Università degli Studi di Ferrara

Corso di Laurea in Matematica

Laboratorio di Didattica della Matematica

Introduzione a Cabri II Plus: un programma per l'insegnamento della geometria

Luigi Tomasi



Sommario

1. Introduzione	5
2. Informazioni su Cabri Géomètre e sulle versioni del programma	5
3. La finestra di lavoro di Cabri Géomètre II Plus	9
3.1 La barra dei menu di Cabri Géomètre II Plus	10
3.2. La barra degli strumenti di Cabri Géomètre II Plus	14
3.2.1. La casella degli strumenti "Manipolazione"	15
3.2.2. La casella degli strumenti "Punti"	15
3.2.3. La casella degli strumenti "Oggetti rettilinei"	
3.2.4. La casella degli strumenti "Curve"	
3.2.5. La casella degli strumenti "Costruzioni"	/ I
3.2.0. La casella degli strumenti "Macro"	10 19
3.2.7. La casella degli strumenti "Proprietà"	17 19
3.2.9. La casella degli strumenti "Misura"	
3.2.10. La casella degli strumenti "Testo e simboli"	
3.2.11. La casella degli strumenti "Attributi"	
4. Primi esempi con l'uso degli strumenti: i punti notevoli di un triangolo	23
4.1 Esercizi su costruzioni fondamentali	25
4.2. La retta di Eulero	
5. Punti liberi e punti vincolati	
5.1. Esercizi	34
6. Le macro-costruzioni	
6.1. Come si definisce una macro-costruzione	
6.2. La memorizzazione di figure e macro	40
6.3. Esercizi sulle macro-costruzioni	41
7. I luoghi geometrici con Cabri Géomètre	42
7.1. Costruzioni dell'ellisse e dell'iperbole	43
7.2. Compasso ellittico e asteroide inviluppo	46
7.3. Esercizi sui luoghi geometrici	47
8. La misura e il trasporto di misura	51
9. La "animazione" di una figura geometrica	55
10. Le trasformazioni geometriche del piano	57
11. La verifica di proprietà geometriche	62

12. Lo strumento Tabella	65
13. La geometria analitica con <i>Cabri Géomètre</i>	66
13.1 La retta come funzione	67
13.2 Esempio di funzione lineare	
13.3 Funzioni quadratiche: area di un quadrato in funzione del lato	70
13.4 Famiglia di parabole con vertice nell'origine degli assi	71
14. La calcolatrice	74
15. Grafici di funzione con Cabri Géomètre	75
16. Conclusioni	78
Riferimenti bibliografici	79
Siti di riferimento in Internet	



1. Introduzione

In queste pagine sono descritte le caratteristiche principali del programma *Cabri Géomètre II Plus* nell'ultima versione per Windows, e si illustrano le sue potenzialità per l'insegnamento e l'apprendimento della geometria in tutti i tipi di scuola, ma in particolare per quella secondaria.

Il software *Cabri Géomètre* ha una notevole valenza didattica perché permette di vedere in maniera vivace e dinamica, date le caratteristiche di variabilità delle figure che si possono eseguire, le proprietà delle figure geometriche, presentate spesso in modo statico nell'insegnamento nella scuola media superiore. Il programma può essere ben integrato nell'insegnamento della geometria sia nel biennio che nel triennio di scuola secondaria di secondo grado, permettendo anche un insegnamento che faccia uso delle trasformazioni geometriche. Sembra largamente accettato dai docenti che l'introduzione di questo software favorisca un insegnamento, ed un apprendimento, più vivace e dinamico della geometria. In questo senso ci sono oggi, in Italia e nel mondo, moltissime esperienze di introduzione di *Cabri Géomètre* nell'insegnamento della geometria a tutti i livelli di scuola.

I libri a disposizione, i materiali e le riviste sono oggi, a quasi vent'anni dalla diffusione della prima versione (1988) di *Cabri Géomètre*, molto numerosi; si rimanda in particolare ai riferimenti bibliografici. Nella parte finale di questa dispensa vengono anche segnalati alcuni siti Internet che presentano materiali interessanti sul programma e sul suo insegnamento.

2. Informazioni su Cabri Géomètre e sulle versioni del programma

La prima versione del programma *Cabri Géomètre* è stata realizzata presso il Laboratoire de Structure Discrète et de Didactique de l'Université "Joseph Fourier" di Grenoble (Francia) da Yves Baulac, Franck Bellemain e Jean-Marie Laborde nel 1988. Il nome è un acronimo ricavato dal sottotitolo francese del programma: "CAhier de BRouillon Interactif de Géométrie" (Quaderno di appunti interattivo di geometria).

Inizialmente, negli anni Ottanta, era stato sviluppato un programma per lo studio dei grafi, che permetteva di deformare una configurazione con lo spostamento di uno dei punti base del grafo; Jean-Marie Laborde, l'autore principale del software, ha pensato di utilizzare le stesse procedure grafiche per un programma che consentisse di realizzare figure geometriche nel piano e di variarle istantaneamente, muovendo i punti base della costruzione. Da questa idea è nato *Cabri Géomètre*. Sviluppato dapprima in ambiente Macintosh, successivi miglioramenti hanno condotto alla versione 1.7 di *Cabri Géomètre* per il sistema operativo MS-DOS (inizi degli anni Novanta). Questa versione del programma è stata tradotta in decine di lingue tra cui l'italiano (a cura di Paolo Boieri, Casa Editrice Loescher, Torino 1993) e ha suscitato un grande interesse

anche in Italia, sia nella scuola secondaria superiore che nella scuola media. La notevole diffusione e l'interesse per il programma hanno indotto gli autori a continuare a perfezionare il programma ed a preparare nuove versioni. Notevoli miglioramenti funzionali sono stati aggiunti nelle successive versioni di *Cabri Géomètre* per Macintosh, fino alla versione 2.1 (non tradotta in italiano).

Nel 1997 è stata diffusa in Italia la versione *Cabri Géomètre II*, inizialmente per il sistema MS-DOS e nel marzo 1998 per il sistema Windows e Mac, in italiano e contemporaneamente nelle altre lingue più diffuse. I diritti di diffusione in tutto il mondo del programma, a partire dalla versione II per MS-DOS, sono stati acquisiti dalla Texas Instruments che ha inserito, nel 1996, una versione particolare di *Cabri Géomètre II* nella sua innovativa calcolatrice simbolico grafica TI-92.



Figura 1. Schermo iniziale della versione Cabri Géomètre II

Con la versione *Cabri Géomètre II* del 1998 il software subisce una sostanziale evoluzione: con la versione II ci troviamo di fronte ad un software che per molti aspetti è completamente nuovo, sia per l'interfaccia e le funzionalità che per l'impianto di base. Nel passaggio a *Cabri Géomètre II* gli autori hanno completamente ripensato il programma che, pur mantenendo la caratteristica essenziale di "micromondo modulare" per lo studio della geometria, presenta però molte nuove opzioni, alcune delle quali sono una naturale evoluzione delle versioni precedenti –aderendo alla tendenza dei prodotti informatici ad un continuo miglioramento- mentre altre sono radicalmente innovative.

Dalla fine 2002 è disponibile una nuova versione del software, con il nome *Cabri Géomètre II Plus*. Si tratta di una versione potenziata del software descritto in precedenza, che migliora ulteriormente le prestazioni del software, estendendo ulteriormente il suo campo di applicazione alla geometria analitica, alle funzioni e alla grafica.

Descriviamo qui di seguito le principali novità introdotte in *Cabri Géomètre II Plus* rispetto alla versione precedente. L'evoluzione tecnologica dei computer e del software, oltre alle richieste degli utenti –in larga parte insegnanti oltre che studenti- hanno condotto gli autori a migliorare ulteriormente la versione precedente del software; in questo modo si è arrivati alla versione *Cabri Géomètre II Plus*



Figura 2. Schermo iniziale di Cabri Géomètre II Plus.

Le novità salienti di Cabri Géomètre II Plus sono le seguenti:

- Si possono usare icone piccole oppure icone grandi.
- E' stato introdotto il nuovo menu **Sessione**, che serve per registrare, stampare o rivedere una sessione di lavoro con *Cabri*.
- Nel menu File è presente la nuova voce Esporta per calcolatrice..., che consente di salvare un file nel formato delle calcolatrici TI-92, TI-89, TI-83, Voyage 200,... della Texas Instruments.
- Nel menu **Opzioni** è stata inserita la nuova voce **Mostra/Nascondi la descrizione della figura** che permette di visualizzare una finestra di testo con la descrizione della figura.
- Nelle **caselle degli strumenti** sono stati aggiunti alcuni nuovi strumenti:
 - Espressione (nella casella degli strumenti Testo e simboli);
 - Applica un'espressione (nella casella Misura);
 - Pulsante Mostra/Nascondi (nella casella Attributi);
 - Colore (nella casella Attributi).

Altri strumenti, pur essendo contrassegnati con la stessa icona e lo stesso nome che avevano nella versione precedente, sono stati sottoposti a radicali innovazioni, in particolare i seguenti: **Luogo**, **Animazione multipla**, tutti gli strumenti che riguardano i colori, le tavolozze delle proprietà grafiche e altri ancora collegati a questi, come ad esempio **Coordinate o equazioni**, ...

Inoltre, in questa versione, analogamente a quel che succede in altri software, sono stati introdotti i "menu contestuali" degli oggetti, attivabili con il tasto destro del mouse, che permettono di scegliere le varie proprietà in modo facile e interattivo.

Molto importanti sono le novità di *Cabri Géomètre II Plus* che riguardano i luoghi. Con la versione *Cabri Géomètre II Plus* quasi tutte le limitazioni sui luoghi presenti nella precedente versione sono state superate. Ora è possibile creare l'intersezione di luoghi e ottenere le equazioni di curve algebriche (fino al sesto grado) tracciate come luoghi; inoltre, il tracciamento dei luoghi è stato migliorato notevolmente. Il migliore "rendering" di un luogo è stato automatizzato, per ottenere una visualizzazione –e anche una stampa- con una precisione ottimizzata, senza bisogno dell'intervento dell'utente. Queste novità hanno portato ad altri cambiamenti sostanziali anche nello strumento **Coordinate o equazioni** che è stato esteso ad alcuni luoghi algebrici.

Altre innovazioni introdotte sono le seguenti:

- Migliorata la risoluzione delle ambiguità nelle figure
- Rette "intelligenti"
- Oggetti e figure più ricchi di proprietà
- Immagini allegate a degli oggetti e immagine di sfondo di una figura
- Nomi per ogni oggetto
- Pulsante di tipo "mostra/nascondi"
- Possibilità di operare Zoom ingrandimento (Ctrl + +), Zoom riduzione (Ctrl + -)
- Possibilità di trasformare la figura in grassetto per proiezione (Ctrl+D)
- Cabri II Plus apre qualunque tipo di file prodotto con le precedenti versioni di Cabri.

Nel seguito ci riferiremo quasi sempre alla versione *Cabri Géomètre II Plus* per Windows. Tuttavia, molte delle attività proposte possono essere svolte anche con la versione precedente di *Cabri*. La versione *Cabri Géomètre II Pus* esiste anche per Macintosh.

Naturalmente tutto quello che si può fare con la versione *Cabri II* si può realizzare anche con la versione più recente, ossia con *Cabri Géomètre II Plus*.

Nella bibliografia finale si forniscono tutte le indicazioni sulle versioni del programma disponibili in italiano.

3. La finestra di lavoro di Cabri Géomètre II Plus

Dopo aver installato il programma, di solito viene creato automaticamente un collegamento a *Cabri II Plus* sul "desktop" di Windows. In questo modo risulta facile eseguire il programma perché basta fare un doppio clic sull'icona del collegamento a *Cabri II Plus*.



Figura 3.1 La finestra di lavoro di Cabri Géomètre II Plus.

All'inizio di una sessione di lavoro con *Cabri Géomètre II Plus*, una volta avviato il programma, nella finestra di applicazione del programma appaiono:

- la barra del titolo (è la prima riga in alto);
- la barra dei menu; contiene le sei voci: File, Edita, Opzioni, Sessione, Finestra e ?(Aiuto);
- la barra degli strumenti (presenta undici icone che si riferiscono ad altrettante caselle degli strumenti);
- la barra degli attributi ossia delle proprietà grafiche degli oggetti (a sinistra). Per visualizzarla si può premere il tasto F9;
- la zona di lavoro rettangolare con i cursori a destra e in basso per visualizzare nello schermo il foglio di lavoro virtuale;
- la barra di stato (in basso);
- la finestra di aiuto (appare in basso premendo il tasto F1);
- la finestra di descrizione della figura (appare a destra premendo il tasto F10).

Nella barra del titolo compare l'icona del programma, seguita dal nome del software "Cabri Géomètre II Plus" e dal nome del file (nella figura 3.1 il nome del file è studio-area.fig). All'inizio, se non si apre alcuna figura, viene automaticamente aperto un file di nome "Figura $N^{\circ}1$ ".

La seconda riga dello schermo contiene la barra dei menu che viene dettagliatamente descritta nel paragrafo seguente.

3.1 La barra dei menu di Cabri Géomètre II Plus



Figura 3.2 La barra del titolo e la barra dei menu di Cabri II Plus.

La barra dei menu è costituita da sei voci principali: <u>File</u>, <u>Edita</u>, <u>Opzioni</u>, <u>Sessione</u>, Fi<u>n</u>estra e <u>?</u> (Aiuto), ognuna delle quali contiene diverse voci, che possono essere visualizzate cliccando, tramite il mouse, sulle opzioni del menu.

Menu <u>File:</u> Nuovo, Apri, Chiudi, Salva, Salva con nome..., Esporta per la calcolatrice..., Ripristina dall'archivio, Mostra il disegno..., Imposta pagina..., Stampa..., Esci.

(編)	Cabri Géomètre II Plus -	[Figura Nº	1]
1	<u>File Edita O</u> pzioni <u>S</u> ession	e Fi <u>n</u> estra	2
R	<u>N</u> uovo Apri Chiudi	Ctrl+N Ctrl+O Ctrl+F4	
	<u>S</u> alva Sal <u>v</u> a con nome Esporta per la calcola <u>t</u> rice Ripristina dall'archivio	Ctrl+S	
	<u>M</u> ostra il disegno Imposta pagina Stampa	Ctrl+P	
	<u>E</u> sci	Alt+F4	

Il menu **<u>File</u>** resta sostanzialmente immutato rispetto alle versioni precedenti del programma, con l'aggiunta della voce **Esporta per la calcolatrice...** Il menu **File** contiene comandi relativi alle operazioni di apertura, chiusura, salvataggio, stampa e visualizzazione delle costruzioni che collegano *Cabri* all'esterno.

Menu <u>Edita</u>: *Ripristina*, *Taglia*, *Copia*, *Incolla*, *Cancella*, *Seleziona tutto*, *Ricostruzione passo a passo*, *Ridisegna tutto*.

🎊 Cabi	ri Géomètre II Plus - [l	Figura Nº1 *]		
睯 Eile	Edita Opzioni Sessione	Fi <u>n</u> estra <u>?</u>		
	<u>R</u> ipristina	Ctrl+Z	🦲 ? 🖛 🗛 斗	2
12	Taglia	Ctrl+X		Ţ
	Co <u>p</u> ia	Ctrl+C		
	I <u>n</u> colla	Ctrl+V	1	
	<u>C</u> ancella	Canc	1	
	<u>S</u> eleziona tutto	Ctrl+A		
	<u>R</u> icostruzione passo a p	asso		
	Ri <u>d</u> isegna tutto	Ctrl+F		

Il menu **<u>E</u>dita** contiene comandi relativi alla modifica della sequenza costruttiva, comandi per l'esportazione di elementi nel disegno e negli Appunti e comandi per la selezione o eliminazione di parti del disegno.

Il menu **<u>E</u>dita** ha numerose funzionalità tipiche dell'interfaccia dei programmi di scrittura e di disegno più recenti: in particolare è possibile tagliare, copiare e incollare singoli oggetti della figura oppure tutti gli oggetti contenuti all'interno di un rettangolo di selezione. In questo menu, si trova anche la voce **Ricostruzione passo a passo** che permette di rivedere la costruzione della figura su cui si sta lavorando passo a passo, con la possibilità di riprendere la figura iniziale allo stadio voluto.

Menu **Opzioni:** *Mostra/Nascondi la barra degli attributi (F9), Mostra la descrizione della figura (F10), Preferenze..., Configurazione degli strumenti..., Lingua..., Carattere....*

🎆 Cabri Géomètre II Plus - [Figura Nº1 *]			
뛀 <u>F</u> ile <u>E</u> dita	Opzioni Sessione Finestra ?		
₽.	Mostra la barra degli attributi F9 Mostra la descrizione della figura F10 Preferenze		
	Configurazione degli strumenti Lingua		
	<u>C</u> arattere		

Il menu **Opzioni** contiene comandi relativi alla visualizzazione degli attributi di ogni strumento della costruzione, all'impostazione dei valori predefiniti e alla definizione del contenuto e della configurazione della barra degli strumenti. In tale menu si può scegliere anche la lingua ed il tipo di carattere da usare per i nomi degli oggetti geometrici e per i testi da mettere nelle figure.

Tramite **Mostra/Nascondi la barra degli attributi** (F9) si visualizza (o si nasconde) una barra di strumenti relativa all'aspetto degli oggetti, che compare in alto a sinistra nel riquadro del disegno.

In questo menu è stata aggiunta la voce **Mostra la descrizione della figura** (F10) che fa apparire una finestra che contiene la descrizione testuale della figura. Se si preme di nuovo F10 la finestra viene nascosta. Il contenuto della finestra di descrizione testuale può essere copiato e incollato in un programma di elaborazione di testi, ad esempio in MS-Word.

Attivando **Preferenze** compare una complessa schermata in cui si possono selezionare varie caratteristiche del programma: il modo e la precisione con cui sono tracciati i luoghi geometrici, le unità in cui sono espresse le misure e le cifre decimali della loro visualizzazione, varie scelte riguardanti la geometria analitica tra le quali è opportuno ricordare il tipo di sistema di riferimento (cartesiano o polare) e il formato delle equazioni di rette e coniche.

Menu <u>Sessione</u>: Inizia la registrazione... (F2), Leggi una sessione... (F4), Stampa una sessione... (F5), Precedente (F6), Successiva (F7).

Questo menu è stato introdotto nella versione *Cabri Géomètre II Plus*. È un menu che permette di registrare una sessione di lavoro con il software. Se si seleziona *Inizia la registrazione... (F2)* il software registra, ad intervalli di tempo regolari, la figura in esecuzione. Questa sessione di lavoro può poi essere letta, istantanea per istantanea, mediante la voce *Leggi una sessione... (F4)* oppure può essere stampata. Questo menu che può servire per ricavare dei protocolli didattici sull'uso del software da parte degli allievi.



Menu **<u>Finestra</u>**: Sovrapponi, Affianca Orizzontalmente, Affianca Verticalmente, Chiudi tutto, Figura N° 1, Figura N° 2,.....

È il menu che permette di gestire le finestre, simile a quanto si ritrova in altri programmi per Windows. Le finestre, che contengono le figure, possono essere più d'una. Si può chiedere che vengano sovrapposte (è la modalità più usata di solito), affiancate verticalmente od orizzontalmente, oppure chiuse.

🎆 Cabri Géomètre II Plus - [Figura Nº1 *]			
🔯 Eile Edita <u>O</u> pzioni <u>S</u> essione	Fi <u>n</u> estra <u>?</u>		
	Sovrapponi Affianca Orizzontalmente Affianca Verticalmente Chiudi tutto	cm Abi 🕂	
	2 Figura №2]	

Menu ? (Aiuto): Aiuto (F1), Informazioni su Cabri Géomètre II Plus

È il menù che serve per attivare l'Help e per richiedere le informazioni sul programma. Consente di visualizzare utili informazioni su ogni icona della barra degli strumenti e sul software *Cabri*.

🎆 Cabri Géomètre II Plus - [Figura Nº1 *]			
🔯 Eile Edita Opzioni Sessione Finestra	2		
	<u>A</u> juto F1		
	Informazioni su Cabri Géomètre II Plus		

La voce **Aiuto (F1)** ci consente di attivare e disattivare i messaggi di aiuto che ora compaiono nelle ultime tre righe dello schermo e sono visualizzati anche durante la realizzazione; questa caratteristica aiuta l'utente che può seguire passo a passo le indicazioni dell'Help.

3.2. La barra degli strumenti di Cabri Géomètre II Plus

La barra degli strumenti contiene undici icone che permettono di aprire altrettante caselle di strumenti: Manipolazione, Punti, Oggetti rettilinei, Curve, Costruzioni, Trasformazioni, Macro, Proprietà, Misura, Testo e simboli, Attributi. Con *Cabri II Plus* si possono usare icone grandi oppure icone piccole. Per questo si porta il cursore del mouse sopra la barra degli strumenti; appare la scritta "Icone piccole" oppure "Icone grandi"; si clicca e si ottiene la barra voluta. Questa configurazione viene riproposta nella successiva sessione di lavoro con *Cabri*.



Facendo clic su ognuna di esse e tenendo premuto il tasto sinistro del mouse, viene visualizzato un menu a tendina che contiene diversi "strumenti" che permettono un gran numero di costruzioni geometriche e di altre opzioni necessarie nello studio della geometria e oltre....

Ogni icona corrisponde ad una parola (o un gruppo di parole) che permette di descrivere lo strumento. Questo è fondamentale per l'insegnamento della geometria ad allievi che manipolano gli oggetti nello stesso tempo in cui apprendono la terminologia che permette di parlare di tali oggetti.

Retta
Segmento
Semiretta
Vettore
Triangolo
Poligono
Poligono regolare

<u>∧</u>
Retta
Segmento
Semiretta
Vettore
Triangolo
Poligono
Poligono regolare

Aprendo una delle caselle degli strumenti (occorre cliccare con il tasto sinistro del mouse sopra l'icona di una casella) si ottiene una lista di oggetti. Se si sceglie, con un clic, un altro oggetto, l'icona dell'oggetto scelto sostituisce l'icona iniziale nella barra degli strumenti. Un semplice rapido "clic" su un'icona seleziona lo strumento corrispondente.

Nei seguenti paragrafi descriviamo le undici caselle degli strumenti di Cabri Géomètre II Plus.

3.2.1. La casella degli strumenti "Manipolazione"

Contiene gli strumenti per la selezione e per la manipolazione degli oggetti che compongono la figura; si utilizzano tramite il mouse: *Puntatore, Ruota, Dilata, Ruota e dilata.* Lo strumento *Puntatore* può essere considerato il più importante strumento di *Cabri* perché costituisce la "porta" di accesso a qualsiasi operazione sulle figure.

Ø	Puntatore	Seleziona e sposta gli oggetti (traslazione).
() 4	Ruota	Fa ruotare un oggetto attorno al suo baricentro o a un punto.
100	Dilata	Dilata o riduce un oggetto attorno al suo baricentro o ad un punto. Omotetia su un oggetto rispetto al suo centro.
(†) 2	Ruota e dilata	Ruota e dilata (riduce) simultaneamente un oggetto attorno al suo centro geometrico o ad un punto (combinazione di omotetia e rotazione)

3.2.2. La casella degli strumenti "Punti"

Contiene strumenti per la costruzione di un punto libero (2 gradi di libertà), di un punto su un oggetto (un grado di libertà) o di intersezione tra due oggetti. La casella degli strumenti *Punti* contiene le voci: *Punto, Punto su un oggetto* e *Intersezione di due oggetti*.

Lo strumento *Punto* definisce un punto libero, un punto su un oggetto oppure un punto di intersezione di due oggetti (si osservi che non è necessario indicare esplicitamente questi oggetti, a meno che non esistano situazioni di ambiguità). Lo strumento *Punto* è quindi uno strumento "multiplo" perché è in grado di creare diversi tipi di punto. In particolare, se necessario, possiamo ottenere un solo dei punti di intersezione tra due oggetti, anche quando le intersezioni sono due, come ad esempio nel caso di retta-circonferenza.

•	Punto Crea un punto libero sul foglio di lavoro, su un oggetto o	
		nell'intersezione di due oggetti (in relazione alla posizione del
		puntatore).
	Punto su un oggetto	Costruisce un punto libero su un oggetto (selezionare un punto su un oggetto esistente).
+	Intersezione di due oggetti	Costruisce il punto o i punti di intersezione di due oggetti (selezionare i due oggetti).

3.2.3. La casella degli strumenti "Oggetti rettilinei"

Contiene strumenti per la costruzione di oggetti "rettilinei", che si possono ottenere da parti di retta: *Retta, Segmento, Semiretta, Vettore, Triangolo, Poligono, Poligono regolare.*

Oltre agli strumenti familiari di *Retta*, *Segmento*, *Triangolo*, già presenti nelle versioni iniziali di *Cabri*, troviamo i seguenti strumenti:

- Vettore: si definisce assegnandone il punto di applicazione e il secondo estremo. Viene utilizzato nella traslazione (che può essere definita segnando un oggetto da traslare e un vettore); possiamo inoltre operare sui vettori, determinando la somma di due di essi, grazie ad una voce che compare nella casella degli strumenti "Costruzioni".
- *Semiretta*: si definisce assegnandone l'origine e un secondo suo punto (di cui però, una volta costruita la semiretta, non rimane traccia).
- Poligono: è possibile definire un poligono (anche non convesso oppure intrecciato), assegnandone i vertici e "chiudendolo" con un clic del mouse sul primo vertice, oppure con un doppio clic sull'ultimo vertice.
- Poligono regolare: si costruisce un poligono regolare inscritto in una circonferenza assegnando il centro della circonferenza e un punto su di essa, che è uno dei vertici del poligono. Se si sposta, con il mouse, il secondo estremo del segmento che viene tracciato è possibile definire il numero dei lati, da 3 a 30 per i poligoni convessi, oppure ottenere dei poligoni stellati.

	Retta	Costruisce la retta determinata da un punto e una direzione (scelta da un secondo clic) o un secondo punto.
-	Segmento	Costruisce il segmento determinato da due punti.
-	Semiretta	Costruisce la semiretta determinata da un punto e, una direzione o un secondo punto.
	Vettore	Costruisce il vettore determinato da due punti.
$\overline{\nabla}$	Triangolo	Costruisce il triangolo determinato da tre punti.
M	Poligono	Costruisce il poligono determinato da n punti.
\bigcirc	Poligono regolare	Costruisce il poligono regolare determinato da un punto che ne sarà il centro, un secondo punto per il raggio e un terzo punto per fissare il numero dei vertici (e dei giri per i poligoni stellati). Per un poligono convesso, si gira nel senso orario, si sceglie il numero dei lati e si clicca. Per un poligono stellato si gira in senso antiorario, si sceglie il numero dei lati e dei giri e si clicca.

3.2.4. La casella degli strumenti "Curve"

Contiene gli strumenti per la costruzione di circonferenze, archi di circonferenza e coniche:

Circonferenza, Arco di circonferenza, Conica.

- Circonferenza: è uno degli strumenti fondamentali di Cabri.
- *Arco di circonferenza*: questo strumento è stato introdotto a partire dalla versione *Cabri II* è possibile tracciare un arco di circonferenza, assegnandone il primo estremo, un punto intermedio e il secondo estremo.
- *Conica* (per cinque punti): si tratta sicuramente di uno degli strumenti più spettacolari di *Cabri*; è stato introdotto a partire dalla versione *Cabri Géomètre II* (1997). Anche in questo caso la conica viene visualizzata a passi in modo interattivo, senza attendere l'assegnazione dei cinque punti. I primi tre punti determinano un arco; con il quarto punto "nasce" la conica; con il movimento del mouse la conica cambia la sua forma, passando da ellisse ad iperbole (con un po' di fortuna si ottengono anche la parabola e la conica degenere data da una coppia di rette); assegnando il quinto punto si ottiene il risultato finale.

\odot	Circonferenza	Costruisce una circonferenza dati il suo centro e un suo punto. Il centro è un punto selezionato (o creato) per primo e il raggio è determinato da un secondo clic.
С	Arco di circonferenza	Costruito l'arco di cerchio determinato da tre punti. Il primo è un estremo, il secondo un punto dell'arco e il terzo l'altro estremo.
1	Conica	Costruisce la conica determinata da 5 punti dei quali al più 3 sono allineati (conica degenere).

3.2.5. La casella degli strumenti "Costruzioni"

Contiene strumenti per le costruzioni fondamentali della geometria euclidea con l'aggiunta, in *Cabri II*, di nuove voci che aumentano in modo notevole le possibilità per l'insegnamento della geometria (e oltre...):

Retta perpendicolare, Retta parallela, Punto medio, Asse, Bisettrice, Somma di vettori, Compasso, Trasporto di misura, Luogo, Ridefinizione di un oggetto

La parte iniziale del menu *Costruisci* è simile a quella che era presente nella versione precedente di *Cabri*: vi si trovano infatti le costruzioni di *Retta parallela* e *Retta perpendicolare* (la direzione può essere definita dai nuovi oggetti quali semirette, vettori o lati di un poligono), di *Punto medio*, di *Asse di un segmento* e di *Bisettrice*. Nell'utilizzo di queste costruzioni non è necessario seguire un ordine prestabilito nell'assegnazione dei dati: ad esempio per la perpendicolare possiamo indicare prima il punto e poi la direzione oppure prima la direzione e poi il punto.

La voce *Compasso* permette di tracciare la circonferenza di dato raggio e di dato centro non coincidente con gli estremi del segmento che assegna il raggio, realizzando quindi direttamente

in Cabri il compasso che mantiene la sua apertura.

?	Retta perpendicolare	Costruisce la retta passante per un punto e perpendicolare a una direzione data (individuata da una retta, oppure una semiretta, un segmento, un asse coordianto,).
?	Retta parallela	Costruisce la retta passante per un punto e parallela a una direzione data.
••••	Punto medio	Costruisce il punto medio tra due punti o di un segmento.
+	Asse	Costruisce l'asse tra due punti o di un segmento.
K	Bisettrice	Costruisce la bisettrice (una retta) di un angolo indicato da tre punti o dal suo segno.
12	Somma di due vettori	Costruisce la somma di due vettori. Si indicano i due vettori e poi l'origine.
0	Compasso	Costruisce la circonferenza di centro e raggio dati. Si possono anche selezionare tre punti A, B, I (AB=raggio e I=centro), selezionare un punto I e un segmento (I=centro e raggio=lunghezza del segmento), selezionare un punto I e un numero r (I=centro e r=raggio).
2.1	Trasporto di misura	Riporta una misura definita da un numero, su una semiretta, un vettore, un asse, un poligono o una circonferenza (in senso antiorario). Selezionare un numero e poi una circonferenza e un punto sulla circonferenza, un numero e poi una semiretta, un asse, un vettore o un poligono.
Σ	Luogo	Costruisce un luogo di punti (o un inviluppo). Si designa il punto (o l'oggetto) di cui si vuole il luogo e poi un punto da cui dipende (costretto a muoversi su un oggetto).
<u>-</u> +_	Ridefinizione di un oggetto	Ridefinisce la costruzione di un oggetto già esistente (punto, retta, circonferenza, conica, ecc.) senza doverlo cancellare. Le opzioni sono accessibili attraverso un menu popup.

Gli strumenti Trasporto di misura e Luogo meritano una trattazione separata (vedi oltre).

3.2.6. La casella degli strumenti "Trasformazioni"

Contiene strumenti per la geometria delle trasformazioni nel piano:

Simmetria assiale, Simmetria centrale, Traslazione, Rotazione, Omotetia, Inversione.

Si tratta di strumenti che erano presenti soltanto in parte nella versione precedente di *Cabri*. Il menu dedicato alle trasformazioni geometriche è molto ricco ed offre la possibilità di inserire tale argomento nella didattica della geometria in modo dinamico ed interattivo. È da sottolineare, tra le trasformazioni presenti nel menu, anche l'inversione circolare, di cui si parlerà in modo più dettagliato più avanti.

1	•	Simmetria assiale	Costruisce l'immagine di un oggetto in una simmetria assiale. Si
. /			indica l'oggetto e poi la retta.

•••	Simmetria centrale	Costruisce l'immagine di un oggetto in una simmetria centrale. Si indica l'oggetto e poi il centro.
	Traslazione	Costruisce l'immagine di un oggetto in una traslazione. Si indica l'oggetto e poi il vettore.
ά	Rotazione	Costruisce l'immagine di un oggetto in una rotazione. Si indica prima l'oggetto, poi il centro e un angolo definito da un numero.
•••	Omotetia	Costruisce l'immagine di un oggetto in una omotetia. Si indica prima l'oggetto, poi il centro e un numero non nullo (rapporto di omotetia).
0	Inversione	Costruisce l'inverso di un punto rispetto ad una circonferenza. Si seleziona il punto da trasformare e la circonferenza rispetto alla quale fare l'inversione.

3.2.7. La casella degli strumenti "Macro"

Contiene strumenti per la creazione di macro-costruzioni. Le nuove macro-costruzioni vengono incluse in questa casella degli strumenti.

Oggetti iniziali, Oggetti finali, Definizione della macro

X→	Oggetti iniziali	Permette di definire gli oggetti iniziali di una macro-costruzione.
⇒Υ	Oggetti finali	Permette di definire gli oggetti finali di una macro-costruzione.
Х->Ү	Definizione della macro	Dopo aver selezionato gli oggetti iniziali e quelli finali di una macrocostruzione, controlla la validità della macro, la crea, la registra ed edita un messaggio di aiuto.

3.2.8. La casella degli strumenti "Proprietà"

Contiene strumenti per la verifica delle proprietà delle costruzioni basate sulla geometria euclidea.

Allineato?, *Parallelo?*, *Perpendicolare? Equidistante? Appartiene a...?* Si potrebbe dire che gli strumenti di questa casella sono di tipo "booleano" perché la risposta fornita varia tra due valori. Ad esempio, nel caso dello strumento **Allineato?** - che si applica a tre punti - la risposta può essere una delle due seguenti: "I punti sono allineati" oppure "I punti non sono allineati". Gli strumenti contenuti in questa casella sono utili in fase di analisi di una figura e di un primo controllo delle congetture formulate in seguito alla osservazione di proprietà emerse dalla esplorazione dinamica della figura.

?	Allineato ?	Visualizza un messaggio per confermare o no l'allineamento di 3 punti. Il messaggio è aggiornato al variare della posizione dei punti.
?	Parallelo ?	Visualizza un messaggio per confermare o no il parallelismo tra due direzioni (rette, semirette, segmenti, vettori). Il messaggio è aggiornato al variare della posizione dei punti.

?	Perpendicolare ?	Visualizza un messaggio per confermare o no la perpendicolarità tra due direzioni (rette, semirette, segmenti, vettori). Il messaggio è aggiornato al variare della posizione dei punti.
<u>,</u>	Equidistante ?	Visualizza un messaggio per confermare o no l'equidistanza di un punto da due altri punti. Il primo punto è quello da cui si controlla l'equidistanza dagli altri due punti. Il messaggio è aggiornato al variare della posizione dei punti.
€?	Appartiene a ?	Visualizza un messaggio per confermare o no l'appartenenza di un punto ad un oggetto. Il messaggio è aggiornato al variare della posizione dei punti.

3.2.9. La casella degli strumenti "Misura"

Contiene strumenti per misure e calcoli:

Distanza e lunghezza, Area, Pendenza, Misura di un angolo, Coordinate o equazioni,

Calcolatrice, Applica un'espressione..., Tabella.

cm	Distanza e lunghezza	Misura la lunghezza di un segmento, la distanza tra due punti, la lunghezza di una circonferenza, di una ellisse o il perimetro di un poligono. L'unità è modificabile e si può cambiare la grandezza, il font e lo stile del carattere.
cm ²	Area	Misura l'area di un cerchio, di un'ellisse o di un poligono. L'unità è modificabile e si possono cambiare la grandezza, il font e lo stile del carattere.
*	Pendenza	Visualizza la pendenza di una retta relativamente al riferimento predefinito. Si possono cambiare la grandezza, il font e lo stile del carattere.
۹	Misura di un angolo	Affigge la misura di un angolo, definito da 3 punti (un punto su un primo lato, il vertice, e un punto sul secondo lato) o sul suo segno. L'unità è modificabile e si possono cambiare la grandezza, il font e lo stile del carattere.
(x,y) y=f(x)	Coordinate o equazioni	Fornisce l'equazione di una retta, di un cerchio o di una conica relativamente al sistema di riferimento per default o a un riferimento selezionato prima di chiedere l'equazione. Il tipo di equazione (polare o cartesiana) si può modificare per quanto riguarda la grandezza, il font e lo stile del carattere. Lo strumento serve anche per ottenere l'equazione di un luogo algebrico fino al sesto grado.
	Calcolatrice	Fa apparire una calcolatrice di tipo scientifico nella quale possono essere fatti dei calcoli con dei numeri introdotti da tastiera o delle variabili prodotte nella figura.
3x+ 2y =	Applica un'espressione	Calcola il valore di un'espressione. Richiede la selezione dell'espressione e poi di uno o più numeri, uno per ciascuna lettera presente nell'espressione. Sarà creato un numero che è il valore dell'espressione. Se l'espressione contiene unicamente la variabile <i>x</i> questo strumento costruisce il grafico dell'espressione se si seleziona prima l'espressione e poi un sistema di assi cartesiani.

1000	Tabella	Fornisce una tabella nella quale si possono mettere gli stadi
		cambia con il cambiare della figura. Ma può essere copiata in un alti
		ambienti software (fogli elettronici, ambienti di trattamento testi). Il
		tasto Tab (tabulazione) permette di inserire una linea di valori nella
		tabella.

3.2.10. La casella degli strumenti "Testo e simboli"

Contiene strumenti per l'aggiunta di nomi agli oggetti, per inserire dei testi nelle costruzioni e per l'animazione degli oggetti: *Nomi, Testo, Numeri, Espressione, Segna un angolo, Fissa/Libera, Traccia, Animazione, Animazione multipla.*

. <mark>A</mark> I	Nomi	Dà un nome con l'aiuto di una etichetta, che può essere un testo, ai punti alle rette o alle circonferenze. La grandezza, il font e lo stile del carattere usati possono essere cambiati.
Ab]	Testo	Permette di editare un testo. Si possono includere delle variabili prodotte dalla figura. La grandezza, il font e lo stile del carattere usati possono essere cambiati.
2.1]	Numeri	Permette di editare un numero. L'unità è modificabile e si possono cambiare la grandezza, il font e lo stile del carattere.
3x+ 2y∐	Espressione	Permette di creare o di modificare un'espressione. La sintassi dell'espressione sarà verificata solo nel momento della sua valutazione (con lo strumento "Applica un'espressione").
5	Segna un angolo	Segna un angolo. Il tipo di segno può essere modificato.
1	Fissa / Libera	Blocca (o sblocca) la posizione di un punto che allora non più essere spostato.
	Traccia	Permette di ottenere (o di sopprimere) la traccia d'un oggetto mediante lo spostamento. La traccia ottenuta non è manipolabile.
Mart	Animazione	Sposta automaticamente gli oggetti.
22 - 24 - 24 - 24 - 24 - 24 - 24 - 24 -	Animazione multipla	Sposta automaticamente e simultaneamente più oggetti.

3.2.11. La casella degli strumenti "Attributi"

Contiene strumenti per la modifica dell'aspetto degli oggetti o per la visualizzazione del sistema di coordinate:

Mostra/Nascondi, Pulsante Mostra/Nascondi, Colore..., Riempimento..., Colore del testo..., Spessore, Tratteggio, Aspetto, Mostra/Nascondi gli assi, Nuovi assi, Griglia

È anche possibile fare apparire una tavolozza, posizionabile a piacere nello schermo, che contiene tutte le voci di modifica per migliorare l'aspetto estetico della figura.

Ci sono tre scelte per lo spessore del tratto e tre per i tipi di tratteggio delle linee; si può inoltre scegliere il colore degli oggetti in una tavolozza di 37 colori e 4 tonalità di grigi.

Tra le varie opzioni grafiche ricordiamo che possiamo segnare con simboli diversi angoli e segmenti, creare punti con varie opzioni nel disegno (forma, dimensioni, colore).

<u>.</u>	Mostra/Nascondi	Nasconde (o mostra) gli oggetti di una figura.
_		
	Pulsante Mostra/Nascondi	Permette di creare sul foglio di lavoro un pulsante che può nascondere o mostrare un insieme di oggetti di una figura. Per associare uno o più oggetti al pulsante, occorre prima creare il pulsante con un trascinamento-rilascio del mouse, poi cliccare sugli oggetti che si desidera collegare al pulsante. Per modificare l'associazione degli oggetti relativi ad un pulsante esistente, selezionare lo strumento Pulsante Mostra/Nascondi e poi fare clic sul pulsante; in questo modo gli oggetti associati al pulsante lampeggiano. Si può aggiungere un nuovo oggetto alla selezione oppure togliere un oggetto tra quelli che lampeggiano. Dopo la validazione questo pulsante consente la funzione Mostra/Nascondi per il gruppo di oggetti associati, tramite un semplice clic.
<i>,</i>	Colore	Permette di scegliere il colore di un oggetto.
 -	Riempimento	Permette di colorare l'interno di poligoni, circonferenze e le caselle di testo con un colore scelto in una tavolozza di colori dati. Colora anche il segmento circolare definito da un dato arco di circonferenza.
Α	Colore del testo	Permette di colorare un testo. Selezionare il colore e poi il testo il cui colore deve essere cambiato.
	Spessore	Modifica lo spessore dei tratti.
	Tratteggio	Modifica l'aspetto tratteggiato di un tratto.
°×	Aspetto	Modifica l'aspetto di certi oggetti : aspetto dei punti, segno di un angolo, segno di un segmento, tipo di riferimento, testi.
1.	Mostra gli assi	Mostra il sistema di assi predefinito.
	Nascondi gli assi	Nasconde il sistema di assi predefinito
<i>"</i> [Nuovi assi	Permette di definire un nuovo sistema di assi.
4	Griglia	Visualizza una griglia su un riferimento (cartesiano o polare). La griglia stessa è un oggetto sul quale si possono creare dei punti.

4. Primi esempi con l'uso degli strumenti: i punti notevoli di un triangolo

È opportuno vedere alcuni esempi di costruzioni geometriche in cui si utilizzano gli strumenti della casella **Oggetti rettilinei** e della casella **Costruzioni**. Cominciamo con la seguente richiesta: *Assegnato un triangolo, costruire i suoi punti notevoli (baricentro, ortocentro, circocentro e incentro)*.

Il triangolo può essere costruito con lo strumento **Triangolo** contenuto nella casella di strumenti **Oggetti rettilinei**.



Quando scegliamo questa voce vengono introdotti dei cambiamenti in *Cabri Géomètre*: innanzi tutto il cursore si trasforma in una matita (la forma del cursore varia secondo il contesto in cui stiamo lavorando). Con il mouse spostiamo la matita sullo schermo e facendo clic determiniamo la posizione dei vertici: il triangolo appare gradualmente e si completa appena tracciato il terzo vertice. Scegliendo nella casella di strumenti **Testo e simboli** lo strumento **Nomi**, chiamiamo *A*, *B* e *C* i vertici del triangolo.

Per disegnare la bisettrice usiamo lo strumento [**Costruzioni**]**Bisettrice**, indichiamo l'angolo desiderato e ripetiamo l'operazione per i tre angoli.



Le bisettrici si incontrano in un punto (incentro): questa proprietà può essere visualizzata non solo su un triangolo qualunque; afferrando con il mouse uno dei vertici (il cursore si trasforma in una mano che afferra) e tenendo premuto il tasto sinistro del mouse possiamo trascinare il punto nella posizione voluta. Tutta la configurazione si modifica istantaneamente, permettendoci di osservare come la proprietà geometrica non dipende dal particolare triangolo scelto, ma è valida per ogni triangolo.

L'incentro di un triangolo appare sulla figura ma, a differenza di quanto avviene nel disegno geometrico, non esiste ancora per *Cabri Géomètre*. E' opportuno sottolineare che in *Cabri* è necessario indicare esplicitamente le intersezioni di due oggetti usando lo strumento **Intersezione di due oggetti** nella casella di strumenti **Punti**. Chiamiamo I l'incentro del triangolo.



Figura 4.1. Incentro di un triangolo.

Per disegnare la circonferenza inscritta nel triangolo si deve ora tracciare la perpendicolare passante per I ad uno dei lati (ad esempio, AB); chiamiamo K il punto di intersezione tra il lato AB e la perpendicolare appena tracciata.

Scegliendo lo strumento **Circonferenza** nella casella di strumenti **Curve** e disegniamo la circonferenza di centro I e passante per K; questa è la circonferenza desiderata.

Una volta completata la costruzione, possiamo migliorare l'aspetto del disegno con lo strumento [Attributi]Mostra/Nascondi: nascondiamo le tre bisettrici, evidenziamo l'incentro (usando lo strumento Spessore) e coloriamo (strumento Colore) in modo diverso il triangolo e la

circonferenza. Dobbiamo usare lo strumento

Selezionando un oggetto, esso appare disegnato in modo tratteggiato, e sarà nascosto (non cancellato!). Per fare riapparire un oggetto nascosto, è sufficiente selezionare l'oggetto quando

lo strumento 🟥 è attivo.

Eventualmente la figura può essere migliorata aggiungendo tratteggiando degli oggetti oppure tracciando con maggiore o minore spessore o cambiando i colori. Per fare questo abbiamo a disposizione gli strumenti della casella di strumenti **Attributi** posta più a destra nella barra degli strumenti.

Per concludere, possiamo salvare la figura, usando la voce del menu **File>Salva con nome**: dobbiamo assegnare un nome al file, con l'estensione obbligatoria, FIG. L'utilizzo di questa voce del menu **File** è immediata perché è comune a quasi tutti i programmi.



Figura 4.2. Incentro di un triangolo e circonferenza inscritta

Due osservazioni prima di concludere questo esempio.

- a) Tutte le costruzioni realizzate finora sono generiche, valide cioè per ogni configurazione della figura. Questo non avviene sempre: ad esempio il piede dell'altezza relativa al vertice *C* di un triangolo può scomparire in certe configurazioni, se è definito come intersezione del lato *AB* con la perpendicolare, mentre è generico se viene definito come intersezione della retta definita da *AB* con la perpendicolare passante per *C*.
- b) Bisogna distinguere l'effetto dello strumento Mostra/Nascondi contenuto nella casella di strumenti Attributi, che è semplicemente quello di nascondere un oggetto, da quello della voce Puntatore seguito dal tasto Canc, che elimina l'oggetto –e tutti gli oggetti che dipendono da esso- dal procedimento logico della costruzione.

4.1. Esercizi su costruzioni fondamentali

1. Dato un segmento *AB* costruire il triangolo equilatero di lato *AB*. Salvare la figura ottenuta col nome triangolo-equilatero-su-lato.fig.



2. Assegnato un segmento AB, costruire un quadrato di lato AB.

La seguente figura indica come procedere con la costruzione: si disegna il segmento AB; si mandano le rette perpendicolari per A e B al segmento dato e si tracciano due circonferenze. Si trovano i punti C e D. Al termine si nascondono le rette e le circonferenze e si usa infine lo strumento *Poligono* per disegnare il quadrato richiesto. Salvare la figura con il nome quadrato-su-lato.fig.



3. Dato un segmento AB, costruire il quadrato che ha il segmento AB come diagonale. Si disegna il segmento AB e si costruisce l'asse del segmento ed il punto medio O. Si traccia la circonferenza di raggio OA e si completa la figura.



4. Assegnato un segmento AB, si chiede di costruire l'esagono regolare di lato AB.



5. Seguendo l'esempio della costruzione dell'incentro, assegnato un triangolo *ABC*, costruire:
(a) Il baricentro *G* (punto di incontro delle mediane);



(b) Il circocentro O (punto di incontro degli assi) e la circonferenza circoscritta;



(c) L'ortocentro *H* (punto di incontro delle altezze);



(d) Costruire gli exincentri *I*_a, *I*_b, *I*_c (centri delle circonferenze exinscritte):



Verificare che le costruzioni siano "generiche", cioè corrette per qualunque triangolo (acutangolo, ottusangolo, rettangolo).

- 6. Si disegni un quadrilatero *ABCD*. Sia *P* il punto medio di *AB*, *Q* il punto medio di *BC*, *R* il punto medio di *CD* e *S* il punto medio di *DA*. Verificare con *Cabri Géomètre* che il quadrilatero *PQRS* è un parallelogramma (teorema di Varignon).
- 7. Dato un segmento AH costruire il triangolo equilatero di altezza AH.
- 8. Dato un segmento *AB* costruire la sua sezione aurea. Ricordiamo che si chiama sezione (o parte) aurea di un segmento *AB* il segmento *AX* medio proporzionale tra *AB* e *XB*, ovvero tale che:

$$AB: AX = AX: XB$$
.

Considerato il segmento AB, di manda la perpendicolare ad esso per il punto B.

Si disegna la circonferenza di centro O avente per raggio la metà del segmento AB e si congiunge A con O. Il semento AX è la sezione aurea di AB.



Si dimostra inoltre che il segmento *XB*, a sua volta, è la sezione aurea del segmento *AX*. Si potrebbe dunque dire che la "sezione aurea" riproduce se stessa.

- 9. Dato il segmento AB costruire un segmento AC di cui AB sia la sezione aurea. Per eseguire questa costruzione basta aggiungere ad AB la sua sezione aurea.
- 10. Dato un segmento *AB*, costruire un triangolo isoscele in modo che la base *AB* sia la sezione aurea del lato. Questo triangolo potrebbe essere chiamato "triangolo aureo"; gli angoli alla base (72°) sono il doppio dell'angolo al vertice (36°) .



11. Dato il segmento *AB* costruire il decagono regolare di lato *AB*. Per eseguire questa costruzione occorre ricordare che il lato del decagono regolare iscritto in una circonferenza è la sezione aurea del raggio. Occorre quindi utilizzare la costruzione della sezione aurea, ma in senso inverso. Dato il lato *AB*, si costruisce la sua sezione aurea e la si aggiunge ad *AB*. In questo modo si ottiene il raggio della circonferenza circoscritta al decagono regolare.



12. Data una circonferenza costruire il pentagono regolare inscritto nella circonferenza. Per eseguire questa costruzione occorre ricordare il seguente teorema: il lato del pentagono regolare inscritto in una circonferenza è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente per cateti il raggio della circonferenza e la sezione aurea del raggio.



13. Dato il segmento *AB* costruire il pentagono regolare di lato *AB*. Per eseguire questa costruzione occorre ricordare il seguente teorema:

Il lato di un pentagono regolare è la sezione aurea della sua diagonale.



14. Eseguire le seguenti figure (richiedono una certa abilità!) con Cabri:



Dopo aver richiamato le costruzioni dei punti notevoli di un triangolo, nel prossimo paragrafo ci dedicheremo alla verifica, con *Cabri Géomètre*, di un bel teorema dovuto ad Eulero, che con *Cabri Géomètre* diventa particolarmente agevole da presentare.

4.2. La retta di Eulero

In geometria è notissima la relazione, dovuta a Eulero (Leonhard Euler, 1701-1783), che intercorre tra il numero dei vertici V, il numero delle facce F e il numero degli spigoli S di un poliedro (senza "fori"):

$$V+F-S=2.$$

Di Eulero è forse meno noto il seguente bel teorema, valido per un triangolo qualsiasi, che *Cabri Géomètre* permette di visualizzare in modo facile e attraente. È bene chiarire che *Cabri* non dimostra questo teorema; è però possibile visualizzare facilmente diverse configurazioni del triangolo ed osservare che l'ortocentro, il baricentro e il circocentro sembrano sempre allineati.

Teorema. In un triangolo, l'ortocentro, il baricentro e il circocentro sono allineati (la retta cui appartengono si dice **retta di Eulero**) e la distanza tra l'ortocentro ed il baricentro è il doppio della distanza tra il baricentro e il circocentro.



Figura 4.3. L'ortocentro *H*, il baricentro *G* e il circocentro *O* di un triangolo sono allineati (nella *retta di Eulero*) e HG = 2 OG.

[Dimostrazione riportata da H.S.M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, Whiley, New York, 1969] Se il circocentro O e il baricentro G di un triangolo coincidono, ogni mediana è perpendicolare al lato che biseca, e il triangolo è "isoscele tre volte", ossia è equilatero. Ora, se il triangolo *ABC* non è equilatero, il suo circocentro e il baricentro definiscono la retta *OG* (vedi la figura 4.4). In questa retta, detta *retta di Eulero*, consideriamo un punto *H* tale che *OH* = 3 *OG*, cioè, *GH* = 2 *OG*.

Dal momento che GA = 2 A'G, allora AH è parallelo ad A'O, che è l'asse del lato BC. Così AH è perpendicolare a BC. Similmente BH è perpendicolare a CA, e CH ad AB.

Quindi H è l'ortocentro del triangolo ABC, e il teorema è dimostrato.



Figura 4.4. La retta di Eulero e i triangoli omotetici GOA' e GHA.

5. Punti liberi e punti vincolati

Finora abbiamo usato solamente punti liberi di muoversi nel piano; spesso però una costruzione della geometria euclidea inizia con la richiesta "Sia *P* un punto su una retta…". Si tratta quindi di costruire un punto vincolato ad un oggetto.

Per fare questo, bisogna disegnare dapprima l'oggetto a cui si vuole vincolare il punto e poi scegliere lo strumento **Punto su un oggetto** nella casella **Punti**.

A partire da *Cabri Géomètre II* gli oggetti geometrici esistenti sono in numero molto più grande rispetto alla versione precedente, innanzitutto perché sono stati introdotti dei nuovi enti che prima non erano a disposizione (arco di circonferenza, vettore, semiretta, conica, poligono,....), ma anche perché i luoghi creati con *Cabri II* sono dei "quasi-oggetti" con i quali si possono fare alcune operazioni. Sui luoghi è infatti possibile scegliere un punto. In *Cabri II Plus* i luoghi geometrici diventano degli oggetti veri e propri, che si possono intersecare con altri oggetti, ad esempio rette e circonferenze usando lo strumento **Intersezione di due oggetti**.

Una maniera alternativa per vincolare un punto ad un oggetto è quella di scegliere un punto libero costruito in precedenza, di portarlo, se necessario, vicino all'oggetto e di utilizzare lo strumento [**Costruzioni]Ridefinizione di un oggetto**. Si tratta di una opzione particolarmente delicata di *Cabri Géomètre*, che permette di ridefinire un oggetto, modificandone le sue proprietà "originarie"; lo strumento è particolarmente interessante nella fase di scoperta e di congettura di una data proprietà. Per un esempio di utilizzazione di questo strumento, riprendiamo il teorema di Varignon presentato in precedenza in uno degli esercizi.

Teorema (di Varignon). Dato un quadrilatero *ABCD*, costruiamo i punti medi *P*, *Q*, *R*, *S* dei lati *AB*, *BC*, *CD*, *DA* e il quadrilatero *PQRS* avente per vertici tali punti. Allora il quadrilatero *PQRS* è un parallelogramma.



Figura 4.5 Teorema di Varignon

Nella figura 4,5, il punto D è un punto libero nel piano. Chiediamoci qual è la condizione alla quale deve soddisfare D affinché il parallelogramma PQRS sia un rettangolo. Tracciamo la diagonale AC (figura 4.6) e la retta r passante per B e perpendicolare ad AC. Dopo alcune esplorazioni -permesse dal software- si osserva che affinché il parallelogramma PQRS sia un rettangolo, occorre che il punto D appartenga alla retta r, ossia che le diagonali del quadrilatero ABCD siano perpendicolari.



Figura 4.6 Ridefinizione del punto D.

Per fare in modo che il punto D appartenga alla retta r, usiamo lo strumento [**Costruzioni**] **Ridefinizione di un oggetto** e clicchiamo sul punto D. Compare il menu "popup" indicato nella figura 4.7; selezioniamo "Punto su un oggetto" e facciamo un clic sulla retta r. Il punto D ora si sposta nella posizione in cui è stato fatto il clic sulla retta r ed è ridefinito come punto appartenente alla retta r. In questo modo il parallelogramma *PQRS* diventa un rettangolo.



Figura 4.7 Ridefinizione del punto D.

La ridefinizione di un oggetto è uno strumento molto potente di *Cabri*, che permette di togliere o aggiungere dei gradi di libertà agli elementi di una figura senza doverla rifare interamente. La relazione tra un punto e un oggetto può essere eliminata con lo strumento **Ridefinizione di un oggetto** contenuto nella casella **Costruzioni** scegliendo l'opzione "Punto" (figura 4.7). Il punto vincolato ritorna un punto libero.

5.1. Esercizi

1. Data una circonferenza γ di centro *O* e un punto *P* esterno ad essa, costruire da *P* le rette tangenti a γ .



2. Date le circonferenze non concentriche $\gamma \in \gamma'$ di centri *C* e *C'* e raggi rispettivamente *r* e *r'* (con $r \neq r'$), costruire le tangenti comuni, se esistono, alle due circonferenze date.



3. Dato un segmento *AB*, dividerlo in *n* parti uguali (*n* è un numero naturale).



Nella figura precedente il segmento AB è stato diviso in 5 parti uguali. Si fa passare per un estremo, ad esempio A, una semiretta e si prende un punto P su di essa. Si riporta il segmento AP per *n* volte sulla semiretta (nella figura è stato riportato per 5 volte). Si congiunge il punto finale con l'estremo B e si usa il teorema di Talete mandando delle rette parallele al segmento *RB*.

- 4. Sia assegnata una retta r e su di essa un punto origine O e un punto unitario U tali che il segmento OU sia di misura unitaria: fissati un numero razionale p/q, costruire un segmento di misura p/q (si consiglia di scegliere i valori di p e di q non molto grandi, per semplificare la costruzione).
- 5. Il punto *D*, nella figura 4.7, dopo la sua ridefinizione, conserva ancora un grado di libertà perché è mobile sulla retta *r*. Trovare una condizione necessaria e sufficiente affinché il rettangolo *PQRS* sia un quadrato. Ridefinire nuovamente il punto *D* in modo che la costruzione fornisca un quadrilatero *PQRS* che sia un quadrato.

6. Le macro-costruzioni

Riprendiamo la figura contenente la costruzione di un quadrato a partire dal lato. Dopo aver realizzato la costruzione del quadrato, abbiamo salvato la figura ottenuta. È però evidente che sarebbe conveniente poter registrare non solo la figura, ma anche il "procedimento" con cui è stata costruita, per poterlo ripetere in altri contesti. In *Cabri Géomètre* questo è possibile grazie alle macro-costruzioni. Le macro-costruzioni di *Cabri* sono l'equivalente dei sottoprogrammi (procedure e funzioni) presenti nei linguaggi di programmazione perché permettono di memorizzare e riutilizzare una certa costruzione, senza essere costretti ogni volta a ripetere tutti i passaggi.

Una macro è definita a partire da un sottoinsieme degli oggetti che compongono una figura. Una volta definita, la macro può essere utilizzata come un qualunque altro strumento di *Cabri Géomètre* e riproduce la costruzione a partire dagli elementi iniziali selezionati dall'utente.

6.1. Come si definisce una macro-costruzione

Apriamo (**File>Apri**) la figura, salvata in precedenza, contenuta nel file quadrato-su-lato.fig. Per definire una macro-costruzione si utilizzano le voci della casella di strumenti **Macro**, la cui sintassi è la seguente.



Ad esempio, si può definire una macro che costruisce un quadrato il cui lato è un segmento dato. Per definire la macro, occorre realizzare effettivamente la costruzione del quadrato a partire da un segmento qualunque, poi selezionare gli oggetti iniziali - qui il segmento - e gli oggetti finali - il quadrato - e infine definire la macro. Si disporrà quindi di un nuovo strumento, inserito nella casella degli strumenti **Macro**, che, per essere usato, richiederà la selezione di un segmento e riprodurrà la costruzione del quadrato, a partire da questo segmento. Gli oggetti intermedi costruiti durante l'applicazione della macro vengono nascosti e non possono essere visualizzati nel foglio di lavoro.

Per definire una macro, occorre dunque che la costruzione corrispondente sia già stata realizzata. Si attiva di seguito lo strumento **Oggetti iniziali** della casella **Macro**. L'icona visualizza una X

maiuscola seguita da una freccia, $[X \rightarrow]$, per ricordare l'interpretazione funzionale delle macro, in cui gli oggetti iniziali sono da considerare come delle "variabili indipendenti". Si selezionano poi gli oggetti iniziali. Nel caso di oggetti dello stesso tipo l'ordine di selezione è importante e sarà utilizzato nel momento dell'applicazione della macro. Per gli oggetti iniziali di diverso tipo, invece, l'ordine di selezione non ha importanza.
L'insieme degli oggetti iniziali è messo in evidenza tramite un lampeggiamento degli oggetti selezionati. Per aggiungere o togliere un oggetto all'insieme, è sufficiente selezionarlo con un clic del mouse.

Una volta definiti gli oggetti iniziali, occorre definire gli oggetti finali; per questo si usa lo strumento **Oggetti finali** e si selezionano questi oggetti. Anche in questo caso l'icona dello strumento è significativa in quanto, continuando nell'interpretazione funzionale delle macro,

mostra una freccia che arriva a Y, \checkmark . L'insieme degli oggetti finali costituisce il "corrispondente" dell'insieme degli oggetti iniziali. Nell'esempio di macro di cui si sta parlando, che costruisce un quadrato a partire dal lato, l'unico oggetto finale è il quadrato.

La selezione degli oggetti finali si fa nello stesso modo visto per gli oggetti iniziali. Fino a che non viene definita la macro, l'insieme degli oggetti iniziali e quello degli oggetti finali restano in memoria e possono essere modificati come si vuole.

La macro è poi definita con lo strumento Definizione della macro; l'icona è una freccia che va

da X a Y, *index*, che ricorda il simbolo di funzione. *Cabri* verifica inizialmente se gli oggetti finali possano essere effettivamente costruiti a partire dagli oggetti iniziali. Se non succede questo, la macro non viene definita e appare il messaggio:

"Questa macro non è coerente. *Cabri* non può determinare tutti gli oggetti finali a partire dagli oggetti iniziali assegnati".

Se la macro è coerente, appare invece una finestra di dialogo che serve per editare le varie proprietà della macro: il nome della costruzione, il nome del primo oggetto finale, il messaggio di aiuto, le icone della macro, la password. Tra queste proprietà solo il nome della costruzione deve essere obbligatoriamente assegnato.

La finestra di Definizione della macro contiene le seguenti voci:

- Nome della costruzione. È il nome della macro che apparirà tale e quale nella casella degli strumenti Macro.

- Nome del primo oggetto finale. Questo nome apparirà per identificare l'oggetto prodotto dalla macro in una figura durante il passaggio del cursore del mouse. Per esempio se la macro costruisce un quadrato a partire dal suo lato, il nome del primo oggetto finale potrebbe essere "Questo quadrato". E' consigliabile scrivere "Questo quadrato" e non "quadrato", perché quando in seguito si passerà con il cursore del mouse sopra questo oggetto comparirà il messaggio "Questo quadrato".

- **Password** (di una macro). Se si assegna una password ad una macro, gli oggetti intermedi della macro saranno inaccessibili nella finestra che descrive la figura sotto forma testuale di *Cabri II*

Plus (questa finestra si può visualizzare tramite la voce del menu **Opzioni>Finestra di descrizione della figura**, oppure premendo il tasto funzionale **F10**).

La possibilità di assegnare una password a una macro ha anche influenza sulla finestra che compare quando si salva una figura tramite il menu **File>Salva** oppure **File>Salva con nome**. Se in una figura sono state usate delle macro, si può salvare la figura con l'opzione "Descrizione senza dettagli nelle macro", inserendo una password. Se si inserisce una password, nella finestra di descrizione testuale della figura non compariranno i dettagli costruttivi ottenuti con le macro.



Figura 6.1 Finestra per la definizione di una macro in Cabri II Plus.

L'altra parte della finestra di dialogo per la **Definizione della macro** consente di disegnare le due icone della macro, che vengono inserite, insieme al nome della costruzione, nella casella di strumenti **Macro**. Questa opzione è una conseguenza della possibilità, introdotta in *Cabri II Plus*, di usare l'interfaccia del programma con le icone grandi oppure con le icone piccole. L'icona che contraddistingue la nuova macro viene disegnata con un piccolo programma grafico in cui si ha a disposizione una matita che colora dei quadratini di un reticolo di 16×16 , per le icone piccole, oppure di 32×32 nel caso delle icone grandi. Si noti che non è necessario disegnare entrambe le icone. Si può disegnare soltanto l'icona piccola e con un clic su un opportuno pulsante è possibile ottenere la conversione automatica dell'icona piccola in quella grande (a ogni quadratino dell'icona piccola viene sostituito un quadrato formato da quattro quadratini dello stesso colore nell'icona grande). Anche nella versione *Cabri II Plus* è stata mantenuta la convenzione usata dagli autori del software che, nelle icone, indicano con il colore

blu gli oggetti dati dall'utente e in rosso gli oggetti costruiti dalla macro. Fanno eccezione le icone delle trasformazioni geometriche dove sono rappresentate in verde gli oggetti che servono per definire la trasformazione stessa, ad esempio una retta nel caso della simmetria assiale.

Nella finestra *Definizione della macro* (figura 6.1) la casella "Salva come file" permette di salvare soltanto la macro, ma non la figura, in un file. La figura si deve salvare a parte, usando la voce del menu **File>Salva** oppure **File>Salva con nome**. Anche nel caso non sia stata salvata come file, una macro è comunque memorizzata nella figura dove è stata definita e in tutte le figure dove essa è utilizzata.

Se apriamo un figura di *Cabri* nella cui realizzazione sono state utilizzate delle macro, vediamo che sono memorizzate anche le macro presenti nella costruzione. Quando si apre un file di tipo "*.fig" non solo viene visualizzata la figura, ma vengono anche automaticamente "caricate" in memoria le macro, che, aggiunte al menu *Macro*, sono disponibili all'utente, anche quando si esce dalla figura in questione e se ne apre un'altra. Queste caratteristiche della memorizzazione delle figure con le macro permettono la leggibilità e la possibilità di interpretare le figure realizzate da altri utenti.

Se una macro porta lo stesso nome e costruisce gli stessi oggetti finali di un'altra macro già definita, *Cabri Géomètre* fornisce la possibilità di sovrapporre o di sostituire la macro esistente. Se si sceglie di sovrapporre le due macro, in seguito sarà utilizzata una delle due macro sovrapposte, in relazione agli oggetti iniziali selezionati. Per esempio, se la macro che fornisce il quadrato costruito sul lato è definita a partire da un segmento, si potrà sovrapporre ad essa un'altra macro, che produce lo stesso oggetto finale, definita a partire da due punti (estremi del lato). Si ottiene così una macro che accetta in ingresso sia un segmento che due punti.

Per utilizzare una macro, si attiva lo strumento corrispondente della casella degli strumenti Macro, poi si selezionano gli oggetti iniziali. Non appena tutti gli oggetti iniziali sono stati selezionati, la costruzione viene riprodotta e si ottengono i nuovi oggetti finali.

Gli attributi degli oggetti finali che, nel momento della definizione della macro, sono diversi dagli attributi predefiniti sono salvati con la macro e saranno applicati agli oggetti creati dalla macro.

Dopo aver registrato il file della macro, apriamo la casella degli strumenti **Macro**: la macro creata è stata aggiunta, col nome **Quadrato su lato dato**, in fondo all'elenco e da questo momento può essere utilizzata come tutti gli altri strumenti di *Cabri*.

Le macro accettano, sia come oggetti iniziali che come oggetti finali, tutti gli oggetti di *Cabri*, compresi i luoghi geometrici e, con *Cabri II Plus*, anche le espressioni (come oggetti iniziali).

Si tenga presente che, ovviamente, una macro-costruzione di Cabri può a sua volta utilizzare

altre macro.

Anche in *Cabri II Plus* rimane laborioso editare una macro una volta che è stata costruita durante una sessione di lavoro o salvata in un file. Per poter modificare in seguito una macro è consigliabile salvare la figura utilizzata inizialmente per definire la macro. Se si ha a disposizione questa figura è infatti possibile ripercorrere la definizione della macro. Per fare questo, si apre la figura e, nella stessa figura, anche la macro che si desidera modificare. A questo punto si selezionano gli stessi oggetti iniziali e finali della macro; arrivati nella fase di definizione della macro, è possibile selezionare la macro già presente in memoria. Nella casella dove si assegna il nome della costruzione si clicca sulla freccetta rivolta verso il basso e si sceglie lo stesso nome della macro: ciò consente di visualizzare nella finestra di **Definizione della macro** tutti gli elementi della macro e di modificarli. Dopo aver apportato i cambiamenti voluti, occorre salvare la nuova macro con lo stesso nome che aveva in precedenza, sostituendo il file della macro.

Le macro-costruzioni sono uno strumento potente e flessibile in quanto possono ampliare "all'infinito" le potenzialità del programma, rendendo agevoli costruzioni che sarebbero troppo onerose con il solo uso delle costruzioni di base. Utilizzando le macro-costruzioni possiamo adattare *Cabri Géomètre* alle nostre esigenze specifiche.

6.2. La memorizzazione di figure e macro

Un notevole innovazione, rispetto alle versioni iniziali di *Cabri*, riguarda le modalità di codifica di figure e macro. Per scoprire questa caratteristica basta aprire un file di *Cabri* con estensione *.FIG (oppure una macro con estensione *.MAC) con un editor di testi, come ad esempio *NotePad* di Windows. Se apriamo un file di una figura (estensione FIG) di *Cabri Géomètre II Plus* riusciamo a leggere tutto (anche se non sempre a capire...); infatti si tratta di un file di testo compatibile con qualsiasi editor. Lo stesso avviene per i file che contengono macro (file con estensione MAC).

Se osserviamo un file FIG che memorizza una figura nella cui realizzazione sono state utilizzate delle macro, vediamo che sono memorizzate anche le macro presenti nella costruzione. Quando si apre un file FIG non solo viene visualizzata la figura, ma vengono anche caricate le macro, che, aggiunte al menu *Macro*, sono disponibili all'utente, anche quando si esce dalla figura in questione e se ne apre un'altra. Queste caratteristiche della memorizzazione permettono la leggibilità e la possibilità di interpretare le figure realizzate da un altro utente (anche se si può usare la *Ricostruzione passo a passo*).

E' quindi possibile, almeno in teoria, "scrivere una figura" di *Cabri*; infatti potremmo, se fossimo in grado di interpretare tutti i simboli che compaiono nella memorizzazione della figura scrivere con un editor di testo un file con estensione .FIG che verrebbe letto da *Cabri* e visualizzato come una figura.

6.3. Esercizi sulle macro-costruzioni

- 1. Definire delle macro-costruzioni che, assegnati i vertici di un triangolo, permettano di determinare i punti notevoli del triangolo, utilizzando le costruzioni viste in precedenza.
- 2. Definire una macro per costruire il triangolo equilatero a partire da un segmento *AB*. Conviene dare come oggetti iniziali gli estremi del segmento.
- 3. Definire una macro-costruzione per costruire un quadrato a partire dal suo lato. Conviene dare come oggetti iniziali gli estremi di un lato. Aggiungere poi a questa macro la possibilità di costruire il quadrato a partire da un segmento (il lato del quadrato).
- 4. Usando la macro quadrato-su-lato.mac definita nell'esercizio precedente, disegnare una figura che illustri il teorema di Pitagora (vedi figura seguente).



Figura 6.2 – Teorema di Pitagora

- 5. Dati tre punti nel piano, definire una macro che costruisca la circonferenza passante per i tre punti.
- 6. Dato un quadrilatero qualunque, definire una macro che costruisca il quadrilatero con i vertici nei punti medi dei lati del quadrilatero dato (quadrilatero di Varignon).
- 7. Dato un triangolo, definire una macro che costruisca la retta di Eulero.
- 8. Definire una macro-costruzione per determinare la sezione aurea di un segmento AB.
- 9. Definire una macro-costruzione che disegni il decagono regolare inscritto in una circonferenza data con un vertice in un punto assegnato di essa; analoga macro-costruzione per il pentagono regolare inscritto in una circonferenza.
- 10. Dato un segmento *AB* definire una macro-costruzione per il disegno di un pentagono regolare di lato *AB*.
- 11. Dato un triangolo, definire una macro che costruisca la circonferenza inscritta e le circonferenze exinscritte.
- 12. Dati due numeri x e y nel foglio di lavoro e un sistema di assi cartesiani, costruire una macro che disegni il punto di coordinate cartesiane (x, y).

7. I luoghi geometrici con Cabri Géomètre

La possibilità di tracciare un luogo geometrico è uno degli strumenti di maggiore interesse, in particolare didattico, di *Cabri Géomètre* fin dalle sue versioni iniziali. Supponiamo, ad esempio, di voler costruire una parabola come luogo geometrico e di voler studiare l'effetto dello spostamento del fuoco, a parità di direttrice, sulla forma di una parabola. Realizziamo la classica costruzione di cui riportiamo i passaggi (figura 7.1). Si costruiscono i seguenti oggetti:

- Retta *d* (è la direttrice della parabola).
- Punto *F* (fuoco della parabola) non appartenente alla retta *d*.
- Punto H su d.
- Asse *r* del segmento *FH*.
- Retta *s* passante per *H* e perpendicolare alla direttrice *d*.
- Punto *P* di intersezione di *r* con *s*.
- Luogo di *P* al variare di *H* su *d*.

Si ottiene la curva indicata nella figura 7.1. Per rendere più visibile la parabola è stato cambiato il suo spessore mediante lo strumento *Spessore* contenuto nell'ultima casella di strumenti. Una volta ottenuto il luogo descritto da *P* avviciniamo il cursore al fuoco e spostiamolo: vediamo che la parabola si modifica istantaneamente seguendo lo spostamento del fuoco.

In *Cabri Géomètre II Plus* è possibile ottenere l'equazione del luogo ottenuto rispetto a un sistema di assi cartesiani. Come si vedrà in seguito, infatti, il software è in grado di fornire l'equazione approssimata –talvolta esatta- di una curva algebrica fino al quinto grado.



Figura 7.1 Generazione della parabola come luogo geometrico

Nella classica costruzione dell'ellisse con il metodo "del giardiniere" possiamo ottenere l'intera figura evidenziando i due punti che generano le due metà della conica; si devono costruire due luoghi indipendenti in tempi diversi.

Si può anche ottenere un insieme "discreto" di punti della parabola tracciati sullo schermo

usando lo strumento *Traccia* del menu *Visualizza* anziché lo strumento *Luogo*. Questa opzione associata alla *Animazione* di cui si parlerà tra breve consente altre interessanti applicazioni didattiche che possono rafforzare il concetto di luogo geometrico.

Cabri Géomètre permette di tracciare sia luoghi di punti sia luoghi di rette: possiamo disegnare la medesima parabola come inviluppo degli assi r di FH, che sono tangenti alla parabola; per ottenerla in questo caso dobbiamo indicare la retta r e il punto H.

Se nella medesima situazione disabilitiamo la casella "Inviluppo" nel menu *Preferenze*, otteniamo la visualizzazione di un certo numero di posizioni della retta *r*, una rappresentazione di indubbio effetto come appare nella figura seguente.

Il disegno del luogo geometrico può essere migliorato operando sul menu **Opzioni>Preferenze** e all'interno di questa complessa schermata, **Opzioni per i luoghi**. Conviene scegliere un numero di punti superiore a 1000; si tenga presente che al massimo un luogo può essere tracciato calcolandone al massimo 5000 punti. In *Cabri Géomètre II Plus* il tracciamento ottimale dei luoghi è effettuato in modo automatico, senza dovere intervenire sul menu **Opzioni>Preferenze**.



Figura 7.2 Parabola come inviluppo di rette.

La possibilità di ottenere luoghi come inviluppi si estende anche a circonferenze e coniche.

7.1. Costruzioni dell'ellisse e dell'iperbole

Dati due punti F_1 , F_2 e una costante k > 0 consideriamo il luogo dei punti P per cui1. $PF_1 + PF_2 = k$ Ellisse2. $|PF_1 - PF_2| = k$ Iperbole

La costante k sarà poi indicata con 2a (oppure con 2b), ed a sarà chiamato rispettivamente *semiasse maggiore* dell'ellisse e *semiasse trasverso* nel caso dell'iperbole.

Ellisse $PF_1 + PF_2 = k$

 l^a costruzione dell'ellisse: si disegna una circonferenza di centro un punto F_1 e raggio a piacere ed un punto interno alla circonferenza F_2 . Preso un punto A sulla circonferenza si traccia la retta AF_1 e l'asse del segmento $A F_2$. Il loro punto di intersezione P appartiene all'ellisse. Infatti, dalla figura 7.3, si ricava:

$$AF_1 = AP + PF_1 = PF_2 + PF_1 = \text{costante}$$

Si dimostra inoltre che l'asse del segmento $A F_2$ è tangente all'ellisse.



Figura 7.3. Costruzione di una ellisse a partire da una circonferenza.

2^a costruzione dell'ellisse (metodo "del giardiniere"):

- si costruisce un segmento AB di misura k (si pone k = 2a);
- si costruisce un punto *Q* appartenente ad *AB* (strumento *Punto su un* oggetto) e si definiscono i segmenti *AQ*, e *QB*.
- Si costruiscono due punti F_1 ed F_2 con $\overline{F_1F_2} < k$.
- Si tracciano le due circonferenze di centri F_1 , F_2 e raggi AQ e QB. Per fare questo si usa lo strumento *Compasso* (casella *Costruzioni*).
- Si creano i punti di intersezione $P \in P'$ tra le due circonferenze (strumento *Punti di intersezione*). I punti di intersezione $P \in P'$ (due se $k > \overline{F_1F_2}$) appartengono all'ellisse.
- Per tracciare l'ellisse occorre usare due volte lo strumento *Luogo* (casella *Costruzioni*) costruendo il luogo di *P* al variare di *Q* e il luogo di *P*' al variare di *Q*.



Figura 7.4. La costruzione di un'ellisse con "il metodo del giardiniere".



Figura 7.5. La generazione di un'iperbole come luogo.

 l^a costruzione dell'iperbole: Si disegna una circonferenza di centro un punto F_1 e raggio a piacere ed un punto F_2 . esterno alla circonferenza. Preso un punto A sulla circonferenza si traccia la retta AF_1 e l'asse del segmento AF_2 . Il punto di intersezione tra la retta AP e l'asse del segmento AF_2 appartiene all'iperbole. Se il punto P sta sulla curva, si ha infatti (figura 7.5):

$$AF_1 = PF_1 - PA = PF_1 - PF_2 = \text{costante}$$
.

In generale si ha $AF_1 = |PF_1 - PF_2| = \text{costante}$.

2^{*a*} costruzione dell'iperbole:

- si costruisce una retta r e un segmento AB di misura k (si pone k = 2a);

- si costruisce un punto Q sulla retta r esterno al segmento AB (strumento Punto su un oggetto) e si definiscono i segmenti AQ, e QB.
- Si costruiscono due punti F_1 ed F_2 con $\overline{F_1F_2} > k$.
- Si tracciano le due circonferenze di centri F_1 , F_2 e raggi AQ e QB. Per fare questo si usa lo strumento *Compasso* (casella *Costruzioni*).
- Si creano i punti di intersezione $P \in P'$ tra le due circonferenze (strumento *Punti di intersezione*). I punti di intersezione $P \in P'$ (due se $k < \overline{F_1F_2}$) appartengono all'ellisse.
- Per tracciare l'iperbole occorre usare due volte lo strumento *Luogo* (casella *Costruzioni*) costruendo il luogo di *P* al variare di *Q* e il luogo di *P*' al variare di *Q*.



Figura 7.6. Una seconda costruzione dell'iperbole.

7.2. Compasso ellittico e asteroide inviluppo

Disegnata una circonferenza c di centro O e due diametri perpendicolari. Per ogni punto M di c si considerino le sue proiezioni ortogonali A e B sui due diametri rispettivamente. Tracciare il segmento AB e costruire un punto P su AB (strumento *Punto su un oggetto*). Determinare il luogo descritto da P al variare di P su c (*compasso ellittico*). Si osserva con *Cabri* che il luogo descritto da P è un'ellisse.



Figura 7.7. Costruzione di un ellissografo.

Se ora considerano diverse posizioni di P sul segmento AB, chiamiamole P_1 , P_2 ,...tali descrivono delle ellissi al variare di M sulla circonferenza. Contemporaneamente il segmento AB "scivola sugli assi e genera come inviluppo un luogo che va sotto il nome di asteroide.



Figura 7.8. "Ellissografo" e asteroide inviluppo delle ellissi.

7.3. Esercizi sui luoghi geometrici

- 1. Trovare il luogo dei centri delle circonferenze passanti per due punti dati.
- 2. Trovare il luogo dei punti medi delle corde di stessa lunghezza di una circonferenza data.
- 3. Date due rette parallele *r* ed *s* e un punto *A* su *r* e un punto *B* su *s*, trovare il luogo dei punti medi descritti dal punto medio del segmento *AB*.
- 4. Determinare il luogo dei centri delle circonferenze tangenti a due date circonferenze concentriche.
- 5. Dato un triangolo inscritto in una circonferenza, trovare il luogo geometrico descritto dal baricentro *G* al variare di un vertice *C* sulla circonferenza.



Figura 7.9. Luogo del baricentro di un triangolo.

6. Dato un punto Q e una circonferenza γ , determinare il luogo geometrico dei punti medi dei segmenti QP al variare di P su γ .



Figura 7.10. Luogo descritto dal punto M.

7. Si considerano due semirette di origine il punto *O*. Si considera una circonferenza di centro *C* ed un punto *P* su di essa. Da *P* si mandano le parallele alle due semirette date (pantografo



Figura 7.11

- 8. Si consideri una circonferenza γ , una retta r e un punto M di γ . Costruire le circonferenze tangenti alla retta r e tangenti nel punto M alla circonferenza γ . Determinare al variare di M su γ il luogo descritto dai centri di tali circonferenze. Variare la posizione della retta rispetto alla circonferenza e osservare come variano i luoghi.
- 9. Siano γ una circonferenza di centro O e raggio r e A un punto non appartenente a γ . Sia M un punto di γ . Si costruisca il quadrato *AMPN*, in senso antiorario, di centro I, e sia Q il punto di intersezione della retta AP e dell'arco minore di cerchio di centro A e di estremi M e N. Determinare i luoghi descritti da punti N, Q, I, P.
- 10. Disegnare la concoide della retta (di Nicomede): Dati un punto O e una retta r non passante per O, si consideri una retta s per O e il punto di intersezione M di r con s. Determinare il luogo descritto dai punti P e P' di s che hanno distanza assegnata l da M al variare della retta s per O. [Al variare della distanza a di O da r (a>l, a<l, a=l) varia la forma del luogo.]
- 11. Disegnare la concoide della circonferenza: Si considera una circonferenza c di diametro OB(OB=a) e una retta s per O e il punto di intersezione M, diverso da O, di s con c. Determinare il luogo descritto dai punti $P \in P'$ di s che hanno distanza assegnata l da M al variare della retta s per O. [Al variare di a (a>l, a<l, a=l) varia la forma del luogo.]
- 12. Costruire la *versiera* di Maria Gaetana Agnesi (1718-1799) usando lo strumento *Luogo*. La versiera è definita nel seguente modo:
 - Retta *x* e punto *O*;
 - Retta y perpendicolare alla retta x nel punto O;
 - Punto *C* sulla retta *y*.
 - Circonferenza di centro *C* passante per *O*.
 - Intersezione *T* tra la circonferenza e l'asse *y*.
 - Retta *r* parallela alla retta *x* passante per *T*.
 - Punto *R* sulla circonferenza e retta *OR*.
 - Intersezione *Q* tra la retta *OR* e la retta *r*.
 - Retta *s* passante per *R* parallela alla retta *x*.
 - Punto *P* di intersezione tra le retta *q* e la retta *s*.
 - Luogo geometrico di *P* al variare di *R*.



Figura 7.12. Versiera di M.G.Agnesi

13. Disegnare la lumaca di Pascal (usare i luoghi geometrici). Costruire una circonferenza qualunque di centro O. Costruire un punto M sulla circonferenza e la tangente in M alla

circonferenza. P è un punto qualunque e H la proiezione ortogonale di P sulla tangente alla circonferenza. Costruire il luogo di H al variare di M sulla circonferenza, per questo si utilizza **Luogo** nella casella degli strumenti **Costruisci**: indicare prima il punto H (punto "dipendente") poi il punto M (punto "pilota"). Si ottiene la *lumaca* di Pascal. Spostare P e osservare le modificazioni della forma del luogo.



Figura 7.13. Lumaca di Pascal.

8. La misura e il trasporto di misura

Grazie alle voci contenute nella casella di strumenti **Misura** (figura 8.1) in *Cabri* è possibile misurare lunghezze, distanze, aree, pendenze, angoli, Il valore della misura viene visualizzato accanto all'oggetto e modificato quando il segmento o l'angolo vengono cambiati; in modo predefinito la misura è espressa in centimetri per i segmenti e in gradi per gli angoli.

L'insieme degli oggetti lineari misurabili in *Cabri Géomètre II Plus* è molto vasto; infatti si può valutare:

- le distanze tra due punti (senza che sia definito il segmento che li congiunge);
- la lunghezza di un segmento;
- la lunghezza di un vettore;
- il perimetro di un poligono;
- la lunghezza di una circonferenza;
- la lunghezza di un'ellisse;
- la lunghezza di un arco di circonferenza;
- la distanza tra un punto e una retta;
- la distanza tra un punto e una circonferenza.

Distanza o lunghezza
Area
Pendenza
Misura dell'angolo
Coordinate o equazioni
Calcolatrice
Applica un'espressione
Tabella

Figura 8.1 La casella di strumenti Misura

Un'altra possibilità di grande rilievo permette di affrontare facilmente i problemi legati alla misura di superfici è la possibilità di visualizzare le aree di poligoni, di cerchi e di ellissi, utilizzando lo strumento **Area** della casella di strumenti **Misura**.

Possiamo modificare l'unità di misura, utilizzando anche millimetri, metri e chilometri per le misure lineari, mentre gli angoli possono essere espressi anche in radianti e in gradi centesimali: questa scelta viene fatta utilizzando la voce *Preferenze* del menu *Opzioni*.

Anche se il procedimento di misurazione resta approssimato e come tale soggetto ad errori, *Cabri géomètre* offre la possibilità di fissare la precisione della misura: anche questa scelta viene effettuata tramite la voce *Preferenze* del menu *Opzioni*, dove possiamo scegliere fino a 10 cifre per la visualizzazione.

L'operazione di *Trasporto di misura* è uno strumento molto interessante di *Cabri*, che permette la realizzazione di costruzioni che escono completamente dall'ambito classico della "riga e

compasso". Per realizzarla si inizia visualizzando una misura lineare; se si sceglie un punto P viene costruito un punto P' che ha quella distanza da P. Il punto P' può essere spostato e posizionato con il mouse.

Se invece si indica un oggetto orientato, come una semiretta o un vettore, il punto P' viene vincolato *alla semiretta o al vettore*. Si può riportare anche una misura su una circonferenza; in questo caso si assegna la misura, la circonferenza e un punto Q su di essa; viene tracciato un arco che ha come estremo il punto Q e misura assegnata.

Il trasporto di misura permette di fare costruzioni che con la sola riga e compasso non sono possibili.

Esempio 1 (rettificazione di una circonferenza). Con *Cabri*, si può rettificare la circonferenza e quadrare il cerchio. Nella figura seguente la circonferenza è stata "rettificata". Al variare del punto P il corrispondente punto P' descrive la circonferenza. Il punto P' è stato ottenuto con il trasporto di misura.



Figura 8.2 Rettificazione della circonferenza con il trasporto di misura.

Esempio 2 (costruzione di una sinusoide). Vediamo ora (figura 8.3) la costruzione del grafico di della sinusoide in cui si usa il trasporto di misura per generare la curva. Ci sono vari modi per ottenere questo grafico. Qui di seguito si riporta il più semplice.

- 1. Costruire un punto O e un punto A; circonferenza di centro O passante per A.
- 2. Costruire la semiretta *x* di origine il punto O e passante per il punto A.
- 3. Costruire la retta y passante per O perpendicolare a *x*.
- 4. Punto *X* sulla semiretta *x*.
- 5. Misura della distanza tra O e X (nella figura seguente 5,11 cm).
- 6. Trasporto di misura sulla circonferenza a partire dal punto A. Si ottiene il punto B.
- 7. Costruire la semiretta OB.
- 8. Retta r passante per B e parallela alla semiretta x.
- 9. Retta s passante per il punto X e parallela alla retta y.
- 10. Intersecando la retta r con la retta s si ottiene il punto P.

11. Luogo geometrico di P al variare di X sulla semiretta x.

In questo modo si ottiene il grafico della sinusoide con x non negativo. Per completare il grafico si può simmetrizzare il grafico ottenuto rispetto al punto O.



Figura 8.3 Costruzione di una sinusoide

Esempio 3 (costruzione di una cicloide). Vediamo nella figura 8.4 la costruzione del grafico della cicloide in cui si usa il trasporto di misura per generare la curva come luogo geometrico.

- 1. Semiretta s.
- 2. Segmento *AB* che definisce il raggio della circonferenza di base.
- 3. Punto P su s e trasporto di AB su P con lo strumento Compasso (circonferenza tratteggiata).
- 4. Retta perpendicolare a *s* in *P*.
- 5. Punto *O* di intersezione con la circonferenza.
- 6. Misura della distanza di *P* dall'origine della semiretta (3,41 cm nella figura).
- 7. Circonferenza di centro O passante per P.
- 8. Trasporto di misura sulla circonferenza a partire da *P*; si ottiene il punto *M*.
- 9. Simmetrico *M*' di *M* rispetto alla perpendicolare (passante per *P*).
- 10. Luogo di *M*' al variare di *P* su *s*.



Figura 8.4 Costruzione di una cicloide

Con i passaggi precedenti si ottiene la cicloide *ordinaria*; scegliendo sulla semiretta OM' un punto M'', con OM'' minore di OM', si costruisce la cicloide *accorciata* (priva di punti doppi),

mentre con OM" maggiore di OM' si traccia la cicloide allungata.



Figura 8.5 Cicloide ordinaria, accorciata ed allungata

9. Animazione di una figura geometrica

Per lo studio delle deformazioni dinamiche delle figure e delle proprietà che rimangono invarianti, *Cabri Géomètre* fornisce la possibilità di animarle in modo "automatico". Per illustrare questo strumento torniamo all'esempio della parabola nel caso in cui il luogo è determinato dallo spostamento di P al variare di H su d (direttrice).



Figura 9.1 Animazione della figura.

È possibile studiare il movimento di P anche senza visualizzare il luogo descritto: questa opzione si rivela molto utile, ad esempio, in simulazioni di tipo meccanico. Si utilizza lo strumento **Animazione** contenuto nella casella di strumenti **Testo e simboli** con cui si applica al punto H una "molla" che viene più o meno tesa trascinando, con il mouse, il punto "pilota" della figura.

Quando si rilascia la molla il punto H inizia a spostarsi sulla retta d automaticamente, trascinando con sé tutta la costruzione.

Applicando l'opzione **Traccia** del menu **Testo e simboli** al punto P e di seguito animando il punto H (appartenente alla retta d), si ottiene la visualizzazione della "traiettoria" descritta dal punto P costituita da un insieme di punti.

Per cancellare la traccia del punto P, senza alterare il resto della costruzione, si usa la voce *Ridisegna tutto* del menu testuale *Edita*. In questo modo, però, se si trascina ancora il punto H (su d) il punto P continua a lasciare la traccia. Per togliere definitivamente la traccia si deve selezionare nuovamente l'oggetto di cui si è chiesta la traccia in precedenza (il punto P nel nostro esempio) usando nuovamente lo strumento *Traccia*. Si vede che il punto P lampeggia. Facendo un clic sul punto P (o in generale sugli oggetti che sono stati precedentemente selezionati per la traccia), viene deselezionata la traccia del punto.

L'animazione è uno strumento comodo in alcune situazioni di esplorazione di proprietà, ma non introduce particolari novità rispetto al *Luogo*. Dal punto di vista didattico, invece, l'animazione fornisce uno strumento di forte suggestione per modificare dinamicamente le figure.



Figura 9.2 La "molla" di Cabri Géomètre e l'animazione delle figure.

Lo strumento *Animazione multipla* apre invece altre possibilità in quanto consente di studiare il moto di un oggetto quando il suo spostamento è determinato non da un singolo punto, ma da due o più punti di base.

Vediamo un esempio di Animazione Multipla in cui realizziamo un "biliardo".

La costruzione inizia tracciando un quadrato; si prosegue con i seguenti passi:

- 1. Punto X su un lato orizzontale.
- 2. Punto *Y* su un lato verticale.
- 3. Retta r passante per X parallela all'asse delle ascisse.
- 4. Retta *s* passante per *Y* perpendicolare all'asse delle ascisse.
- 5. Punto *P* di intersezione di *r* e *s*.



Figura 9.3 Il biliardo realizzato con un'animazione multipla

Abilitiamo la traccia al punto P e applichiamo le molle dell'*Animazione multipla* ai punti X e Y (figura 9.3). Il movimento dei punti X e Y determina un movimento simile a quello di una palla da biliardo del punto P. Dopo aver effettuato alcune animazioni si osserva che la velocità con cui si spostano i punti di base X e Y, che determina la forma della figura ottenuta, è determinata dalla tensione delle rispettive molle. Non si può avere un controllo preciso di tipo numerico, ma soltanto avere un'idea qualitativa del fenomeno.

10. Le trasformazioni geometriche del piano

La casella **Trasformazioni** (figura 10.1) presenta una serie di strumenti che corrispondono alle trasformazioni del piano di uso più comune: abbiamo infatti a disposizione la *Simmetria assiale* e la *Simmetria centrale*, la *Traslazione*, la *Rotazione*, l'*Omotetia* e l'*Inversione* (circolare).



Figura 10.1 La casella di strumenti Trasformazioni

L'angolo di rotazione e il rapporto di omotetia sono di solito definiti assegnando un numero (strumento **Numeri** della casella di strumenti **Testo e simboli**). In *Cabri II Plus* per definire l'angolo di una rotazione oltre a un numero si può anche indicare un angolo (si clicca su tre punti; il secondo punto è il vertice dell'angolo). In *Cabri II Plus* il rapporto di omotetia può essere assegnato cliccando su tre punti allineati *A*, *B* e *C*. Il secondo punto diventa il centro di omotetia; il rapporto di omotetia è determinato dal rapporto, con segno, tra i vettori \overrightarrow{BC} e \overrightarrow{BA} .



Figura 10.2 Omotetia definita da 3 punti allineati

Tutte le trasformazioni citate, ad eccezione dell'inversione circolare, agiscono anche su oggetti complessi e non solamente su punti; si può, ad esempio, ruotare un poligono di un dato angolo. Per definire una simmetria assiale occorre disegnare una retta ed una figura da trasformare. Si ottiene una figura nella quale si possono studiare le proprietà di una simmetria assiale.



Figura 10.3 Simmetria assiale.

Le simmetrie assiali svolgono un ruolo molto imporatante perché componendo tra loro delle simmetrie assiali è possibile ottenere tutte le altre isometrie del piano. Ad esempio, componendo due simmetrie assiali di assi paralleli si ottiene una traslazione; il vettore di traslazione è il doppio della distanza tra le due rette. Combinando invece due simmetrie assiali aventi assi incidenti, si ottiene una rotazione di un angolo doppio di quello formato dai due assi di simmetria.

Per applicare una simmetria centrale occorre assegnare il centro di simmetria O ed un oggetto da simmetrizzare. La simmetria centrale in realtà è una rotazione di mezzo giro attorno ad un dato punto. Non sarebbe quindi necessario avere a disposizione anche la simmetria centrale, essendoci già le rotazioni in *Cabri Géomètre*; tuttavia la presenza della simmetria centrale rende particolarmente agevoli tutta una serie di costruzioni.



Figura 10.4 Simmetria centrale.

Per definire una traslazione è necessario assegnare inizialmente un vettore.



Figura 10.5 Traslazione

Per definire una rotazione occorre prima costruire il centro di rotazione e scrivere un numero sullo schermo di *Cabri*; il numero rappresenta la misura in gradi (o in radianti) dell'angolo di rotazione. Si indica prima l'oggetto, poi il centro e un angolo definito da un numero. Il numero può essere variato dinamicamente, così come il centro di rotazione e la figura da ruotare.





Anche per le omotetie occorre definire prima un centro di omotetia ed assegnare un numero diverso da zero che si chiamerà rapporto di omotetia (nella figura $\lambda = 2$).



Figura 10.7 Omotetia o dilatazione

Nel menu delle trasformazioni geometriche mancano le similitudini perché ogni similitudine si può ottenere mediante composizione di una isometria con una omotetia. Tuttavia, in *Cabri II Plus*, usando lo strumento *Omotetia* è possibile anche ottenere una similitudine indicando tre punti *A*, *B* e *C*. Il punto *B* è il centro della similitudine.

Il menu delle trasformazioni geometriche si conclude con l'*inversione circolare* che permette di studiare questioni riguardanti la geometria detta "inversiva" ed alcune questioni di geometria non euclidea, ad esempio il modello di piano iperbolico cosnosciuto con il nome di "cerchio di Poincaré".

La definizione di *inversione circolare* è del tutto elementare: in un piano, sia c una circonferenza di centro O (detto centro di inversione) e raggio r.

Per definizione, l'immagine di un punto P è il punto P' giacente sulla semiretta OP uscente da O e passante per P tale che:

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$$
.

I punti $P \in P'$ si dicono *punti inversi* rispetto alla circonferenza c. Da questa definizione segue che, se P' è il punto inverso di P, allora P è l'inverso di P'.



Figura 10.8 Costruzione dell'inverso circolare del punto P.

Un'inversione circolare scambia tra loro l'interno e l'esterno del cerchio c, poiché se OP < r si ha OP' > r, e se OP > r si ha OP' < r. I soli punti del piano che rimangono fissi sono i punti della circonferenza.

La legge indicata sopra non definisce l'immagine del centro O. E' chiaro che se un punto P movendosi si avvicina ad O, la sua immagine P' si allontana sempre più nel piano. Per questa ragione talvolta si dice che nell'inversione il punto O corrisponde alla retta *all'infinito*. Questa terminologia permette di affermare che un'inversione stabilisce una corrispondenza biunivoca, senza eccezioni, tra i punti del piano e le loro immagini: ogni punto del piano ha una ed una sola immagine ed è l'immagine di uno ed un solo punto. Questa proprietà è comune a tutte le trasformazioni del piano fino alle affinità. Ma l'inversione circolare non è un'affinità perché in generale non trasforma rette in rette. Una retta può trasformarsi in una circonferenza. Con *Cabri* si possono studiare in modo interattivo e dinamico le proprietà della inversione circolare. La più importante proprietà dell'inversione è quella di trasformare rette e circonferenze in rette e circonferenze. Più precisamente si ha che, tramite un'inversione circolare:

- a) una retta passante per *O* si trasforma in una retta passante per *O* (retta unita, ma non di punti uniti);
- b) una retta non passante per O si trasforma in una circonferenza passante per O;
- c) una circonferenza passante per *O* si trasforma in una retta passante per *O*;
- d) una circonferenza non passante per O si trasforma in una circonferenza non passante per O.

Con *Cabri* si può inoltre scoprire che l'inversione circolare, proprio come una riflessione rispetto ad una retta, è una trasformazione che inverte l'ordinamento su una data curva chiusa. Usando un'animazione di *Cabri* si vede ad esempio che mentre P descrive una circonferenza con verso antiorario, il punto P' descrive la circonferenza immagine con verso orario.



Figura 10.9 Inversione circolare di una circonferenza non passante per O.



Figura 10.10. Inversione circolare di una circonferenza passante per O.

11. La verifica di proprietà geometriche

La casella degli strumenti **Proprietà** (figura 11.1) permette di eseguire delle operazioni di verifica delle relazioni tra gli oggetti presenti nella figura.



Figura 11.1 Casella di strumenti Proprietà

Vediamo quali sono le proprietà che si possono esaminare

- allineamento di tre punti;

- perpendicolarità e parallelismo di due direzioni, definite da: una retta, una semiretta, un vettore, un segmento o il lato di un poligono;

- equidistanza di un punto da altri due punti;
- appartenenza di un punto a un oggetto.

Supponiamo di voler verificare il parallelismo tra due rette; scegliamo la voce *Parallelo*? e indichiamo le due rette (che supponiamo non parallele); appare il messaggio "Gli oggetti non sono paralleli".

Modifichiamo ora la pendenza di una delle rette; possiamo osservare che la proprietà viene verificata nella nuova configurazione e che quando viene raggiunto il parallelismo, il messaggio viene modificato e diventa "Gli oggetti sono paralleli".

È importante osservare che il controllo viene effettuato sulla configurazione che abbiamo sullo schermo: *Cabri* ci dice se le due rette in quella posizione che appare sullo schermo sono o meno parallele e non che la proprietà di essere parallele è vera per ogni configurazione (cioè se è una proprietà intrinseca della costruzione che abbiamo realizzato e non un fatto casuale della particolare situazione in cui ci troviamo).

Esempio 1. Si consideri un triangolo ABC e si congiungano i punti medi M ed N dei lati AC e BC. Verificare con *Cabri* che il lato AB è parallelo alla retta MN (corollario del teorema di Talete).



Figura 11.2 Verifica di proprietà

Esempio 2. Si consideri una corda di una circonferenza. Verificare che il centro della circonferenza appartiene all'asse della corda.



Figura 11.3 Verifica di proprietà

Esempio 3. Un altro interessante è il seguente: si costruisca un triangolo ABC, il baricentro G, l'ortocentro H e il circocentro O. Si costruisca poi la retta definita da due di questi punti notevoli, ad esempio la retta per G e per H (retta di Eulero). Ora usiamo lo strumento **Allineato?** cliccando rispettivamente su G, H e O. Si otterrà come risposta: "I punti sono allineati". Questa risposta non costituisce ovviamente una dimostrazione, ma può rappresentare una premessa per la ricerca di una dimostrazione.

Esempio 4. Dato un triangolo *ABC* e la circonferenza γ ad esso circoscritta, i piedi delle perpendicolari (*T*, *R*, *S*) condotte da un punto *P* di γ alle rette dei lati sono allineati (retta di Simson).

Chiediamo a *Cabri* se il punto *S* appartiene alla retta *RT* usando lo strumento **Appartiene**?. La risposta è positiva e quindi si può congetturare che i punti *R*, *S* e *T* siano allineati; si deve comunque ricordare che questa risposta di *Cabri* non costituisce una dimostrazione.



Figura 11.4 Verifica di proprietà

12. Lo strumento Tabella

Un'ulteriore possibilità fornita dal programma *Cabri Géomètre* per la verifica di proprietà metriche è l'uso della *Tabella* della casella di strumenti *Misura*. Si tratta di un sorta di foglio elettronico molto semplificato che permette di raccogliere delle misure o dei calcoli presenti nel disegno.

Scegliendo dei numeri dalla costruzione viene riempita una riga della tabella, usando tante colonne quante sono necessarie. Se dopo ogni trasformazione della figura si usa il tasto **Tab** i nuovi valori vengono memorizzati nelle righe successive della tabella; questo ci permette di capire se possono esistere delle relazioni tra le quantità visualizzate.

La raccolta dei dati può essere ancora più semplice e veloce se effettuata muovendo gli elementi base della figura con *Animazione* o *Animazione multipla*.

Fasi per ottenere la tabella riportata in figura 12.1:

- 1. Si disegna un segmento AB.
- 2. Si misura il segmento e si misura la lunghezza della circonferenza.
- 3. Si usa lo strumento Calcolatrice e si calcola il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e la misura del raggio.
- 4. Usando il menu Visualizza si seleziona lo strumento Testo e poi il valore numerico della misura del raggio e della circonferenza.
- 5. Si usa lo strumento Tabella eventualmente ridimensionandola nella parte inferiore destra della tabella.
- 6. Con il mouse si chiede la tabulazione del primo valore (lunghezza della circonferenza), del secondo valore (lunghezza del raggio) e del rapporto.



Figura 12.1 Tabella nello studio del rapporto tra circonferenza e diametro.

13. La geometria analitica con Cabri Géomètre

Oltre agli strumenti che abbiamo già visto per la geometria euclidea, *Cabri II* contiene un vero e proprio micromondo per lo studio della geometria analitica con la possibilità si variazione dinamica delle figure e di visualizzazione di coordinate di punti e di equazioni di rette e di coniche.

Il sistema di riferimento predefinito (*Mostra gli assi* della casella *Attributi*) è caratterizzato da assi paralleli ai bordi dello schermo e unità di misura reali. Queste caratteristiche possono essere modificate una alla volta, tramite operazioni quali la traslazione (l'origine non è più il centro dello schermo), la rotazione attorno all'origine (gli assi non sono più paralleli ai bordi dello schermo) e la modifica delle unità di misura.

Possiamo introdurre (voce *Griglia* del menu *Attributi*) una griglia che ci indica i punti a coordinate intere, grazie alla quale è facile tracciare con precisione rette per due punti e coniche per cinque punti, di cui visualizziamo l'equazione (*Coordinate o equazioni* del menu *Misura*), come si vede nella figura 12.1, in cui è mostrata la soluzione grafica di un sistema di primo grado.



Figura 13.1 Soluzione grafica di un sistema di primo grado.

Quando deformiamo la figura anche le equazioni si modificano; se spostiamo uno dei punti che definiscono la retta r, si vede che anche le due equazioni cambiano.

L'esempio che abbiamo presentato è sufficiente a mostrare le potenzialità di *Cabri II* nello studio di problemi di geometria analitica; altre interessanti applicazioni si ottengono studiando alcune

funzioni che si ricavano da problemi geometrici, ad esempio lo studio dell'area dei rettangoli di area data (ramo di iperbole equilatera) oppure lo studio dell'area di rettangoli aventi lo stesso perimetro.

13.1 La retta come funzione

Nella seguente figura si studia la retta come una corrispondenza biunivoca e si rende dinamica questa nozione. Con *Cabri* è possibile fare questa esperienza: muovendo il punto sull'asse delle x si vede cambiare in modo interattivo il valore dell'ordinata sull'asse delle y. I valori possono anche essere trasferiti in modo dinamico in una tabella. Il viceversa, invece, non è molto adatto a *Cabri*. Lo si può fare con *Derive* o anche con un foglio elettronico.



Figura 13.2. Retta come funzione.

Un altro degli obiettivi nello studio della retta come funzione nel piano cartesiano è la reale comprensione del concetto di *pendenza* di una retta come rapporto tra l'incremento in verticale e quello in orizzontale.

Cabri può dare un contributo notevole alla comprensione operativa di questo concetto. A volte si insiste sulla seguente definizione di pendenza:

$$m = -\frac{a}{b}$$
.

In realtà quest'ultima è una formula corretta, riferita alla equazione della retta sotto la forma ax + by + c = 0, ma è poco significativa. Si tratta di una definizione puramente algebrica della

pendenza di una retta! La definizione più significativa è la seguente:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan \alpha ,$$

in base alla quale il coefficiente angolare viene definito come un rapporto tra incrementi (quindi un *rapporto incrementale* che poi avrà, nello studio successivo, sviluppi molto significativi, vedi le derivate) o come tangente dell'angolo α .

Una nota su quest'ultimo punto: non è sempre vero che *m* sia uguale a *tan* α . Ciò è vero solo se il sistema che si sta utilizzando è ortogonale e monometrico. Quindi è più corretto parlare di "pendenza" di una retta piuttosto che di "coefficiente angolare". Il coefficiente angolare, appunto presuppone la nozione di angolo, che ha senso solo in un sistema di riferimento ortonormale. Se si cambiasse l'unità di misura in uno dei due assi, come si fa normalmente in tutte le scienze che usano i grafici cartesiani, l'angolo α cambia a seconda della unità di misura scelta su uno degli assi. Quindi la definizione più corretta di pendenza dovrebbe essere la seguente:

$$m = \frac{\text{variazione corrispondente della } y}{\text{variazione della } x} = \frac{\text{incremento corrispondente della } y}{\text{incremento della } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Si è usata l'espressione "variazione corrispondente della y", oppure "incremento corrispondente della y", per sottolineare che, in un certo senso, c'è un "prima" ed un "dopo": prima si fissa l'incremento della x, poi si determina il conseguente incremento della y.

In questa definizione, *Cabri*, usato come "lavagna elettronica" dall'insegnante, è molto efficace perché permette di osservare, in modo interattivo e dinamico, la relazione tra i due incrementi, al variare dei punti P e Q, oppure al variare della retta.



Figura 13.3. Pendenza di una retta.

E' opportuno comunque osservare che *Cabri* possiede già uno strumento che fornisce la *pendenza* di una retta, anche se inizialmente conviene seguire un approccio interattivo e graduale per arrivare alla definizione di coefficiente angolare e non usare fin da subito lo strumento *Pendenza*.

Sarà opportuno chiedere agli allievi cosa succede allora per le rette "orizzontali" e poi per quelle "verticali" e arrivare alla conclusione che in questo caso non si può definire il coefficiente angolare e nemmeno di funzione.

Si farà notare, per esempio esaminando il fascio delle rette passanti per l'origine degli assi y = mx, cosa succede alla pendenza quando la retta si avvicina all'asse y ruotando in senso

antiorario o in senso orario attorno all'origine degli assi.



Usando l'ambiente di geometria analitica di *Cabri II* si possono quindi studiare facilmente le rette e le coniche, approfondendo dal punto di vista grafico la proporzionalità diretta ed inversa.



Figura 13.5. Perimetro di un quadrato.

13.2 Esempio di funzione lineare

Si studi l'area del rettangolo APQD, al variare della misura del segmento AP. Disegnare il grafico dell'area del rettangolo BCQP in funzione di AP. Come cambia il grafico se si chiede in funzione di BP?



Figura 13.5. Retta come funzione.

Altri esempi di funzioni di origine geometrica:

- 1. Grafico del perimetro di un triangolo equilatero in funzione del lato (qual è la pendenza della retta);
- 2. Grafico dell'altezza di un triangolo equilatero in funzione del lato;
- 3. Grafico del perimetro di un dato poligono regolare (ad esempio un ottagono regolare) in funzione del diametro della circonferenza circoscritta;
- 4. Grafico della diagonale di un quadrato in funzione del lato;
- 5. Grafico della lunghezza della circonfernza in funzione del diametro;
- 6. Grafico di una corda di un triangolo, ottenuta intersecando due lati con una retta parallela al terzo lato, in funzione della distanza di questa corda dalla base.

Con *Cabri II* si possono anche usare le coordinate polari. Occorre entrare nel menu *Preferenze* e scegliere il sistema di coordinate polari. Apparirà una retta ed un punto *O* chiamato polo del sistema di coordinate polari. Se si visualizza la griglia appariranno dei punti che stanno su circonferenze concentriche, aventi distanza 1,2,3,... dall'origine e formanti angoli che vanno di 30° gradi in 30°. Si può anche chiedere di avere un sistema di coordinate polari in radianti.

13.3 Funzioni quadratiche: area di un quadrato in funzione del lato

L'area di un quadrato in funzione del lato:



Figura 13.6. Area di un quadrato.

Con una funzione quadratica, presi due punti sulla curva, il rapporto $\Delta y/\Delta x$ non è più costante; tuttavia rimangono costanti le differenze seconde. Ciò caratterizza le funzioni polinomiali di 2° grado.

13.4 Famiglia di parabole con vertice nell'origine degli assi

Il grafico della funzione quadratica "fondamentale" $y = x^2$ è alla base della successiva costruzione del grafico di $y = ax^2$ e infine della più generale funzione di secondo grado $y = ax^2 + bx + c$

Che tuttavia il grafico di di $y = x^2$ sia una parabola forse *non è opportuno dimostrarlo nel biennio*. Per il momento, nel biennio, "parabola" è un nome che si dà una particolare curva di cui si descrivono alcune caratteristiche. Non si parlerà quindi, nel biennio, di fuoco e di direttrice e della definizone della parabola come luogo geometrico del piano, rimandando lo studio di queste nozioni alla classe successiva.

Cabri in questa fase può aiutare molto ad evitare che gli studenti commettano i consueti errori quando disegnano il grafico di una parabola: disegnare un punto angoloso laddove c'è il vertice; far cambiare di concavità alla parabola; disegnarla asimmetrica oppure in modo che non si "allarghi indefinitamente". Della parabola, infatti, gli allievi non hanno l'immediata percezione che invece hanno per la retta e per la circonferenza.

L'identificazione tra funzione $y = ax^2$ e la funzione $y = ax^2 + bx + c$, si ottiene in modo operativo con C*abri*, utilizzando una traslazione. L'identificazione può avvenire sia in un senso che nell'altro, considerando la traslazione che fa corrispondere all'origine degli assi O il vertice V. la dimostrazione può essere lasciata per approfondimenti successivi, quando gli allievi ritorneranno alla geoemtria analitica in modo più sistematico.

La seguente figura indica una famiglia di parabole aventi il vertice nell'origine. Per disegnare quarta famiglia con *Cabri*, si può prima di tutto disegnare $y = x^2$ e poi disegnare le $y = ax^2$. Il grafico si ottiene rapidamente con l'uso della calcolatrice di *Cabri*.

Per ottenere l'equazione della parabola in modo automatico da *Cabri* bisogna far ricorso allo strumento *Conica per 5 punti*.



Le applicazioni possono essere innumerevoli; ne mostriamo una sola, in cui tracciamo il grafico della funzione $y = x^2$.

I passaggi iniziali sono i seguenti:

- 1. Sistema di assi standard e la griglia (Mostra gli assi e Griglia della casella Attributi).
- 2. Punto *P* sull'asse *x*.

3. Coordinate di *P* (*Coordinate o equazioni* del menu *Misura*).

Accediamo ora alla calcolatrice (voce *Calcolatrice* sempre del menu *Misura*) in cui impostiamo la funzione x^2 , indicando con il mouse l'ascissa di *P*; il numero (2,25 nell'esempio della figura precedente). Tale valore viene riportato come argomento della funzione nel "display" della calcolatrice e indicato con la lettera *a*.

Calcolatrice	×
Stop Annulla a^2	= 5,06
inv sin cos tan sqrt ^ In log abs pi () +	- × / =

Grafici di funzioni con l'uso della calcolatrice.

Eleviamo *a* al quadrato e per fare eseguire il calcolo premiamo il tasto =; alla sua destra appare il risultato, il quadrato di *a* (5,06 nell'esempio). Per utilizzare questo risultato nelle operazioni seguenti è necessario trasportarlo nell'area del disegno; compare il messaggio "Risultato: 5,06". Con *Trasporto di misura* riportiamo sull'asse delle ordinate il risultato, ottenendo il punto Q. Tracciando una retta per Q parallela all'asse delle ascisse e una retta per il punto P parallela
all'asse delle ordinate si determina il punto *R* che ha coordinate (*a*, a^2). Per ottenere il grafico della funzione $y = x^2$, come è mostrato nella figura precedente, occorre tracciare il luogo di *R* al variare di *P*.

14 La calcolatrice

Nello studio di funzioni con *Cabri* si presenta molto utile l'uso della calcolatrice. La *Calcolatrice* si attiva aprendo la casella degli strumenti *Misura*; è uno strumento per lo svolgimento di calcoli con prestazioni analoghe a quelle di una calcolatrice scientifica.





La possibilità di importare, e utilizzare nei calcoli, dei valori ottenuti da costruzioni di *Cabri* (come, ad esempio, misure di segmenti, di angoli o di aree) e di esportare valori per realizzare costruzioni, ne amplia di molto l'utilità. Si tratta di uno strumento che può essere utilizzato per presentare i grafici delle funzioni elementari, conservando sempre le possibilità di deformazione dinamica tipiche di *Cabri Géomètre*.

La calcolatrice permette di effettuare dei calcoli su valori provenienti dalla figura (misure, numeri editati, risultati di calcoli) o introdotti da tastiera. Quando si sposta la figura, le misure e i calcoli sono istantaneamente aggiornati.

Il risultato è visualizzato provvisoriamente nella finestra di destra. Per essere conservato questo risultato deve essere ricopiato nella finestra della figura (si clicca nella finestra del risultato e si fa scivolare tale risultato nella posizione dove lo si vuole collocare nella finestra della figura).

Si può anche rivedere i calcoli che hanno permesso di ottenere un certo risultato presente nella finestra del disegno. Per fare questo occorre selezionare la calcolatrice e fare doppio clic sul risultato; il calcolo è allora editato e può essere modificato. La modifica del risultato è immediatamente registrato nella figura.

La calcolatrice può utilizzare numeri scritti da tastiera e le funzioni che si possono utilizzare non sono limitate a quelle che appaiono sull'immagine della calcolatrice.

15 Grafici di funzione con *Cabri Géomètre*

Ci proponiamo, con Cabri, il seguente problema.

Tracciare il grafico della funzione $y = x^2 - 3x$ (*primo metodo*).

Tracciamo il grafico della funzione, iniziando dal "metodo manuale" (l'unico utilizzabile in *Cabri II*); pur non essendo competitivo - in *Cabri II Plus* - con gli altri due metodi che proporremo di seguito, ha tuttavia il pregio di farci seguire "passo a passo" il meccanismo usato da *Cabri*.

- Introduci un sistema di coordinate ([Attributi]Mostra gli assi).
- Costruisci un punto sull'asse delle ascisse ([Punti]Punto, cliccando quando compare il messaggio "su questo asse").

Attenzione: cliccando quando compare il messaggio "su questo segno" si ottiene invece un punto vincolato alla graduazione, inadatto ai nostri scopi.

- Scegli [Misura]Coordinate o equazioni e clicca sull'ascissa del punto: compaiono le coordinate del punto.
- Scegli [Misura]Calcolatrice e clicca sull'ascissa del punto; questo numero è chiamato *a* e riportato nella calcolatrice.



- Completa la definizione della funzione scrivendo a^2-3*a e clicca sul simbolo di uguale a destra della barra di inserimento; compare il valore f(a) della funzione.



- Clicca su questo valore e trasportalo in una zona vuota del foglio da disegno; si vede che viene preceduto dal messaggio "Risultato:".
- Con l'opzione [Costruzioni]Trasporto di misura riporta f(a) sull'asse delle ordinate.
- Scegli due volte [Costruzioni]Retta parallela, tracciando la parallela alle ordinate passante per il punto (a, 0) e per il punto (0, f(a)).

- Con lo strumento [Punti]Punto costruisci il punto di intersezione di queste ultime due rette: ottieni il punto (a, f(a)); chiamalo P.
- Sei ora pronto a tracciare il grafico della funzione: scegli [Costruzioni]Luogo, clicca prima su P (punto che traccia il luogo), poi sul punto sull'asse delle ascisse. Ottieni il grafico della funzione.



Sul grafico ottenuto si possono fare varie operazioni; puoi ad esempio selezionarlo con il puntatore e cambiarne lo spessore, il colore ed eventualmente (in *Cabri II*) aumentare il numero dei punti calcolati sul grafico premendo il tasto $\boxed{\blacksquare}$.

Nel seguito proponiamo un secondo metodo per tracciare il grafico di una funzione.

Tracciare il grafico della funzione $y = x^2 - 3x$ (secondo metodo).

Il metodo "semiautomatico" qui descritto è disponibile solamente in *Cabri II Plus*; rispetto al metodo usato nella costruzione precedente vengono semplificate le procedure per il calcolo della funzione.

- Analogamente a quanto fatto nella costruzione precedente, introduci un sistema di coordinate ([Attributi]Mostra gli assi) e costruisci un punto sull'asse delle ascisse ([Punti]Punto) e visualizza le coordinate ([Misura]Coordinate ed equazioni).
- Scegli [Testo e simboli]Espressione, cliccando in una zona vuota dello schermo; appare un riquadro.
- Nel riquadro scrivi x^2-3*x.
- Scegli [Misura]Applica un'espressione, clicca sull'espressione e poi sull'ascissa del punto; appare un rettangolo, che puoi posizionare a piacimento. Quando clicchi sul rettangolo, compare un numero, che è il valore f(x) della funzione.
- Con l'opzione [Costruzioni]Trasporto di misura riporta f(x) sull'asse delle ordinate e come nella costruzione precedente, costruisci il punto il punto (x, f(x)).
- Traccia il grafico della funzione: scegli [Costruzioni]Luogo, cliccando prima sul punto P, poi sul punto sull'asse delle ascisse. Ottieni il grafico della funzione.

Sul grafico ottenuto si possono fare varie operazioni; puoi ad esempio selezionarlo con il puntatore e cambiarne lo spessore, il colore. Eventualmente puoi anche cambiare l'espressione della funzione e vedere cambiare la sua rappresentazione grafica istantaneamente.

Nel seguito proponiamo un terzo metodo, il più rapido, per tracciare il grafico di una funzione (disponibile solo in *Cabri II Plus*).

Tracciare il grafico della funzione $y = x^2 - 3x$ (*terzo metodo*).

Cabri II Plus consente di tracciare il grafico di una funzione ancora più rapidamente rispetto a quanto si è visto con il secondo metodo, automatizzando le procedure di trasporto di f(x) sull'asse delle ordinate e di tracciamento del grafico.

- In un nuovo foglio di disegno, ripeti i primi passi della costruzione precedente: sistema di assi e punto sull'asse delle ascisse.
- Scegli [Testo e simboli]Espressione, cliccando in una zona vuota dello schermo; appare un riquadro.
- Nel riquadro scrivi l'espressione x^2–3*x.
- Scegli [Misura]Applica un'espressione.
- Clicca sull'espressione e poi sull'asse delle ascisse (oppure sull'asse delle ordinate); compare il grafico richiesto.

Sul grafico ottenuto si possono fare varie operazioni; puoi ad esempio selezionarlo con il puntatore e cambiarne lo spessore, il colore. Eventualmente puoi anche cambiare – al contrario di quel che succede in *Cabri II*, l'espressione della funzione e vedere cambiare la sua rappresentazione grafica istantaneamente.

16. Conclusioni

Questa pagine hanno voluto fornire una guida rapida e, per ragioni di spazio, necessariamente non esaustiva, delle caratteristiche principali di *Cabri Géomètre II Plus*.

- *Cabri Géomètre* è un "micromondo" per lo studio della geometria euclidea come la versione precedente del programma; utilizzando, infatti, la possibilità di togliere alcune voci dai menu siamo in grado di costruire un "sottoinsieme" (un menu "euclideo") di *Cabri*, che ha le stesse caratteristiche di base della versione precedente con alcune migliorie legate soprattutto alla facilità d'uso e all'ergonomia generale del programma dovute all'ambiente Windows.

- *Cabri Géomètre* possiede alcuni strumenti, come ad esempio il *Trasporto di misura*, che fanno andare oltre l'ambito delle costruzioni con riga e compasso e si presenta quindi come un ambiente software nuovo, legato ad una geometria molto più ampia di quella euclidea.

- Con *Cabri Géomètre* si ha a disposizione un ambiente dedicato esplicitamente alla geometria analitica con la possibilità di visualizzare le equazioni di rette e di coniche; questo ambiente possiede tutte le caratteristiche di "esplorazione dinamica" tipiche di *Cabri* e permette un approccio particolarmente interessante allo studio della geometria analitica, in un certo senso complementare a quello che si può condurre con programmi di calcolo simbolico.

- Con *Cabri Géomètre II Plus* si possono ora affrontare anche questioni di grafici di funzioni, grazie alla calcolatrice, agli strumenti **Espressione** e **Applica un'espressione** e alla sua capacità di interagire con la figura tracciata sullo schermo.

Si tratta quindi di un ambiente molto ricco e articolato, non riconducibile ad un unico ambito teorico, quello della geometria delle costruzioni con riga e compasso. Questa caratteristica amplia molto le potenzialità applicative del software in classe.

Occorre quindi che l'insegnante conosca in modo approfondito tutte le potenzialità di questo strumento per riuscire a collocarlo nella propria progettazione didattica con piena consapevolezza degli obiettivi da raggiungere.

Per questo può sembrare che *Cabri Géomètre II Plus* sia più adatto a studenti della scuola secondaria superiore che non a studenti della scuola media, forse maggiormente esposti al rischio di perdersi nella grande ricchezza di funzionalità offerte dal software.

Si tenga comunque presente che *Cabri Géomètre* offre la possibilità all'insegnante - unica nel panorama del software di geometria dinamica - di togliere, se lo si ritiene didatticamente utile, degli strumenti dal menu in base a precise scelte del docente nel percorso di apprendimento. Ci sono comunque esperienze, in Italia e nel mondo, di introduzione di *Cabri Géomètre* in tutti i tipi di scuola, dalla scuola di base all'università; si rinvia alla bibliografia e all'elenco dei siti per un'informazione su tali esperienze.

Queste sono però considerazioni fatte in astratto, alle quali occorre fare seguire delle esperienze dirette di utilizzo in classe. Come sempre, è il lavoro di ricerca fatto dagli insegnanti che può determinare la naturale collocazione didattica del programma ed esplorarne tutte le potenzialità per l'insegnamento e apprendimento della geometria e più in generale della matematica.

Riferimenti bibliografici

- P. Boieri, C. Dané, *Cabri. Laboratorio informatico per la Matematica*, Loescher, Torino 2003.
- P. Boieri, C. Dané, *Geometria con Cabri. Costruire, scoprire e dimostrare*, Loescher, Torino 2003.
- C. Di Stefano, Cabri A, B, C. Matematica in laboratorio, Ghisetti & Corvi, Milano 2000.
- M.A. Mariotti, La geometria in classe. Riflessioni sull'insegnamento e apprendimento della geometria, Pitagora, Bologna 2005.

Si veda anche la seguente rivista che contiene molti materiali didattici sul programma:

- Rivista "CABRIRRSAE - Bollettino degli utilizzatori di *Cabri Géomètre* e di altri software matematici", IRRSAE Emilia-Romagna, Bologna (1993-2004);

e i quaderni collegati:

- Quaderni di "CABRIRRSAE", IRRSAE Emilia-Romagna, Bologna (sono stati pubblicati una ventina di quaderni su diversi argomenti di geometria visti con *Cabri Géomètre*).

Bollettini e Quaderni di "CABRIRRSAE" sono disponibili in modo completo nel sito: <u>http://web.unife.it/progetti/fardiconto/</u>

Siti di riferimento in Internet

La versione di prova del software Cabri II Plus si può scaricare sul sito:

http://www.cabri.com/download-cabri-2-plus.html

Nello stesso sito si può scaricare liberamente il manuale d'uso.

Si consiglia di visitare il seguente sito e in particolare le pagine dedicate al "Progetto Cabri Géomètre":

http://web.unife.it/progetti/fardiconto/

Quest'ultimo è il sito di geometria più ricco in Italia e contiene molto materiale utile per l'insegnamento della matematica.

Il sito ufficiale di Cabri è il seguente:

http://www.cabri.com/