamento_scuole_superiori/Biccari_Teorema_di_Ceva.pdf

[8] Ceva (1678), da Mathematica italiana (mathematica.sns.it).