FUNZIONI DI UNA VARIABILE COMPLESSA

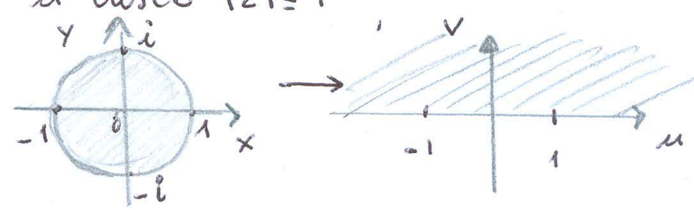
ESERCIZI

1) Studiare, anche da un punto di vista geometrico, le seguenti funzioni di variabile complessa:

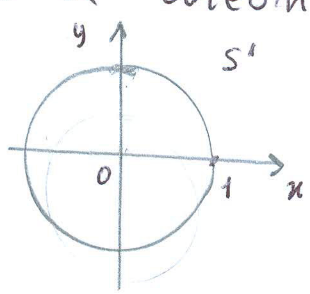
a) $f(z) = az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$; b) $g(z) = \bar{z}$;

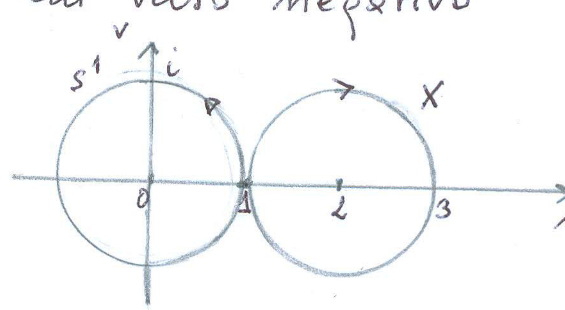
c) $h(z) = \dfrac{1}{z+1}$; d) $k(z) = \dfrac{z}{z+1}$;

2) Determinare un'applicazione di Moëbius $\dfrac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, che mandi il disco $|z| \le 1$ nel semipiano superiore

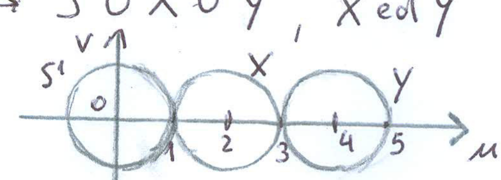


3) Determinare la funzione $f: S^1 \longrightarrow S^1 \cup X$ che gira una volta lungo S^1 in verso positivo e due volte lungo la circonferenza X in verso negativo





4) Determinare la funzione $f: S^1 \longrightarrow S^1 \cup X \cup Y$, X ed Y circonferenze di raggio 1; con:



$f(z)$ che "gira" 1 volta su S^1 in verso positivo, mezzo giro nella semicirconferenza superiore di X negativamente, due giri su Y in verso positivo e mezzo giro sulla semicirconferenza inferiore di X in verso negativo

4A

FUNZIONI DI UNA VARIABILE COMPLESSA
ESERCIZI

1 Funzioni olomorfe e campi di velocità

Esercizio 1 *a. Sia $f(z) = e^z$ il potenziale complesso di velocità (cioè la funzione olomorfa la cui parte reale e immaginaria rappresentano il potenziale di velocità e la funzione di corrente del moto stazionario piano non vorticoso di un liquido incomprimibile). Determinare il campo di velocità $\underline{v}$.*

b. Fare poi lo stesso per la funzione $f(z) = 1/z$, determinando anche le linee di livello della funzione di corrente, disegnandole.

Esercizio 2 *Sia*

$$f(z) = e^{1/z}$$

un potenziale complesso di velocità. Determinare il campo di velocità $\underline{v}$ e la funzione di corrente.

Esercizio 3 *Sia*

$$f(z) = e^{z^2}$$

un potenziale complesso di velocità. Determinare il campo di velocità $\underline{v}$ e scrivere le equazioni delle linee di livello della funzione di corrente (non si chiede di disegnarle).

Esercizio 4 *Sia*

$$f(z) = \frac{z + 2i}{iz + 1}$$

un potenziale complesso di velocità. Determinare il campo di velocità $\underline{v}$ e le linee di livello della funzione di corrente, riconoscendo di che tipo di curve si tratta e se possibile disegnandole.

Svolgimento

Esercizio 1.

a. Sia $f(z) = e^z$ il potenziale complesso di velocità (cioè la funzione olomorfa la cui parte reale e immaginaria rappresentano il potenziale di velocità e la funzione di corrente del moto stazionario piano non vorticoso di un liquido incomprimibile). Determinare il campo di velocità $\underline{v}$.

b. Fare poi lo stesso per la funzione $f(z) = 1/z$, determinando anche le linee di livello della funzione di corrente, disegnandole.

a.

$$\begin{aligned} f(z) &= e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y \\ \phi(x,y) &= e^x \cos y \text{ potenziale di velocità} \\ \psi(x,y) &= e^x \sin y \text{ funzione di corrente} \end{aligned}$$

Il campo di velocità è:

$$\underline{v}(x,y) = \nabla\phi(x,y) = (e^x \cos y, -e^x \sin y).$$

b.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \\ \phi(x,y) &= \frac{x}{x^2+y^2} \text{ potenziale di velocità} \\ \psi(x,y) &= -\frac{y}{x^2+y^2} \text{ funzione di corrente} \end{aligned}$$

Il campo di velocità è:

$$\underline{v}(x,y) = \nabla\phi(x,y) = \left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right).$$

Le linee di corrente sono le linee di livello

$$\begin{aligned} \psi(x,y) &= c \\ -\frac{y}{x^2+y^2} &= c \\ x^2+y^2-\frac{y}{c} &= 0 \end{aligned}$$

e sono le circonferenze passanti per l'origine e con centro sull'asse y: