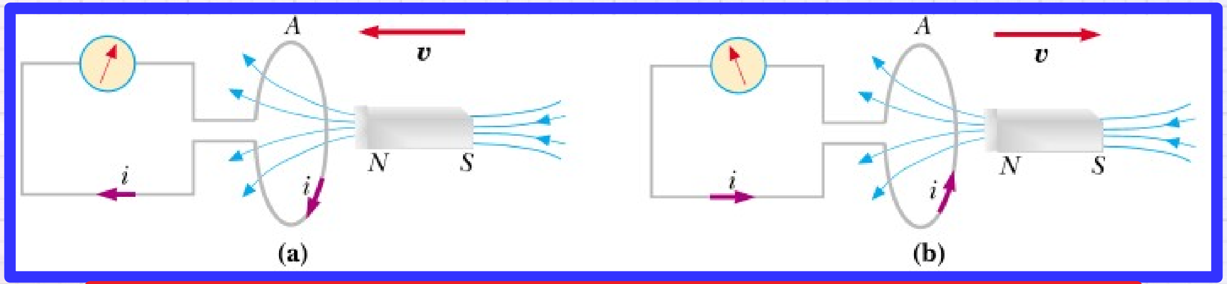
Campi variabili nel tempo

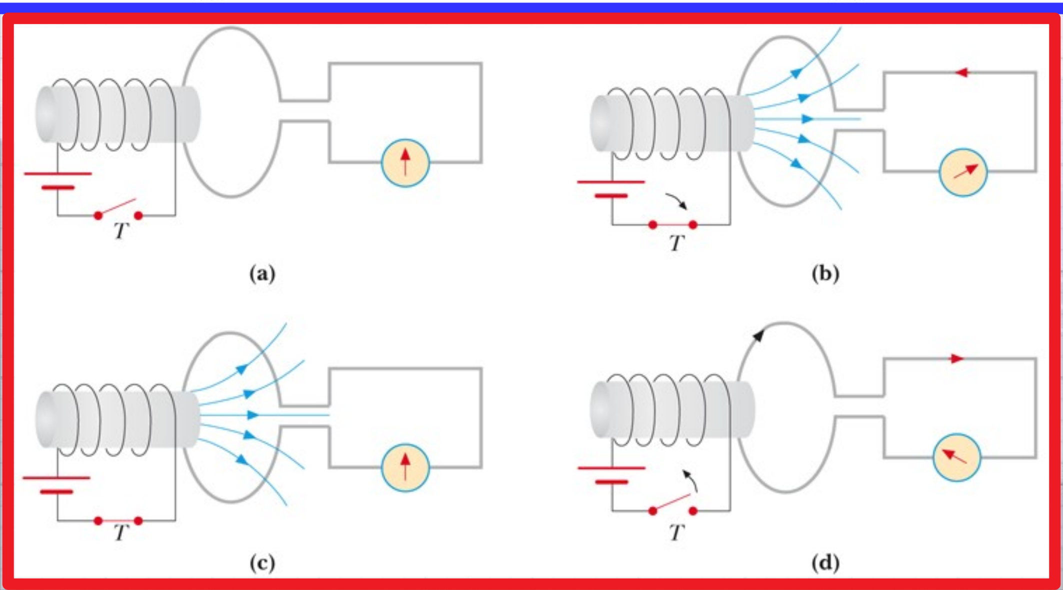
- Abbiamo fin qui considerato campi elettrici e magnetici stazionari (costanti nel tempo), generati rispettivamente da cariche fisse e cariche in moto stazionario.
- In questa particolare situazione i campi elettrico e magnetico sono scorrelati: tutte le equazioni incontrate contengono solo campi elettrici **o** solo campi magnetici.

- Se consideriamo invece campi variabili nel tempo il campo elettrico e quello magnetico sono sempre accoppiati. Nel seguito ricaveremo, attraverso lo studio di alcuni fenomeni sperimentali di base, le relazioni che li collegano. Si tratterà di apportare modifiche alle equazioni di Maxwell statiche che abbiamo già incontrato.

Legge di Faraday

- Esperimenti dell’induzione elettromagnetica





Legge di Faraday

- Numerosi esperimenti come quelli illustrati nella pagina precedente hanno permesso di evidenziare la relazione quantitativa tra la variazione del flusso magnetico concatenato con la spira *s* e la forza elettromotrice generata:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \qquad \text{con} \qquad \Phi_B = \int_\Sigma \vec{B} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma$$

- Se la spira (di resistività finita R) è chiusa, sarà percorsa dalla corrente:

$$i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi_B}{dt}$$

- Altrimenti ai capi dell'interruzione si sviluppa la differenza di potenziale

$$V = \mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Legge di Faraday

- Viene quindi indotto un campo elettrico E_i

$$\mathcal{E}_i = \oint_s \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$$

- Osservazione: il campo elettrico indotto esiste a prescindere dall'esistenza di un conduttore. Qualunque sia la linea chiusa *s* e la superficie ad essa appoggiata Σ, vale:

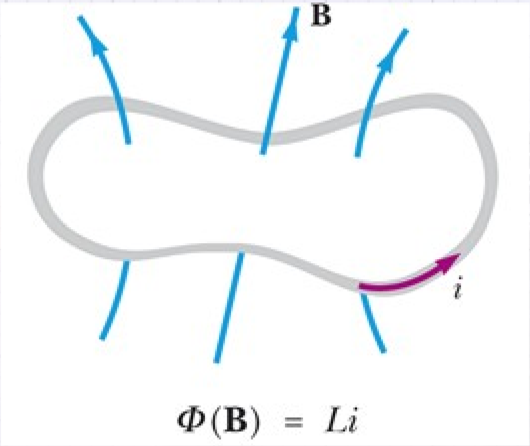
3rd Maxwell equation
integral

$$\oint_s \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_\Sigma \vec{B} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma$$

Autoinduzione

- Il flusso del campo magnetico prodotto da un circuito concatenato col circuito stesso (autoflusso) vale:

$$\Phi_B = \int_\Sigma \left(\oint \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{u}_r}{r^2} \right) \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma$$



- Se esso varia nel tempo genera nel circuito la forza elettromotrice indotta:

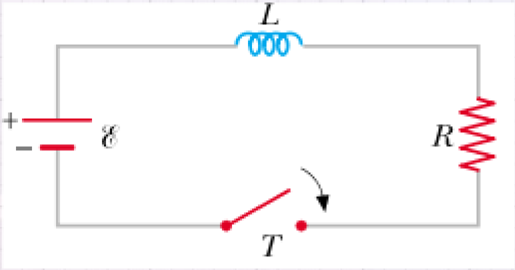
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int_\Sigma \left(\oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{di}{dt} \frac{d\vec{s} \times \vec{u}_r}{r^2} \right) \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma = -L \frac{di}{dt}$$

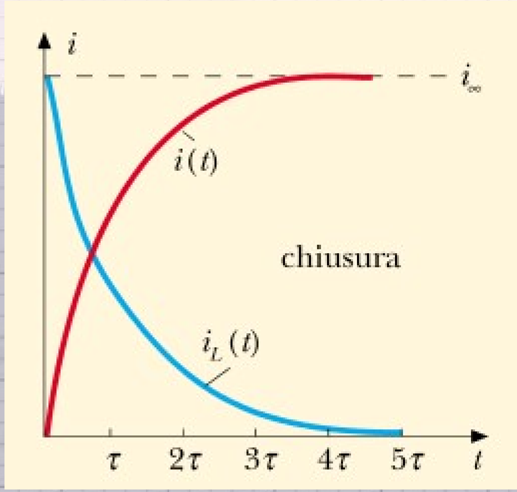
Autoinduzione

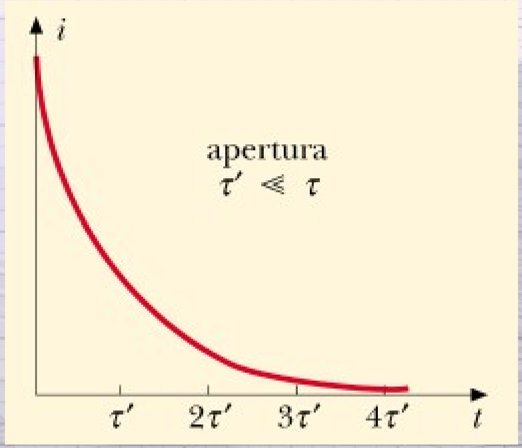
- La costante di proporzionalità che abbiamo introdotto (L) dipende solo dalla geometria del circuito e dalle proprietà magnetiche del mezzo in cui è (eventualmente) immersa. Si chiama **induttanza** del circuito.
- Unità di misura: henry (H)

$$1\mathrm{H} = 1\frac{\mathrm{V\ s}}{\mathrm{A}} = 1\Omega\ \mathrm{s}$$

Circuito RL


L
+
–
ℰ
R
T


i
i_∞
$i(t)$
chiusura
$i_L(t)$
τ
2τ
3τ
4τ
5τ
t

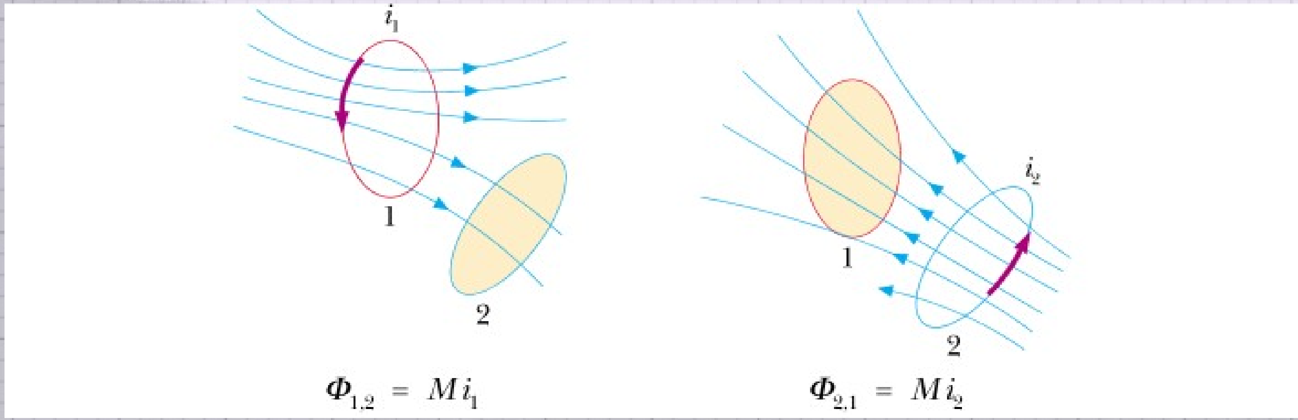

i
apertura
τ′ ⩽ τ
τ′
2τ′
3τ′
4τ′
t

Induzione mutua

- Il flusso del campo magnetico prodotto da un circuito (1) concatenato con un altro circuito (2) vale:

$$\Phi_{B1,2} = \int_{\Sigma} \vec{B}_1 \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma$$

dove B_1 è la frazione di campo magnetico prodotta dal circuito 1 concatenata con il circuito 2.



Induzione mutua

- Per la legge di Ampere-Laplace il campo magnetico generato è proporzionale alla corrente nel primo circuito i_1 e la frazione concatenata col secondo circuito dipende solo da fattori geometrici. Avremo quindi:

$$\Phi_{B1,2} = M_{1,2} i_1$$

con $M_{1,2}$ coefficiente di mutua induzione, che congloba tutti i fattori geometrici. In caso di campi variabili nel tempo si ha:

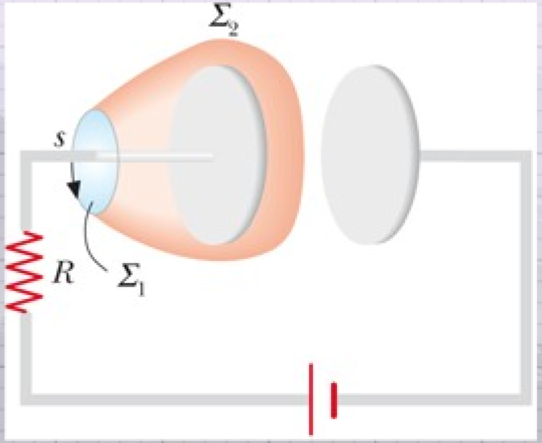
$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_{B1,2}}{dt} = -M_{1,2}\frac{di_1}{dt}$$

Legge di Ampere-Maxwell

- Abbiamo già incontrato la legge di Ampere (quarta eq. di Maxwell statica):

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

Essa non vale quando i campi dipendono dal tempo e deve essere modificata.



Legge di Ampere-Maxwell

- Dalla legge di Gauss il flusso del campo elettrico su una superficie chiusa come la $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ precedente vale:

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

- La carica q sulle armature del condensatore varia nel tempo, generando una corrente interna

$$i_s = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

- L'incongruenza vista sopra può essere rimossa includendo nella legge di Ampere questo termine, ottenendo quindi:

Legge di Ampere-Maxwell

4th Maxwell equation
integral

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(i + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$$

Equazioni di Maxwell

- Abbiamo introdotto le correzioni necessarie alla terza e quarta equazioni di Maxwell. Possiamo ora riassumerle qui in maniera completa, in forma integrale...

$$\oiint \vec{E} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{1}$$

$$\oiint \vec{B} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma = 0 \tag{2}$$

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{3}$$

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(i + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right) \tag{4}$$

Equazioni di Maxwell

- … e differenziale:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{1}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{\mathrm{j}} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \tag{4}$$

Onde elettromagnetiche nel vuoto

- Accenniamo infine ad una importante conseguenza delle equazioni di Maxwell. Ricordando l'uguaglianza tra operatori differenziali

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot - \nabla^2$$

e sostituendo la quarta eq. di Maxwell nel rotore della terza, tenuto conto della prima, si ha:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

equazione delle **onde elettromagnetiche** (EM).

Onde EM piane nel vuoto

- Una possibile soluzione: onde piane

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 e^{i(kx-\omega t)}, \qquad \frac{k^2}{\omega^2} = \mu_0 \epsilon_0$$

- dovendo essere $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$ (1° eq. di Maxell) risulta:

$$E_{0x} = 0$$

le onde EM sono onde **trasversali**.

Onde EM piane nel vuoto

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{E_y}{\partial x}\hat{z} - \frac{E_z}{\partial x}\hat{y} = ik(E_y\hat{z} - E_z\hat{y})$$

per cui dalla 3° eq. di Maxwell, integrando rispetto al tempo, si ha:

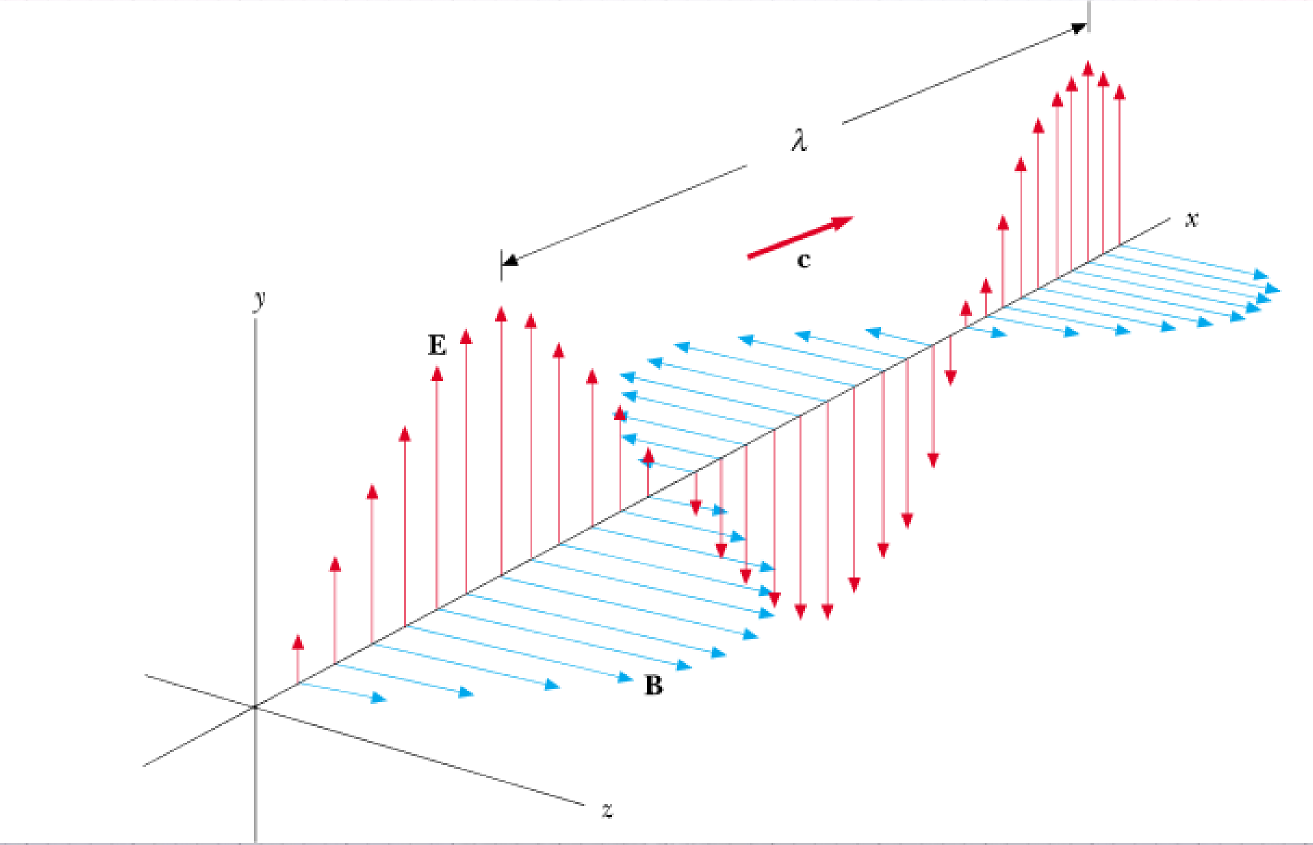
$$i\omega\vec{B}(x,t) = ik\left(E_y\hat{z} - E_z\hat{y}\right)$$

$$\vec{B}(x,t) = \vec{B}_0 e^{i(kx-\omega t)}, \qquad \vec{B}_0 = \frac{k}{\omega}\left(E_{0y}\hat{z} - E_{0z}\hat{y}\right), \qquad \vec{B}_0 \perp \vec{E}_0$$

Onde EM piane nel vuoto

- Ricordiamo alcune grandezze caratteristiche delle onde:
  - lunghezza d'onda $\lambda = 2\pi/k$
  - frequenza $f = \omega/2\pi$
  - velocità $c = \sqrt{\omega/k} = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = 2.99792 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Onde EM piane nel vuoto



Spettro delle onde EM