

# Calcolo Stocastico e Mercati Finanziari

Alessandra Borrelli  
Dipartimento di Matematica e Informatica  
Università degli Studi di Ferrara  
brs@unife.it

2020/2021



# Indice

<b>1</b>	<b>Mercati finanziari e principio di arbitraggio</b>	<b>5</b>
1.1	Obbligazioni, Azioni, Titoli derivati. . . . .	5
1.2	Mercati finanziari . . . . .	9
1.3	Borsa Valori. . . . .	12
1.4	Richiami sulle leggi finanziarie. . . . .	16
1.5	Rendite . . . . .	23
1.6	Applicazioni delle rendite . . . . .	31
1.7	Contratti forward e futures. . . . .	39
1.8	Nozioni di base sulle Opzioni. . . . .	45
1.9	Swap, Warrant e Convertibili . . . . .	47
1.10	Portafoglio e portafoglio di arbitraggio. . . . .	50
<b>2</b>	<b>Alcune proprietà matematiche delle opzioni ed il loro utilizzo</b>	<b>61</b>
2.1	Introduzione. . . . .	61
2.2	Proprietà delle call europee e americane. . . . .	62
2.3	Relazione di parità put-call. . . . .	72
2.4	Utilizzo delle opzioni e loro combinazioni. . . . .	75
2.5	Opzioni esotiche. . . . .	80
<b>3</b>	<b>Richiami di teoria della probabilità</b>	<b>83</b>
3.1	Spazio di probabilità. . . . .	83
3.2	Variabili casuali. . . . .	87
3.3	Integrazione di variabili casuali. . . . .	99
3.4	Nozioni generali di teoria della misura . . . . .	105
3.5	Indipendenza di variabili casuali. . . . .	107
3.6	Momenti di una variabile casuale. . . . .	112
3.7	Convergenza di successioni di variabili casuali. . . . .	121
3.8	Aspettative condizionate. . . . .	123

<b>4</b>	<b>Processi stocastici</b>	<b>129</b>
4.1	Introduzione ai processi stocastici. . . . .	129
4.2	Processi stocastici: generalità. . . . .	134
4.3	Martingale. . . . .	137
4.4	Processi di Wiener e Moti Browniani. . . . .	140
<b>5</b>	<b>Integrale stocastico di Itô</b>	<b>147</b>
5.1	Premesse. . . . .	147
5.2	Richiami sull'integrale di Riemann. Integrale di Riemann-Stieltjes. . . . .	148
5.3	Nozioni preliminari. . . . .	150
5.4	Definizione di integrale di Itô. . . . .	152
5.5	Proprietà dell'integrale stocastico di Itô. . . . .	162
5.6	Esempio di calcolo di un integrale stocastico. . . . .	166
<b>6</b>	<b>Calcolo differenziale stocastico</b>	<b>173</b>
6.1	Definizione di differenziale stocastico. . . . .	173
6.2	Applicazioni della formula di Itô. . . . .	176
6.3	Equazioni differenziali stocastiche. . . . .	183
6.4	Equazioni differenziali stocastiche lineari. . . . .	190
<b>7</b>	<b>Il modello di Black e Scholes per la valutazione delle opzioni call</b>	<b>201</b>
7.1	Modelli matematici per i prezzi azionari. . . . .	201
7.2	Determinazione del prezzo delle opzioni call europee: equazione di Black e Scholes. . . . .	205
7.3	Risoluzione del problema di Black e Scholes data la condizione finale. . . . .	209
7.4	Calcolo delle derivate della funzione $c$ . . . . .	218
<b>8</b>	<b>Estensioni della formula di Black e Scholes e sue applicazioni</b>	<b>225</b>
8.1	Formula di Black e Scholes per call americane e put europee. . . . .	225
8.2	Estensioni del modello di Black e Scholes. . . . .	227
8.3	Applicazioni della formula di Black e Scholes: valutazione dei titoli emessi da un'impresa. . . . .	230
8.4	Applicazioni della formula di Black e Scholes: strategie di copertura di delta-hedging. . . . .	232
8.5	Applicazioni della formula di Black e Scholes: opzioni reali. . . . .	236
<b>9</b>	<b>Appendici</b>	<b>241</b>
9.1	Appendice 1 . . . . .	241

---

9.2	Appendice 2 . . . . .	245
9.3	Appendice 3 . . . . .	250
9.4	Appendice 4: Brevi cenni sulle equazioni differenziali alle derivate parziali. . . . .	253



# Introduzione

Scopo del corso è fornire agli studenti, oltre ad alcune nozioni di matematica finanziaria elementare, i concetti di base ed i metodi matematici della matematica finanziaria moderna.

In particolare l'ultima parte del corso è rivolta allo studio del modello matematico proposto nel 1973 da Fisher Black e Myron Scholes, generalizzato successivamente da Robert Cox e Merton, per la valutazione del prezzo delle opzioni call europee prima della scadenza. Tale modello svolge un ruolo fondamentale nella matematica finanziaria moderna, essendo stato preso successivamente come base per modelli matematici di molti altri titoli finanziari. La sua importanza si evince anche dal premio Nobel assegnato nel 1997 a Scholes e Merton per l'Economia (Black è deceduto nel 1995).

Le opzioni sono titoli che rientrano nella classe dei derivati.

I titoli derivati, strumenti finanziari il cui rendimento è definito in termini di altri titoli, detti sottostanti, sono uno degli elementi più rappresentativi del processo di innovazione che ha riguardato gli strumenti e le istituzioni finanziarie degli ultimi cinquant'anni.

Negli Stati Uniti l'apertura del primo mercato regolamentato per la compravendita di titoli derivati è avvenuta il 26 aprile 1973; allora erano sedici i titoli azionari sui quali era possibile negoziare opzioni al Chicago Board Options Exchange, ma nel giro di vent'anni hanno superato le duecento unità.

In Italia l'attività di compravendita di titoli derivati riguarda solo gli anni più recenti: l'apertura dell'IDEM (Italian Derivatives Market) è avvenuta il 28 novembre 1994 e da allora gli scambi complessivi di derivati sono aumentati in modo rilevante.

La maggior parte di coloro che scambiano contratti derivati non hanno intenzione di acquistare o di vendere effettivamente il titolo sottostante, ma usano i titoli derivati per diversi scopi: per gli *hedgers* l'obiettivo è ridurre il rischio connesso alle proprie attività finanziarie, mentre per gli speculatori è ottenere notevoli guadagni, assumendo posizioni anche rischiose. Altri utilizzatori di deri-

vati, tra cui gli *arbitraggisti*, sfruttano la possibilità di costruire posizioni a costo nullo e profitto sicuro; in generale gli *investitori* considerano i derivati come uno strumento di diversificazione del loro portafoglio.

Se le imprese utilizzassero i derivati solo per operazioni di copertura dal rischio non dovrebbero sorgere difficoltà finanziarie. Tuttavia gli anni Novanta hanno registrato una sequenza di episodi in cui si sono verificate, a livello internazionale, enormi perdite a causa dei derivati. Anche in Italia negli ultimi anni si sono registrate forti perdite sia per enti pubblici sia per banche o grandi aziende a causa dell'uso imprudente o scorretto dei derivati.

Questi contraccolpi hanno contribuito a diffondere in una parte dell'opinione pubblica la convinzione che i titoli derivati abbiano un effetto destabilizzante sui mercati finanziari. In effetti l'utilizzo di tali strumenti consente di assumere posizioni di notevole entità con un modesto impiego di capitale, creando i presupposti di un uso speculativo dei derivati e innescando pressioni sul prezzo dei titoli sottostanti. D'altra parte, le caratteristiche di dinamicità proprie di questi strumenti e il continuo nascere di sempre nuove tipologie di prodotti derivati rende spesso difficili gli interventi di regolamentazione da parte delle autorità. Tuttavia i casi di crolli finanziari a causa dei derivati non devono essere considerati tipici perché la maggior parte degli operatori finanziari usa tali strumenti essenzialmente con lo scopo di copertura dal rischio e non con scopo speculativo.

La rapida estensione del mercato dei derivati è andata in parallelo con lo sviluppo di una teoria matematica dei derivati: in essa il modello per la valutazione del prezzo delle opzioni elaborato nel 1973 da **F. Black** e **M. Scholes** (*The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, *Journal of Political Economy*, **81** (1973)) e generalizzato sempre nello stesso anno da **R.C. Merton** (*Theory of Rational Option Pricing*, *Bell Journal of Economics and Management Science*, **4** (1973)) ha rappresentato il contributo fondamentale e di maggior influenza sia sulla letteratura successiva sia sulle applicazioni da parte degli operatori finanziari.

Nonostante la loro apparente complessità, dal punto di vista matematico i derivati sono particolarmente semplici, poiché il loro valore dipende solo dal prezzo dell'attività sottostante e da pochi altri parametri. Ciò consente di formulare modelli matematici sui derivati, in cui si ricorre prevalentemente al calcolo stocastico.

Tale calcolo sostituisce il calcolo differenziale ed integrale classico ogni volta che si vuole studiare un fenomeno la cui evoluzione temporale è influenzata da eventi casuali ed è quindi soggetta a notevole imprevedibilità. In particolare, nel settore finanziario non è possibile prevedere con esattezza il prezzo futuro di un dato titolo, ad esempio di un'azione, conoscendone la storia passata, perché questo presenta un'influenza del caso. Infatti un evento del tutto imprevedibile, come

il fallimento di una società, lo scoppio improvviso di un conflitto, la caduta di un governo, un atto terroristico di notevole violenza possono produrre delle forti oscillazioni nel prezzo dei titoli quotati in Borsa.

I fenomeni la cui evoluzione temporale è casuale sono descritti mediante i processi stocastici, studiati appunto nell'ambito del calcolo stocastico, avente come base la teoria della probabilità.

Per quanto riguarda l'organizzazione del corso, osserviamo che questo consta essenzialmente di tre parti strettamente correlate tra loro.

- **I parte**

Il Capitolo 1 si propone in primo luogo di fornire alcune nozioni di base di Matematica finanziaria elementare relativamente ai titoli finanziari (obbligazioni, azioni, derivati), ai mercati finanziari, alle leggi finanziarie ed alle rendite. Nell'ultima parte del capitolo si dà la definizione di portafoglio di arbitraggio e si enuncia il teorema fondamentale dell'arbitraggio.

Il Capitolo 2 è dedicato allo studio di alcune proprietà matematiche delle opzioni, ottenute da Merton nel 1973, e del loro utilizzo.

- **II parte**

Nel Capitolo 3 vengono esposti alcuni concetti fondamentali del calcolo delle probabilità e nel Capitolo 4 si introduce il concetto di processo stocastico dedicando particolare riguardo ai processi di Wiener che svolgono un ruolo fondamentale nella parte successiva del corso.

Il Capitolo 5 è rivolto allo studio del calcolo integrale stocastico e il Capitolo 6 allo studio del calcolo differenziale stocastico ed in particolare alle equazioni differenziali stocastiche.

E' da rilevare che nel calcolo stocastico, a differenza di quanto avviene nell'Analisi Matematica classica, il calcolo integrale precede il calcolo differenziale.

- **III parte**

Il Capitolo 7 è dedicato alla deduzione della formula di Black e Scholes ottenuta da F. Black e M. Scholes nel 1973, ripresa e generalizzata da R.C. Merton nello stesso anno. Essa consente di trovare una soluzione al problema della valutazione del prezzo delle opzioni call e put europee prima della data di scadenza.

Infine nel Capitolo 8 si studiano alcune estensioni della formula di Black e Scholes ed alcune sue applicazioni, anche di carattere non strettamente finanziario.

### Modalità d'esame

L'esame si svolge con le seguenti modalità:

- (1) L'esame consiste della sola prova orale, ma gli studenti al momento dell'esame devono presentare alla docente la risoluzione scritta di due esercizi (relativi agli argomenti svolti nei Capitoli 1, 5, 6 del corso) che verranno loro assegnati durante le lezioni.
- (2) Vengono fissati appelli periodici, ma gli studenti che non riescono a essere presenti a tali appelli possono concordare direttamente via e-mail con la docente un'ulteriore data.
- (3) Dopo la discussione sugli esercizi verrà chiesto al candidato di esporre in maniera dettagliata un argomento a sua scelta.
- (4) Le domande successive verteranno su tutto il programma svolto a lezione, ma non verranno richiesti dettagli dimostrativi.
- (5) Il voto finale terrà conto di tutte le parti dell'esame.

### Testi di riferimento

- Dispense delle lezioni scaricabili dal minisito dell'insegnamento
- **E. Agliardi, R. Agliardi:**  *Mercati finanziari*, McGraw-Hill, 2001
- **A. Pascucci:** *Calcolo stocastico per la finanza*, Springer, 2007
- **B. Oksendal:** *Stochastic Differential Equations*, Springer, 2005
- **V. Capasso, D. Bakstein:** *An Introduction to Continuous - Time Stochastic Processes*, Birkhäuser, 2012.

# Capitolo 1

## Mercati finanziari e principio di arbitraggio

### 1.1 Obbligazioni, Azioni, Titoli derivati.

**Definizione 1.1.** *I contratti finanziari sono contratti finalizzati al trasferimento di moneta, di merci o di altri contratti a diverse date di esigibilità (o scadenze), subordinatamente al verificarsi di particolari condizioni (stati).*

**Definizione 1.2.** *Un titolo finanziario è un contratto tra due controparti, il venditore e l'acquirente, che stabilisce per ciascuna data futura e per ogni stato la quantità (positiva o non) di una determinata merce o moneta o contratto finanziario che il venditore deve trasferire all'acquirente.*

*Sono detti titoli primari quei contratti che stabiliscono direttamente trasferimenti di merci o moneta.*

*Sono detti titoli derivati quelli in cui il trasferimento è regolato in modo indiretto, cioè mediante il trasferimento di altri contratti.*

Due esempi di titoli primari sono le obbligazioni e le azioni, titoli che vengono emessi da imprese e società per finanziarsi.

Vediamo di illustrare brevemente le caratteristiche principali di tali titoli.

Per quanto riguarda le obbligazioni, per il momento ci limitiamo a prendere in esame le **obbligazioni ordinarie**, dette anche **obbligazioni senior**.

Le **obbligazioni ordinarie** sono titoli di **debito** per il soggetto che li ha emessi, cioè titoli tali che l'emittente diventa debitore nei confronti dell'acquirente. Garantiscono all'acquirente il rimborso del capitale (al termine del periodo prestabilito cioè alla scadenza delle obbligazioni) più un interesse (la remunerazione che spetta a chi acquista obbligazioni in cambio della somma investita).

Le obbligazioni sono emesse allo scopo di reperire capitali da investire, direttamente tra i risparmiatori e a condizioni più vantaggiose rispetto a quelle dei prestiti bancari. Il vantaggio per la società emittente deriva da tassi di interesse solitamente inferiori rispetto a quelli che sarebbe costretta a pagare rivolgendosi ad un finanziamento bancario di eguale scadenza.

Il possessore riscuote gli interessi mediante un tagliando, detto **cedola** o **coupon**, che viene pagato durante la vita del titolo e può avere diverse periodicità. L'interesse può essere fisso o variabile.

Vi sono anche obbligazioni dette zero coupon, cioè prive di cedole: il loro rendimento consiste in un interesse implicito rappresentato dalla differenza tra il valore ottenuto alla scadenza del titolo, detto valore nominale, e il prezzo di sottoscrizione ossia il costo sostenuto per il suo acquisto, in genere inferiore al valore nominale.

Le obbligazioni possono essere emesse da imprese private, ma anche da enti pubblici ed in particolare dallo Stato.

I principali titoli italiani del debito pubblico sono:

- BOT = buoni ordinari del tesoro
- BTP = buoni del tesoro poliennali
- CCT = certificati di credito del Tesoro
- CTZ = certificati del Tesoro Zero coupon.

I BOT e i CTZ sono privi di cedole, mentre i BTP e i CCT attribuiscono al possessore il diritto di ricevere cedole semestrali calcolate sulla base di un tasso di interesse che per i BTP è fisso, mentre per i CCT è variabile.

Le obbligazioni ordinarie sono titoli a basso rischio perchè nel caso di difficoltà economiche o di liquidazione dell'emittente gli obbligazionisti senior sono i primi ad essere risarciti.

E' comunque possibile stabilire per esse due componenti di rischio: rischio generico e rischio specifico.

- Rischio generico.  
Il rischio generico si ha ad esempio se si vogliono vendere le obbligazioni prima della scadenza. In tal caso bisogna confrontarsi con il prezzo di mercato dei titoli stessi che varia con maggiore o minore continuità.
- Rischio specifico.  
La società emittente può non essere in grado di pagare quanto stabilito. Ne è un esempio il caso dei bonds (ossia delle obbligazioni) dell'Argentina. In genere un'obbligazione emessa dagli Stati dell'Unione Europea, dalla

Banca Mondiale (che è la principale organizzazione mondiale per il sostegno allo sviluppo e la riduzione della povertà) o dalla B.E.I (Banca Europea degli Investimenti) è considerata sicura, mentre un'obbligazione emessa da Stati che si trovano in condizioni economiche difficili o da imprese private può essere molto più rischiosa.

I rischi relativi ad ogni specifica obbligazione vengono calcolati dalle *agenzie di rating* che sono società che assegnano un giudizio o valutazione (rating) riguardante la solidità e la solvibilità di una società emittente titoli sul mercato finanziario. I "rating" sono dei voti basati su una scala predeterminata, generalmente espressa in termini di lettere e/o altri simboli.

Esistono molte agenzie di rating, ma le più conosciute e influenti a livello mondiale sono Standard & Poor's, Moody's Corporation e Fitch Ratings cui si aggiunge la società canadese DBRS, meno quotata rispetto alle altre tre, ma che comunque svolge per l'Europa un ruolo abbastanza importante. La vigilanza sulle agenzie di rating è affidata all'autorità competente dello Stato cui appartiene la società emittente (per esempio, in Italia la Consob), in collaborazione con le autorità competenti degli altri Stati interessati. Gli Stati europei possono coinvolgere anche l'Autorità europea degli strumenti finanziari e dei mercati (ESMA = European Securities and Markets Authority), che è l'autorità paneuropea di vigilanza sui mercati. Da notare che le quattro società citate precedentemente sono le uniche agenzie di rating riconosciute dall'ESMA.

Diamo ora la seguente

**Definizione 1.3.** *Un'obbligazione priva di rischio è un contratto che attribuisce il diritto a ricevere interessi e capitale alle scadenze prefissate, con importi di rimborso uguali in tutti gli stati possibili relativi alla medesima data.*

Dunque con un'obbligazione priva di rischio la cifra che si riceve alle date di scadenza è quella prefissata, in qualunque stato e indipendentemente dagli eventi. Si tratta ovviamente di un caso puramente ideale. Come vedremo, le obbligazioni prive di rischio svolgono un ruolo rilevante in ambito teorico.

Le **azioni** sono titoli di **capitale**, cioè conferiscono all'acquirente i diritti patrimoniali della società emittente, ossia l'acquirente diventa proprietario della società per la quota di azioni acquistate. Le azioni conferiscono il diritto al dividendo, se questo viene distribuito all'interno della società. Ricordiamo che il dividendo è quella parte degli utili netti di una società per azioni che viene distribuita annualmente fra gli azionisti.

Le azioni, a differenza delle obbligazioni, sono investimenti rischiosi poiché l'acquirente partecipa a tutto ciò che accade alla società. Il valore delle azioni dipende cioè dalla riuscita della società.

Così ad esempio se si rappresenta graficamente in funzione del tempo il valore di un'obbligazione poco rischiosa, come un BOT o un CCT, si ottiene un grafico abbastanza lineare con buona prevedibilità e basso rischio, invece se si rappresenta in funzione del tempo il valore di azioni, ad esempio FTSE Italia All-Share (che è un indice della Borsa Italiana), si ottiene un grafico molto frastagliato con scarsa prevedibilità ed alto rischio.

Nel caso di liquidazione o fallimento della società emittente gli azionisti sono gli ultimi ad essere risarciti.

Prendiamo ora in esame una particolare classe di obbligazioni, che non rientrano in quelle ordinarie, dette **obbligazioni subordinate** o anche **obbligazioni junior**.

Come tutte le obbligazioni, per loro natura sono dei titoli di debito, che consentono a chi li compra di diventare creditore dell'emittente, incassando periodicamente degli interessi, ma espongono i risparmiatori a un grado di rischio molto più elevato rispetto alle obbligazioni ordinarie e quindi per tale caratteristica si avvicinano ai titoli di capitale. Infatti le obbligazioni subordinate sono titoli in cui il pagamento delle cedole ed il rimborso del capitale, in caso di particolari difficoltà finanziarie dell'emittente, vengono effettuati solo dopo la soddisfazione degli altri creditori non subordinati, cioè i creditori ordinari oppure dei creditori subordinati di livello inferiore. Proprio per questo motivo i titoli subordinati dovrebbero rendere più di un'obbligazione non subordinata dello stesso emittente con simili caratteristiche. Sono emesse dalle aziende perché rappresentano spesso un'alternativa al più costoso collocamento di azioni.

Vi sono diverse tipologie di obbligazioni subordinate emesse dalle banche con diversi livelli di subordinazione, ai quali corrispondono diversi livelli di rischio. Le obbligazioni con il più basso livello di subordinazione differiscono da un'obbligazione ordinaria solo perché quest'ultima gode di priorità in caso di liquidazione. Al livello successivo troviamo obbligazioni che prevedono la possibilità per l'emittente di bloccare il pagamento delle cedole in caso di profitti insufficienti, ma queste sono corrisposte quando vengono meno le condizioni che hanno determinato la sospensione del pagamento. Infine per la tipologia più rischiosa il pagamento delle cedole può essere annullato (e non solo sospeso) e qualora vengano realizzate perdite in grado di compromettere la solidità patrimoniale dell'emittente, il capitale da rimborsare viene decurtato, pro-quota, di queste perdite.

Vedremo in seguito altri tipi di obbligazioni ad alto rischio correlate ai titoli derivati.

Per quanto riguarda i **titoli derivati**, il loro valore viene a dipendere da quello di un'altra attività finanziaria che prende il nome di **sottostante**. Esempi di sottostante sono merci, azioni, obbligazioni, ma anche valute, tassi di interesse, ecc.

Negli ultimi anni i derivati sono divenuti sempre più importanti nel mondo della finanza. Negli Stati Uniti il mercato dei derivati è stato aperto nel 1973, in Italia solo nel 1994.

I più diffusi titoli derivati sono: **contratti a termine forward e future, opzioni**, di cui parleremo diffusamente in seguito, **swap, warrant** cui faremo un cenno ed altri ancora (ad esempio **certificates**), di cui non ci occuperemo.

Per il momento nel paragrafo successivo diamo qualche nozione di base sui mercati finanziari.

## 1.2 Mercati finanziari

I mercati finanziari rappresentano nella concezione tradizionale i luoghi nei quali vengono scambiate le attività finanziarie ossia i luoghi dove è possibile acquistare o vendere strumenti finanziari (azioni, obbligazioni, derivati, quote di fondi ecc.).

In realtà, grazie alla globalizzazione e alla diffusione del sistema telematico di negoziazione, non è più necessaria l'esistenza di un luogo fisico dove effettuare gli scambi per cui attualmente molto spesso i mercati finanziari non sono più luoghi fisici ma piattaforme informatiche ("sedi di negoziazione") dove si incrociano le proposte di acquisto e di vendita di strumenti finanziari immesse nel sistema telematicamente.

Le principali funzioni economiche attribuite ai mercati finanziari sono le seguenti:

- **Allocazione delle risorse dei singoli individui.**  
Attraverso l'acquisto di titoli, eventualmente effettuato per il tramite di intermediari specializzati, gli individui hanno la possibilità di scegliere le modalità di investimento dei propri risparmi.
- **Provvista di fondi per gli emittenti**  
Le società, le imprese, gli enti pubblici emettendo titoli sul mercato raccolgono finanziamenti per le proprie attività.
- **Fonte d'informazione.**  
Nei mercati finanziari vengono stabiliti i prezzi dei titoli negoziati. Come vedremo, in genere i prezzi sono determinati in base all'interazione tra domanda e offerta e quindi riflettono le preferenze degli operatori che entrano

nel mercato. D'altra parte, i prezzi dei titoli sono resi pubblici mediante il meccanismo chiamato *processo di rivelazione del prezzo* (*price discovery process*) per cui, attraverso i prezzi, il mercato fornisce a tutti gli operatori informazioni facilmente accessibili e determinanti per intraprendere iniziative economiche.

Un mercato finanziario è detto **perfettamente competitivo** quando gli operatori non sono in grado di influenzare e di far variare i prezzi dei titoli finanziari con le loro operazioni. È una forma di mercato caratterizzata da un elevato numero di operatori per cui ogni singolo operatore economico occupa soltanto una parte infinitesimale della domanda o dell'offerta dei titoli.

Un mercato finanziario è detto **completo** quando non è possibile introdurre un nuovo titolo tale che il suo rendimento non possa essere replicato da una combinazione di titoli già esistenti sul mercato.

All'interno dei mercati finanziari esistono diverse forme di classificazione che dipendono dai fattori che vengono presi in considerazione.

Vediamo alcune delle principali classificazioni.

- **Mercati primari e Mercati secondari**

Il mercato primario è il mercato finanziario in cui vengono collocati i titoli di prima emissione. Pertanto, questo rappresenta il mercato in cui gli emittenti (imprese, società, Stato, regioni, ecc) possono collocare i propri strumenti finanziari con cui finanziarsi (provvista di fondi per gli emittenti). Questi titoli costituiscono forme di investimento per i risparmiatori. Il mercato secondario, invece, è il mercato finanziario in cui vengono negoziati gli strumenti finanziari già emessi nel mercato primario. Dunque ogni titolo nasce sul mercato primario e dopo l'emissione e il collocamento passa al secondario, in cui vengono raccolte tutte le operazioni a partire dalla seconda in poi.

- **Mercati regolamentati, Sistemi multilaterali di negoziazione (MTF), Internalizzatori sistematici e Mercati over the counter (OTC)**

Tale classificazione fa riferimento alla regolamentazione dei mercati. Le prime tre categorie rappresentano i tre tipi di mercati operanti in Italia il cui funzionamento è basato su precise regole di negoziazione.

I mercati regolamentati sono sistemi dove, nel rispetto di un regolamento, vengono immesse da più intermediari, per conto proprio o dei loro clienti, proposte di vendita e di acquisto di strumenti finanziari senza l'interposizione del gestore del mercato. Questo sistema di negoziazione è detto di tipo multilaterale. Sono gestiti da società di gestione del mercato, autorizzate dalla Consob (Commissione Nazionale per le Società e la Borsa),

che adottano un regolamento approvato dalla stessa Consob. Importante caratteristica è l'ampiezza delle informazioni disponibili per gli investitori relativamente all'emittente degli strumenti finanziari negoziati e agli stessi strumenti finanziari.

I sistemi multilaterali di negoziazione (MTF=acronimo di Multilateral Trading Facilities) per molti aspetti sono simili ai Mercati Regolamentati in quanto sono sistemi di negoziazione multilaterale, autorizzati dalla Consob e disciplinati da regole sottoposte alla stessa Consob. Possono però essere gestiti anche da soggetti diversi da società di gestione del mercato (ad esempio banche o società di intermediazione mobiliare dette SIM che sono società per azioni) purchè autorizzati, ma sono soggetti a regole in parte diverse ed hanno il set informativo per gli investitori meno ampio.

Gli internalizzatori sistematici sono intermediari (soprattutto banche) abilitati al servizio di negoziazione per conto proprio che, in modo organizzato, frequente e sistematico, negoziano strumenti finanziari per conto proprio, al di fuori dei mercati regolamentati o dei Sistemi Multilaterali, eseguendo gli ordini dei clienti. Si tratta di un sistema di negoziazione bilaterale (e non multilaterale) perché l'unico intermediario presente è proprio l'internalizzatore sistematico che si interpone in ogni operazione, acquistando, al prezzo da esso stesso stabilito, dai clienti che vogliono vendere e vendendo a quelli che vogliono acquistare. Non sono previste norme particolari per quanto riguarda le informazioni sugli emittenti i titoli negoziati.

I mercati OTC sono mercati non regolamentati, ossia mercati nei quali il funzionamento, i titoli e gli operatori ammessi non sono assoggettati ad una disciplina specifica e alla autorizzazione delle Autorità di Vigilanza in materia di Mercati Regolamentati. Le modalità di negoziazione non sono standardizzate ed è possibile stipulare contratti "atipici". Tuttavia, per quanto riguarda gli OTC aventi base in Italia, la Consob ne gestisce l'elenco e può richiedere agli organizzatori, agli emittenti e agli operatori dati, notizie e documenti sugli scambi organizzati di strumenti finanziari.

- **Mercati monetari e Mercati di capitali**

In questo caso si fa riferimento alla durata degli strumenti finanziari. In particolare, il mercato monetario contratta gli strumenti finanziari a breve termine (con scadenze entro i 12 mesi); mentre nel mercato di capitali vengono trattati gli strumenti finanziari a medio e a lungo termine. Nei mercati monetari, quindi, prevale la gestione della liquidità. Il mercato dei capitali, invece, fa riferimento ad impieghi di capitale che hanno un ciclo economico di durata più lunga. In particolare, il mercato dei capitali tratta soprattutto azioni ed obbligazioni.

- **Mercati al dettaglio e Mercati all'ingrosso**

La classificazione fa riferimento al taglio delle transazioni che avvengono sul mercato, nonché ai tipi di operatori. I mercati al dettaglio sono caratterizzati da assenza o basso importo del lotto minimo di negoziazione, mentre quelli all'ingrosso hanno un alto importo del lotto minimo di negoziazione. Inoltre nel mercato all'ingrosso operano solo gli investitori ammessi alle negoziazioni. Per esempio, nel mercato all'ingrosso dei titoli di stato, gli operatori ammessi alla negoziazione sono solo investitori istituzionali come la Banca d'Italia ed il Dipartimento del Tesoro.

- **Mercati cash e Mercati derivati**

Il mercato cash (o spot) è un mercato finanziario in cui vengono negoziati gli strumenti finanziari base (azioni e obbligazioni), mentre nel mercato dei derivati vengono negoziati gli strumenti derivati (futures, opzioni, ecc.).

### 1.3 Borsa Valori.

La **Borsa Valori** (italiana) rappresenta la più alta espressione di mercato finanziario secondario regolamentato. Si differenzia dagli altri mercati finanziari per i seguenti motivi:

- il suo assetto istituzionale e autoregolamentato;
- la standardizzazione dei contratti e delle modalità di negoziazione;
- l'accesso soltanto ad intermediari abilitati (SIM, banche sia comunitarie che extracomunitarie, imprese di investimento comunitarie ed extracomunitarie autorizzate);
- richiesta di particolari requisiti ai titoli perché siano negoziabili sia relativi alla società emittente sia ai titoli stessi.

Le principali funzioni della Borsa valori sono:

- definire i prezzi dei titoli;
- definire i requisiti e le procedure di ammissione e permanenza sul mercato per le società emittenti;
- definire i requisiti e le procedure di ammissione per gli intermediari;
- gestire l'informativa delle società quotate;

- vigilare sul corretto svolgimento delle negoziazioni.

Il ruolo svolto dalla Borsa è di importanza fondamentale per l'economia poiché

- permette alle società quotate la raccolta di mezzi finanziari;
- consente agli investitori l'individuazione degli investimenti più redditizi;
- favorisce l'allocazione delle risorse disponibili verso i settori economici più efficienti.

Dal 1998 la Borsa valori è gestita e organizzata dalla società privata Borsa Italiana s.p.a che ha sede a Milano in Piazza Affari nel Palazzo Mezzanotte e che si occupa anche della gestione di altri mercati finanziari (come ad esempio l'IDEM, ossia il Mercato dei derivati, il MOT, ossia il Mercato Telematico delle obbligazioni e dei titoli di Stato, ecc.).

La gestione del mercato avviene attraverso circa 130 intermediari nazionali ed internazionali che operano in Italia o dall'estero utilizzando un sistema di negoziazione completamente elettronico per l'esecuzione degli scambi in tempo reale.

A partire dal 1998 Borsa Italiana si è trasformata da singola società di gestione del mercato in un Gruppo diversificato nel campo dei servizi finanziari. Infatti la società svolge anche attività organizzative, commerciali e promozionali per assicurare la competitività e lo sviluppo dei mercati da essa gestiti attraverso quattro società:

- **Cassa di Compensazione e Garanzia**, che svolge attività finalizzate ad assicurare l'integrità dei mercati, interponendosi come controparte centrale e fungendo da garante dell'esecuzione delle transazioni;
- **Monte Titoli**, il depositario centrale e il gestore dei servizi di liquidazione e regolamento;
- **BIt Systems**, società tecnologica che si occupa della gestione, manutenzione e sviluppo dei sistemi informativi del Gruppo che fornisce anche servizi di sviluppo di sistemi informatici per operatori privati, pubblici, istituzioni finanziarie e società di gestione dei mercati;
- **Piazza Affari Gestione & Servizi**, garantisce la gestione di Palazzo Mezzanotte, sede della Borsa.

Il controllo sulla Borsa valori è esercitato dalla Consob e dalla Banca d'Italia.

Il 23 giugno 2007 la Borsa Italiana è stata acquisita dalla Borsa di Londra (LSE

= London Stock Exchange) e dal primo ottobre 2007 è stata quotata per la prima volta a Londra.

Il 9 ottobre 2020 è stata annunciata la vendita di Borsa Italiana da parte di LSE a Euronext, una confederazione di listini europei a guida francese che controlla, tra gli altri, i listini di Parigi, Amsterdam e Bruxelles. La cordata di Euronext ha vinto la concorrenza degli svizzeri di Six e dei tedeschi di Deutsche Boerse. Nella cordata vincitrice entreranno come azionisti anche Cassa Depositi e Prestiti, società per azioni controllata dal Ministero dell'Economia e delle Finanze che promuove la crescita del Paese e gestisce il risparmio postale, e Intesa S. Paolo. Per tale motivo la vendita è stata accolta con favore dal governo italiano che ha sempre premuto per riportare Borsa Italiana sotto il controllo italiano, almeno in parte. In questo modo dovrebbe essere tutelato il mercato dei titoli italiani di debito pubblico ed anche favorita la quotazione in borsa delle piccole e medie imprese italiane che oggi invece dipendono molto dal credito bancario. Per questo il presidente e l'amministratore delegato di Borsa dovrebbero essere italiani e assumere un ruolo importante nella governance del gruppo europeo. L'acquisto è stato approvato il 20 novembre 2020 dall'assemblea degli azionisti di Euronext e si prevede che l'operazione verrà completata entro la prima metà del 2021.

La Borsa valori fino al 14 aprile 1994 era basata sul sistema di contrattazione denominato **negoziazione a chiamata o alle grida**; ciascun titolo veniva contrattato in un preciso momento della seduta di Borsa e gli intermediari, situati intorno ad un recinto detto corbeille, gridavano i prezzi ai quali erano disposti a vendere o ad acquistare il titolo fino a quando non si perveniva alla formazione del prezzo che rimaneva fissato per tutta la giornata. Ora è stato introdotto il sistema di contrattazione denominato **asta continua** con il quale la negoziazione di ciascun titolo può avvenire in qualsiasi momento nella seduta di borsa grazie al sistema telematico di Borsa che non richiede la concentrazione fisica degli operatori, collegati tra loro per mezzo di una rete di elaboratori e terminali.

Il meccanismo d'asta fa incontrare domanda ed offerta: lo scambio si compie tra chi offre il prezzo più basso in offerta e chi offre il prezzo più alto in domanda. Dunque le offerte di prezzo vengono fatte sia dagli acquirenti che dai venditori dei titoli. Il sistema telematico, gestito dalla società BIt Systems, visualizza le proposte di negoziazione all'interno di un libro (book) che compare sui terminali degli operatori autorizzati.

Dal punto di vista matematico, nella contrattazione continua il tempo  $t$  rappresenta una variabile continua, mentre nel mercato non telematico il tempo  $t$  era considerato una variabile discreta.

Al termine di ogni seduta della Borsa, viene redatto e pubblicato il **listino di Borsa**, che contiene i dati fondamentali relativi a ciascun titolo trattato. E' diviso in due comparti:

- **listino delle azioni;**
- **listino dei titoli di Stato e delle obbligazioni.**

La stampa specializzata rende noti anche alcuni **indici** che consentono di misurare ed esprimere sinteticamente l'andamento della totalità delle azioni quotate o di gruppi di esse. Infatti si distingue tra:

- **indici globali**, riferiti a tutti i titoli azionari quotati;
- **indici settoriali**, relativi alle quotazioni dei titoli di società che appartengono ad un determinato ramo dell'economia.

Gli indici di Borsa sono espressi da un numero, determinato operando una media ponderata tra i corsi di un certo numero di titoli ritenuti significativi in cui si dà peso maggiore ai titoli con maggiore capitalizzazione e facendo riferimento ad una data iniziale. Attualmente come data di riferimento viene preso il 19 dicembre 2008 per tutti gli indici, esclusi il FTSE MIB e il FTSE Italia Star. Il valore via via assunto dall'indice fornisce una visione della variazione subita dal mercato rispetto al momento assunto come base.

Dal 1<sup>o</sup> giugno 2009 i vecchi indici di Borsa sono stati sostituiti dai nuovi indici FTSE Italia, calcolati dal provider FTSE (Financial Times Stock Exchange) che già elaborava gli indici dei mercati borsistici anglosassoni. I nuovi indici vengono realizzati utilizzando gli standard di FTSE riconosciuti a livello mondiale e utilizzati dagli investitori tradizionali. Le principali caratteristiche metodologiche sono un filtro per la liquidità, l'inclusione di una sola tipologia di azione per società e l'esclusione delle azioni estere che non possono essere inserite negli indici, ad eccezione del FTSE MIB e del FTSE Italia All-Share. Da notare che le azioni emesse da società aventi base all'estero, ma che vengono quotate solo nella Borsa italiana, sono considerate nazionali. Tra i principali indici ricordiamo:

- **FTSE MIB**, indice calcolato ogni 15 secondi relativo alle quotazioni dei 40 principali titoli della Borsa italiana periodicamente selezionati con riferimento al volume degli scambi, alla loro liquidità e capitalizzazione di Borsa nei 12 mesi precedenti; la data di riferimento è il 13 dicembre 1997;

- **FTSE Italia All-Share** e **FTSE Italia MIB storico** indici globali, relativi a quasi tutte le azioni quotate in Borsa (95%), il primo indice calcolato ogni 15 secondi, il secondo calcolato una volta al giorno al termine della seduta di borsa utilizzando i prezzi ufficiali;
- **FTSE Italia Star** indice relativo alle quotazioni delle azioni emesse da medie imprese con data di riferimento il 28 dicembre 2001.

Nel paragrafo successivo richiamiamo alcuni concetti di base relativi alle leggi finanziarie.

## 1.4 Richiami sulle leggi finanziarie.

In primo luogo osserviamo che in ambito finanziario si assume un'ipotesi di fondo:

*L'impiego di denaro per un certo periodo di tempo o equivalentemente lo spostamento nel tempo di denaro ha un **prezzo** o **valore**.*

Le operazioni finanziarie comportano l'impiego di **capitale**. Denotiamo con  $C$  il capitale nell'unità monetaria.

Supponiamo che un operatore economico  $\mathcal{E}$  disponga di un capitale  $C$  al tempo  $t$ .

**Definizione 1.4.** *Il tempo  $t$  al quale il capitale  $C$  è disponibile è detto **valuta** e la coppia ordinata  $(C, t)$  viene chiamata **situazione finanziaria**.*

Siano ora dati due operatori economici  $\mathcal{E}_1$  e  $\mathcal{E}_2$  ed assumiamo che  $\mathcal{E}_1$ , che ha a disposizione il capitale  $C_1$  al tempo  $t_1$ , trovi equo affidare il suo capitale a  $\mathcal{E}_2$  che al tempo  $t_2 > t_1$  si impegna a restituire il capitale  $C_2$ . Allora diremo che le coppie  $(C_1, t_1)$ ,  $(C_2, t_2)$  sono *indifferenti*. Forniamo dunque la seguente

**Definizione 1.5.** *Le coppie  $(C_1, t_1)$ ,  $(C_2, t_2)$ , dove  $C_1, C_2$  sono capitali disponibili al tempo  $t_1, t_2$  rispettivamente, si dicono *indifferenti* e si scrive:*

$$(C_1, t_1) \approx (C_2, t_2)$$

*se si è disposti a scambiarle ossia se possono essere scambiate alla pari.*

**Definizione 1.6.** *Prese due coppie indifferenti  $(C_0, t_0)$ ,  $(C_t, t)$ , si definisce legge finanziaria la funzione  $\mathcal{L}(C_0, t, t_0)$  tale che*

$$C_t = \mathcal{L}(C_0, t, t_0).$$

Se ci limitiamo a considerare leggi omogenee di grado 1 nel capitale, abbiamo:

$$C_t = \mathcal{L}(C_0, t, t_0) = C_0 \mathcal{L}(1, t, t_0).$$

Se  $t > t_0$   $\mathcal{L}(1, t, t_0) =: m(t, t_0)$  è detta **legge di capitalizzazione**

Se  $t = t_0$   $\mathcal{L}(1, t, t_0) = 1$

Se  $t < t_0$   $\mathcal{L}(1, t, t_0) =: v(t, t_0)$  è detta **legge di sconto o di attualizzazione**.

Nel caso in cui  $t > t_0$

$$C_t = C_0 m(t, t_0)$$

è detto **montante**. Dunque il montante è il valore del capitale ad un tempo posteriore rispetto a quello in cui è a disposizione.

In tal caso la differenza

$$C_t - C_0$$

è detta **interesse**.

Se un capitale viene dato in prestito per un certo periodo, alla scadenza la quantità restituita è il montante, cioè il capitale iniziale più l'interesse.

Nel caso in cui  $t < t_0$

$$C_t = C_0 v(t, t_0)$$

è detto **valore scontato o valore attuale**. Dunque il valore scontato o valore attuale è il valore di un capitale ad un tempo anteriore rispetto a quello in cui è a disposizione.

In tal caso la differenza

$$C_0 - C_t$$

è detta **sconto**.

Assegnata una legge di capitalizzazione, è facile determinare la corrispondente legge di sconto.

Infatti, se  $t' < t$ , avremo:

$$C_{t'} = C_t v(t', t),$$

ma d'altra parte:

$$C_t = C_{t'} m(t, t') = C_{t'} v(t', t) m(t, t')$$

da cui

$$v(t', t) = \frac{1}{m(t, t')}.$$

Perciò se  $t < t_0$ , in corrispondenza della legge di capitalizzazione  $m$ , si ha la seguente legge di sconto:

$$v(t, t_0) = \frac{1}{m(t_0, t)}. \quad (1.4.1)$$

Nei contratti finanziari, come ad esempio l'apertura di un conto corrente, devono essere fissate alcune condizioni:

- 1)  $r =$  **tasso unitario di interesse**, cioè l'interesse prodotto nell'unità di tempo da un'unità di capitale, espresso in percentuale;
- 2) **periodo di impiego del capitale**, cioè la durata del contratto;
- 3) **periodo di capitalizzazione (degli interessi)**, cioè il tempo dopo il quale l'interesse diventa disponibile, ossia diventa capitale;
- 4) **regime di capitalizzazione**, cioè le norme che regolano l'operazione.

In genere il periodo di capitalizzazione è minore o uguale al periodo d'impiego del capitale.

Vediamo alcuni regimi di capitalizzazione.

### Regime di capitalizzazione semplice

Si assume che il periodo di capitalizzazione coincida con il periodo di impiego del capitale.

L'interesse maturato dal tempo  $t_0$  al tempo  $t$  ( $t > t_0$ ) è dato da

$$C_0 r (t - t_0), \quad (1.4.2)$$

ossia l'interesse è proporzionale al capitale  $C_0$  ed all'intervallo di tempo  $t - t_0$  con costante di proporzionalità il tasso di interesse  $r$ .

La corrispondente legge di capitalizzazione risulta

$$m(t, t_0) = 1 + r (t - t_0)$$

e il montante è

$$C_t = C_0 [1 + r (t - t_0)]. \quad (1.4.3)$$

Si può inoltre determinare la relativa legge di sconto; tenendo presente la (3.2), per  $t < t_0$  si ha

$$v(t, t_0) = \frac{1}{m(t_0, t)} = \frac{1}{1 + r(t_0 - t)},$$

da cui il capitale scontato risulta

$$C_t = \frac{C_0}{1 + r(t_0 - t)}.$$

### Regime di capitalizzazione composta

Si assume che il periodo di capitalizzazione sia minore del periodo di impiego del capitale e più precisamente:

$$\frac{P_i}{P_c} = n$$

con

$P_i$  = periodo di impiego del capitale,

$P_c$  = periodo di capitalizzazione,

$n$  = numero naturale.

Posto  $P_c = 1$ , risulta  $P_i = n$ .

Indichiamo con  $C_n$  il capitale dopo il periodo di impiego pari a  $n$ .

Supponiamo dapprima  $n = 1$ , per cui rientriamo nel regime di capitalizzazione semplice e per quanto visto prima otteniamo

$$C_1 = C_0(1 + r),$$

essendo  $t - t_0 = 1$ .

Se poi supponiamo che il periodo di impiego sia 2 ed esprimiamo  $C_2$  in termini dapprima di  $C_1$  e poi di  $C_0$ , otteniamo:

$$C_2 = C_1(1 + r) = C_0(1 + r)^2.$$

Al periodo  $n$  ci sarà un capitale

$$C_n = C_0(1 + r)^n.$$

Se l'intervallo temporale è  $t - t_0$ , si ha

$$C_t = C_0(1 + r)^{t-t_0}, \quad (1.4.4)$$

per cui la legge di capitalizzazione risulta

$$m(t, t_0) = (1 + r)^{t-t_0}.$$

L'interesse al tempo  $t > t_0$  è dato da

$$C_t - C_0 = C_0 [(1 + r)^{t-t_0} - 1].$$

Per la relativa legge di sconto si trova per  $t < t_0$

$$v(t, t_0) = (1 + r)^{-(t_0-t)}$$

e il valore scontato di  $C_0$  è dato da

$$C_t = C_0(1 + r)^{-(t_0-t)}.$$

La legge di capitalizzazione composta è anche detta legge di capitalizzazione esponenziale.

Vediamo alcuni esempi di applicazione dei due regimi di capitalizzazione considerati sopra.

**Esempio 1.1.**

1) Un capitale di 1.700 euro è investito in regime di capitalizzazione semplice al tasso annuo di interesse del 4% per 1 anno e 3 mesi. Calcolare l'interesse.

Utilizziamo la (1.4.2) ponendo per semplicità  $t_0 = 0$  e tenendo presente che un mese è  $\frac{1}{12}$  di anno. Dunque l'interesse è dato da

$$C_0 r t = 1.700 \cdot 0,04 \cdot \frac{5}{4} = 85 \text{ euro.}$$

2) Al tasso annuo di interesse del 6% quanto tempo è necessario per quadruplicare un capitale investito in regime di capitalizzazione semplice?

Applicando la (1.4.3), dove poniamo  $t_0 = 0$  e denotando con  $t$  gli anni in cui il capitale si quadruplica, abbiamo:

$$4 = 1 + \frac{6}{100} t$$

da cui:

$$1 = \frac{t}{50} \quad \implies \quad t = 50.$$

Dunque per quadruplicare il capitale occorrono cinquant'anni.

**Esempio 1.2.**

Un capitale di 149 euro, impiegato in regime di capitalizzazione composta, dopo 5 anni ha dato un montante pari a 190 euro. Determinare il tasso annuo di interesse.

Applichiamo la (1.4.4), ponendo  $t_0 = 0$  e  $t = 5$ :

$$190 = 149(1 + r)^5,$$

da cui

$$r = \left(\frac{190}{149}\right)^{\frac{1}{5}} - 1 \implies r \approx 1,05 - 1 = 0,05.$$

Dunque il tasso annuo di interesse è circa del 5%.

### Esempio 1.3. La regola del sette-dieci

Verificare che nel regime di capitalizzazione composta un capitale impiegato al 7% annuo raddoppia in circa 10 anni e che viceversa un capitale impiegato al 10% annuo raddoppia in circa 7 anni.

Consideriamo il primo caso.

Posto  $t_0 = 0$  e indicati con  $t$  gli anni in cui avviene il raddoppio, dalla (1.4.4) si ha:

$$C_0(1 + 0,07)^t = 2C_0 \implies (1,07)^t = 2.$$

Dunque

$$t = \frac{\log 2}{\log 1,07} \approx 10,24 \approx 10.$$

Consideriamo ora il secondo caso.

Analogamente a prima otteniamo:

$$C_0(1 + 0,1)^t = 2C_0 \implies (1,1)^t = 2.$$

Dunque

$$t = \frac{\log 2}{\log 1,1} \approx 7,27 \approx 7.$$

Per motivi concreti, è utile confrontare diversi periodi di capitalizzazione nel medesimo regime. Il caso tipico è il confronto, in regime di capitalizzazione composta, fra capitalizzazioni annuali e capitalizzazioni in frazioni di anno. Se supponiamo che il periodo di capitalizzazione sia pari alla frazione  $\frac{1}{k}$  di anno, si introducono:

- il **tasso d'interesse convertibile**, cioè il tasso d'interesse relativo alla frazione  $\frac{1}{k}$  di anno, che indichiamo con  $r_k$ ;
- il **tasso d'interesse annuo nominale convertibile**, denotato con  $\tilde{r}_k$ , che è definito nel modo seguente:

$$\tilde{r}_k = k r_k;$$

- il **tasso d'interesse annuo effettivo**, denotato con  $r_e$ , cioè l'interesse relativo ad un'unità di capitale in un anno e disponibile a fine anno, equivalente al tasso  $\tilde{r}_k$ .

Per le definizioni di  $r_k$  e  $\tilde{r}_k$ , si ha che il montante di un capitale unitario alla fine di un anno è dato da:

$$(1 + r_k)^k = \left(1 + \frac{\tilde{r}_k}{k}\right)^k.$$

Inoltre i due tassi annui  $\tilde{r}_k$  e  $r_e$  risultano **equivalenti** se, riferendoci allo stesso capitale iniziale, producono alla fine di un anno uguali montanti, ossia se

$$\left(1 + \frac{\tilde{r}_k}{k}\right)^k = 1 + r_e,$$

da cui

$$r_e = \left(1 + \frac{\tilde{r}_k}{k}\right)^k - 1. \quad (1.4.5)$$

Si può provare che se  $\tilde{r}_k > 0$ , allora  $r_e > \tilde{r}_k$  per  $k = 2, 3, \dots$

#### **Esempio 1.4.**

1) Determinare il montante di un capitale pari a 14.000 euro impiegato per 3 anni al tasso annuo nominale convertibile  $\tilde{r}_3 = 6\%$ .

Tenendo presente che  $r_3 = \frac{\tilde{r}_3}{3} = 0,02$ , otteniamo che il montante è dato da

$$14.000 (1 + 0,02)^{3 \cdot 3} = 16.731,296 \text{ euro.}$$

2) Supponendo che in una data operazione finanziaria gli interessi vengano pagati trimestralmente con un tasso annuo nominale convertibile  $\tilde{r}_4 = 8\%$ , determinare il tasso annuo effettivo.

Per la (1.4.5), abbiamo:

$$r_e = \left(1 + \frac{0,08}{4}\right)^4 - 1 \approx 1,0824 - 1 = 0,0824.$$

Dunque il tasso annuo effettivo è dato da  $r_e \approx 8,24\%$ .

#### **Regime di capitalizzazione istantanea o regime di capitalizzazione in tempo continuo**

Consideriamo un intervallo di tempo  $[t_0, t]$  che supponiamo di dividere in  $k$  intervalli di uguale ampiezza  $\Delta t$  per cui  $\Delta t = \frac{t - t_0}{k}$ .

Sia  $\Delta t$  il periodo di capitalizzazione e  $r$  il tasso unitario di interesse.  
In regime di capitalizzazione composta, al tempo  $t$  il montante sarà dato da

$$C_t = C_0(1 + r \Delta t)^k = C_0 \left(1 + r \frac{t - t_0}{k}\right)^k.$$

Nel regime di capitalizzazione istantanea si fa tendere  $\Delta t$  a zero o equivalentemente  $k$  a  $+\infty$ . Poiché

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 + r \frac{t - t_0}{k}\right)^k = e^{r(t-t_0)},$$

con tale regime la legge di capitalizzazione è

$$m(t, t_0) = e^{r(t-t_0)},$$

il montante risulta

$$C_t = C_0 e^{r(t-t_0)}$$

e l'interesse è dato da

$$C_t - C_0 = C_0 [e^{r(t-t_0)} - 1].$$

In corrispondenza, la legge di sconto per  $t < t_0$  è

$$v(t, t_0) = e^{-r(t_0-t)}$$

per cui il valore scontato di  $C_0$  al tempo  $t < t_0$  è dato da

$$C_t = C_0 e^{-r(t_0-t)}.$$

Nel regime di capitalizzazione istantanea gli interessi maturano ad ogni istante e si accumulano al capitale.

Tale regime, che è di scarsa importanza pratica, ha rilevante importanza teorica, come vedremo nel seguito.

## 1.5 Rendite

**Definizione 1.7.** *Per rendita si intende un flusso di capitali disponibili in tempi diversi successivi.*

Si distingue in genere tra

- **rendita discreta** se si ha una successione di capitali:  $C_1, C_2, C_3, \dots$  disponibili in tempi diversi in successione:  $t_1, t_2, t_3, \dots$  con  $0 \leq t_1 < t_2 < t_3, \dots$ . Una rendita discreta è detta **temporanea** se i capitali o equivalentemente le loro valute sono in numero finito, ossia  $\{C_s\}_{s=1,2,\dots,n}$  o  $\{t_s\}_{s=1,2,\dots,n}$ , mentre è detta **perpetua** se i capitali o equivalentemente le loro valute sono un'infinità numerabile. Una rendita discreta è dunque una successione di un numero finito o un'infinità numerabile di coppie  $(C_s, t_s)$ . Denoteremo con  $\mathcal{R}_n$  una rendita discreta temporanea, essendo  $n$  il numero delle coppie  $(C_s, t_s)$ , ossia  $\mathcal{R}_n = \{(C_s, t_s)\}_{s=1,2,\dots,n}$ , se la rendita discreta è perpetua la denoteremo semplicemente con  $\mathcal{R}$ ;
- **rendita continua** se si ha un flusso di capitali disponibili con continuità istante per istante. In tal caso è definita la funzione  $C(t)$  tale che  $C(t) dt$  è la quantità di capitale disponibile nell'intervallo di tempo infinitesimo  $[t, t + dt]$ . Una rendita continua è **temporanea** se la funzione  $C(t)$  è definita nell'intervallo di tempo  $[0, T]$ , mentre è **perpetua** se l'intervallo di tempo in cui è definita  $C(t)$  è  $[0, +\infty)$ . In genere si suppone che la funzione  $C(t)$  sia continua nell'intervallo su cui è definita.

I capitali di una rendita sono anche detti **rate**.

Fissiamo un regime di capitalizzazione e siano  $m(t, t_0)$  ( $t > t_0$ ) e  $v(t, t_0)$  ( $t < t_0$ ) le relative leggi di capitalizzazione e di sconto. E' opportuno a questo punto estendere la definizione di  $m(t, t_0)$  ( $t > t_0$ ) e  $v(t, t_0)$  ( $t < t_0$ ) al caso  $t = t_0$  ponendo

$$m(t_0, t_0) = v(t_0, t_0) = 1.$$

**Definizione 1.8.** *Data la rendita discreta temporanea  $\mathcal{R}_n = \{(C_s, t_s)\}_{s=1,2,\dots,n}$ , si definisce valore attuale della rendita*

$$V_0 = \sum_{s=1}^n C_s v(0, t_s),$$

mentre

$$V_{t_n} = \sum_{s=1}^n C_s m(t_n, t_s)$$

è detto *montante della rendita*.

Vogliamo ora dare la definizione di valore di una rendita discreta temporanea ad un tempo  $\tau$  tale che  $t_1 \leq \tau < t_n$ . Osserviamo che necessariamente  $\tau$  deve cadere fra due valute della rendita con la possibilità anche che coincida con una e dunque esiste un numero naturale  $k \in \{2, \dots, n\}$  tale che

$$t_{k-1} \leq \tau < t_k.$$

Allora ha senso inserire nella definizione che intendiamo dare i montanti delle rate relative alle valute anteriori a  $\tau$  e i valori attuali di quelle relative alle valute posteriori.

diamo perciò la seguente

**Definizione 1.9.** *Data la rendita discreta temporanea  $\mathcal{R}_n = \{(C_s, t_s)\}_{s=1,2,\dots,n}$ , preso il tempo  $\tau$  tale che  $t_1 \leq \tau < t_n$ , definiamo valore della rendita al tempo  $\tau$*

$$V_\tau = \sum_{s=1}^{k-1} C_s m(\tau, t_s) + \sum_{s=k}^n C_s v(\tau, t_s).$$

Ovviamente, se  $t_1 = 0$  e  $\tau = t_1$ , la definizione precedente si riduce a quella di valore attuale della rendita.

**Definizione 1.10.** *Se la rendita  $\mathcal{R}_n$  ha  $t_1 > 0$ , definiamo valore della rendita al tempo  $\tau$  tale che  $0 < \tau < t_1$  nel modo seguente*

$$V_\tau = \sum_{s=1}^n C_s v(\tau, t_s).$$

La definizione di valore attuale di una rendita discreta temporanea si estende immediatamente ad una rendita discreta perpetua.

Precisamente il valore attuale di una rendita discreta perpetua è dato:

$$V_0 = \sum_{s=1}^{+\infty} C_s v(0, t_s), \quad (1.5.1)$$

dove assumiamo che la serie a secondo membro (a termini tutti positivi) sia convergente.

Analogamente si estende alle rendite discrete perpetue la definizione di valore ad un tempo  $\tau \geq t_1$  richiedendo sempre la convergenza della serie che interviene nella definizione.

Consideriamo ora le rendite continue temporanee.

**Definizione 1.11.** *Data una rendita continua temporanea, definiamo valore attuale della rendita*

$$V_0 = \int_0^T C(t) v(0, t) dt,$$

e montante della rendita:

$$V_T = \int_0^T C(t) m(T, t) dt.$$

Inoltre, preso  $\tau \in (0, T)$ , definiamo valore della rendita al tempo  $\tau$

$$V_\tau = \int_0^\tau C(t) m(\tau, t) dt + \int_\tau^T C(t) v(\tau, t) dt.$$

La definizione di valore attuale di una rendita continua temporanea si estende immediatamente ad una rendita continua perpetua. Precisamente

$$V_0 = \int_0^{+\infty} C(t) v(0, t) dt,$$

dove assumiamo che l'integrale a secondo membro sia convergente.

Introduciamo ora alcune definizioni per le rendite discrete.

**Definizione 1.12.** Una rendita discreta  $\mathcal{R} = \{(C_s, t_s)\}_{s=1,2,\dots}$  si dice costante se  $C_s = C$  per ogni  $s = 1, 2, \dots$ .

La rendita discreta  $\mathcal{R} = \{(C_s, t_s)\}_{s=1,2,\dots}$  si definisce  $\bar{t}$ -periodica se per ogni  $s = 2, 3, \dots$  si ha  $t_s - t_{s-1} = \bar{t}$ .

Se  $\bar{t} = 1$ , ossia  $\bar{t}$  coincide con il periodo di capitalizzazione, la rendita periodica è detta di periodo unitario.

Una rendita discreta  $\bar{t}$ -periodica si dice immediata posticipata se  $t_1 = \bar{t}$ .

E' facile vedere che se la rendita  $\mathcal{R} = \{(C_s, t_s)\}_{s=1,2,\dots}$  è  $\bar{t}$ -periodica, allora  $t_s = (s-1)\bar{t} + t_1 \quad \forall s = 1, 2, \dots$  e se in più è immediata posticipata, allora  $t_s = s\bar{t} \quad \forall s = 1, 2, \dots$

Supponiamo assegnata una rendita discreta temporanea di  $n$  termini, costante,  $\bar{t}$ -periodica, immediata posticipata e determiniamone il montante in regime di capitalizzazione composta con tasso unitario di interesse  $r$  (tasso di interesse periodale cioè relativo al periodo di capitalizzazione). Tenendo presente la definizione, abbiamo

$$V_{t_n} = \sum_{s=1}^n C (1+r)^{n\bar{t}-s\bar{t}} = C \sum_{s=1}^n \left[ (1+r)^{\bar{t}} \right]^{n-s}.$$

Ovviamente  $\bar{t}$  e  $t_s$  si intendono normalizzati al periodo di capitalizzazione.

D'altra parte, se poniamo:

$$q = (1+r)^{\bar{t}},$$

possiamo scrivere

$$V_{t_n} = C \sum_{s=1}^n q^{n-s}$$

e per le proprietà delle progressioni geometriche con ragione  $q \neq 1$  abbiamo

$$\sum_{s=1}^n q^{n-s} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Dunque otteniamo:

$$V_{t_n} = C \frac{1 - (1 + r)^{n\bar{t}}}{1 - (1 + r)^{\bar{t}}}. \quad (1.5.2)$$

Nel caso particolare in cui  $\bar{t}$  sia unitario, cioè coincida con il periodo di capitalizzazione e la rata costante  $C$  della rendita sia uguale a 1, la (1.5.2) diviene:

$$s_{\overline{n}|r} = \frac{(1 + r)^n - 1}{r}. \quad (1.5.3)$$

Il simbolo  $s_{\overline{n}|r}$  si legge "*s figurato enne, al tasso r*" o semplicemente "*esse enne r*". Esso rappresenta il montante di una rendita discreta temporanea periodica, con periodo unitario, immediata posticipata, con rate tutte uguali a 1 in regime di capitalizzazione composta.

Consideriamo ancora una rendita discreta temporanea di  $n$  termini, costante,  $\bar{t}$ -periodica, immediata posticipata e determiniamone il valore attuale sempre in regime di capitalizzazione composta. Tenendo presente la definizione, abbiamo:

$$V_0 = \sum_{s=1}^n C (1 + r)^{-s\bar{t}} = C \sum_{s=1}^n \left[ (1 + r)^{-\bar{t}} \right]^s.$$

Se ora poniamo

$$q = (1 + r)^{-\bar{t}}, \quad s = k + 1$$

e ricordiamo quanto vale la somma dei primi  $n$  termini di una progressione geometrica di ragione  $q \neq 1$ , abbiamo

$$\sum_{s=1}^n \left[ (1 + r)^{-\bar{t}} \right]^s = q \sum_{k=0}^{n-1} q^k = q \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Deduciamo perciò

$$V_0 = C (1 + r)^{-\bar{t}} \frac{1 - (1 + r)^{-n\bar{t}}}{1 - (1 + r)^{-\bar{t}}}.$$

Tale relazione si può anche scrivere nella forma:

$$V_0 = C \frac{1 - (1 + r)^{-n\bar{t}}}{(1 + r)^{\bar{t}} - 1}. \quad (1.5.4)$$

Nel caso particolare in cui  $\bar{t}$  sia unitario, cioè coincida con il periodo di capitalizzazione e la rata costante  $C$  della rendita sia uguale a 1, la (1.5.4) diviene:

$$a_{\overline{n}|r} = \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} = \frac{(1 + r)^n - 1}{r(1 + r)^n}. \quad (1.5.5)$$

Il simbolo  $a_{\overline{n}|r}$  (che si legge "a figurato enne, al tasso  $r$ " o semplicemente "a enne  $r$ ") rappresenta il valore attuale di una rendita discreta temporanea periodica, con periodo unitario, immediata posticipata con rate tutte uguali a 1 in regime di capitalizzazione composta.

Confrontando (1.5.5) con (1.5.3), si deduce la relazione:

$$s_{\overline{n}|r} = a_{\overline{n}|r} (1 + r)^n.$$

I valori assunti dai due simboli figurati vengono forniti da opportune tavole e da opportuni software presenti anche in rete.

### Osservazione 1.1

Osserviamo che nelle rendite periodiche immediate posticipate studiate finora le rate sono via via disponibili al termine di ogni periodo  $\bar{t}$  e proprio per tale motivo sono dette posticipate. Si possono prendere in considerazione anche rendite periodiche nelle quali le rate sono disponibili all'inizio di ogni periodo, cioè rendite note come **rendite periodiche immediate anticipate**. Per tali rendite si ha sempre  $t_1 = \bar{t}$  dove  $\bar{t}$  è il periodo, ma la prima rata  $C_1$  è pagata, ossia è disponibile, al tempo  $t = 0$ .

Ovviamente per rendite di tale tipo che sono costanti con  $n$  rate e che terminano al tempo  $t_n = n\bar{t}$  le espressioni del montante  $V_{tn}$  e del valore attuale  $V_0$  sono differenti da quelle ottenute per rendite posticipate, date da (1.5.2) e (1.5.4) rispettivamente. In maniera analoga se il periodo è unitario, i simboli figurati, che per le rendite anticipate sono denotati con  $\ddot{s}_{\overline{n}|r}$ ,  $\ddot{a}_{\overline{n}|r}$ , sono differenti dai corrispondenti termini figurati (1.5.3) e (1.5.5) ricavati in precedenza per le rendite posticipate.

Le espressioni di  $V_{tn}$ ,  $V_0$ ,  $\ddot{s}_{\overline{n}|r}$ ,  $\ddot{a}_{\overline{n}|r}$  per rendite anticipate sono comunque semplici da ottenere. Infatti basta osservare che, presa una rendita periodica immediata posticipata costante avente il numero dei termini, la rata e il periodo uguali a quelli della rendita anticipata considerata, il capitale che per la rendita posticipata è disponibile al tempo  $t_s$  per quella anticipata è disponibile al tempo  $t_s - \bar{t}$  ossia è disponibile anticipatamente con l'anticipo di un periodo. E' facile vedere che da questa osservazione ne consegue che il montante della rendita anticipata così come il suo valore attuale si ottengono moltiplicando per il fattore di anticipazione  $(1 + r)^{\bar{t}}$  il montante e il valore attuale della corrispondente rendita posticipata. Se la rendita ha periodo unitario il fattore di anticipazione si riduce

a  $1 + r$  e in tal caso i termini figurati sono dati da

$$\ddot{a}_{\overline{n}|r} = (1 + r) a_{\overline{n}|r} = \frac{(1 + r)^n - 1}{r(1 + r)^{n-1}}, \quad \ddot{s}_{\overline{n}|r} = (1 + r) s_{\overline{n}|r} = (1 + r) \frac{(1 + r)^n - 1}{r}. \quad (1.5.6)$$

Si potrebbero prendere in considerazione anche **rendite temporanee periodiche differite di  $m$  termini**, cioè rendite di  $n$  termini per le quali la prima rata è disponibile al tempo  $t_{m+1}$ , ma su ciò non insisteremo.

Vediamo ora alcuni esempi di applicazione dei risultati ottenuti relativamente alle rendite periodiche.

**Esempio 1.5.**

Calcolare il montante di una rendita annua immediata posticipata di 7 rate aventi ciascuna importo di 500 euro, al tasso annuo del 4%.

Poiché il periodo è unitario, utilizziamo il simbolo figurato. Perciò abbiamo

$$\begin{aligned} V_7 &= 500 s_{\overline{7}|0,04} = 500 \frac{(1,04)^7 - 1}{0,04} \\ &= 500 \frac{0,31593}{0,04} = 500 \cdot 7,898 = 3.949,12 \text{ euro.} \end{aligned}$$

**Esempio 1.6.**

Per 5 anni versiamo all'inizio di ogni semestre 2.000 euro ad una banca che applica un tasso di interesse semestrale del 2%. Quanto possiamo riscuotere alla fine del quinto anno?

Dobbiamo calcolare il montante di una rendita discreta temporanea di 10 termini, costante, periodica con periodo pari ad un semestre, immediata anticipata. Il tasso è semestrale e dunque il periodo è unitario. Per rispondere alla domanda dobbiamo perciò usare anche in questo caso il simbolo figurato. Avremo:

$$\begin{aligned} V_{10} &= 2.000 \ddot{s}_{\overline{10}|0,02} = 2.000 (1,02) \frac{(1,02)^{10} - 1}{0,02} \\ &= 2.040 \frac{0,219}{0,02} = 2.040 \cdot 10,95 = 22.338 \text{ euro.} \end{aligned}$$

**Esempio 1.7.**

Vogliamo cedere ad una banca una rendita immediata della durata di 6 anni

costituita dalla riscossione di 1.400 euro alla fine di ogni anno. Quale somma è disposta a pagare la banca se il tasso di interesse annuo è del 3%?

La somma che la banca è disposta a pagare è il valore attuale della rendita. Dunque riceveremo:

$$\begin{aligned} V_0 &= 1.400 a_{\overline{6}|0,03} = 1.400 \frac{(1,03)^6 - 1}{0,03(1,03)^6} \\ &= 1.400 \frac{0,19405}{0,03582} = 7.584,31 \text{ euro.} \end{aligned}$$

### Esempio 1.8.

Sia data una rendita discreta perpetua periodica con periodo pari ad un anno, immediata posticipata e costante ( $C_s = C$ ,  $s = 1, 2, \dots$ ).

Determinarne il valore attuale in un regime di capitalizzazione composta avente un anno come periodo di capitalizzazione e con tasso annuo di interesse  $r$  (supposto costante). Quale sarebbe il suo valore attuale se la rendita fosse anticipata?

Se la rendita è posticipata, tenendo presente che

$$C_s = C \quad \forall s = 1, 2, \dots,$$

dalla (1.5.1), deduciamo:

$$V_0 = \sum_{s=1}^{+\infty} C(1+r)^{-s} = C \sum_{s=1}^{+\infty} (1+r)^{-s}. \quad (1.5.7)$$

Posto

$$q = (1+r)^{-1} < 1, \quad s = k+1$$

possiamo scrivere

$$\sum_{s=1}^{+\infty} q^s = q \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{q}{1-q} = \frac{(1+r)^{-1}}{1-(1+r)^{-1}} = \frac{1}{r}.$$

Sostituendo tale risultato in (1.5.7), otteniamo:

$$V_0 = \frac{C}{r}.$$

Se la rendita è anticipata, il suo valore attuale si deduce dal risultato precedente moltiplicandolo per il fattore  $1+r$  e dunque in questo caso abbiamo:

$$V_0 = (1+r) \frac{C}{r}.$$

Supponiamo ad esempio  $C = 1000$  euro e  $r = 2\%$ . Allora per la rendita posticipata si ha

$$V_0 = \frac{1.000}{0,02} = 50.000 \text{ euro.}$$

Per quella anticipata il risultato è:

$$V_0 = 1,02 \cdot \frac{1.000}{0,02} = 51.000 \text{ euro.}$$

## 1.6 Applicazioni delle rendite

Le rendite hanno numerose applicazioni in ambito finanziario. Vediamone due di notevole interesse.

### Rimborso graduale di un prestito, Tan e Taeg

Assumiamo che un dato soggetto, avendo ricevuto in prestito al tempo  $t = 0$  un capitale  $P$ , si impegni a restituirlo versando un numero intero  $n$  di rate  $R_1, R_2, \dots, R_n$ , scadenti ai tempi  $0 < t_1 < \dots < t_n$ . Osservato che  $\mathcal{R}_n = \{(R_s, t_s)\}_{s=1,2,\dots,n}$  è una rendita discreta temporanea, indichiamone con  $V_0$  e  $V_{t_n}$  il valore attuale e il montante in un dato regime di capitalizzazione.

**Definizione 1.13.** Diremo che si va a costituire un ammortamento del debito  $P$  nel regime di capitalizzazione prefissato se le rate soddisfano ad una delle due seguenti condizioni:

i)  $P = V_0$

ii)  $P m(t_n, 0) = V_{t_n}$ .

Se si verifica la prima condizione, cioè il valore attuale della rendita  $\mathcal{R}_n$  eguaglia il capitale prestato, si parla di *metodo di ammortamento prospettivo*, se si verifica la seconda, cioè sono uguali i due montanti, si parla di *metodo di ammortamento retrospettivo*.

Molto spesso il regime di capitalizzazione che si utilizza è quello di capitalizzazione composta per cui se  $r$  è il tasso unitario di interesse periodale le due precedenti condizioni assumono la forma:

i) 
$$P = \sum_{s=1}^n R_s (1+r)^{-t_s}$$

ii) 
$$P (1+r)^{t_n} = \sum_{s=1}^n R_s (1+r)^{t_n-t_s},$$

dove ovviamente  $t_s$  è l'espressione della cadenza delle rate normalizzata al periodo di capitalizzazione.

Come è evidente, i due modi di ammortamento del debito sono equivalenti poiché la seconda equazione si ottiene dalla prima moltiplicandone entrambi i membri per il fattore  $(1+r)^{t_n}$ . Pertanto nel seguito ci limiteremo ad utilizzare il metodo prospettivo.

Nel caso in cui le rate siano costanti ( $R_s = R$  per  $s = 1, 2, \dots, n$ ), e periodiche di periodo  $\bar{t}$  con  $t_1 = \bar{t}$ , tenendo presente la (1.5.4), si ha ammortamento del debito  $P$  nel regime di capitalizzazione composta prefissato se

$$P = R \frac{1 - (1+r)^{-n\bar{t}}}{(1+r)^{\bar{t}} - 1}. \quad (1.6.1)$$

Se inoltre  $\bar{t} = 1$ , abbiamo

$$P = R a_{\overline{n}|r} = R \frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n}. \quad (1.6.2)$$

L'ammortamento di un debito mediante rate costanti e periodiche in un regime di capitalizzazione composta si presenta spesso nella pratica quando un soggetto ricorre ad un finanziamento per l'acquisto di un bene. Nelle campagne pubblicitarie che reclamizzano l'acquisto di un bene attraverso un pagamento rateale compaiono le due sigle "Tan" e "Taeg". Vediamo di spiegarne il significato.

Consideriamo dapprima una situazione puramente ideale in cui l'operazione di finanziamento non comporti dei costi. In regime di capitalizzazione composta il periodo di capitalizzazione è molto spesso una frazione di anno  $\frac{1}{k}$ . Ad esempio le rate possono essere semestrali ( $k = 2$ ), quadrimestrali ( $k = 3$ ), trimestrali ( $k = 4$ ) o mensili ( $k = 12$ ). L'ammontare della rata  $R$  costante viene stabilita in base ad un prefissato tasso annuo nominale  $k$ -convertibile  $\tilde{r}_k$ . Questo rappresenta appunto il Tan, acronimo di tasso annuale nominale. Come sappiamo, il corrispondente tasso convertibile  $r_k$  è dato da  $r_k = \frac{\tilde{r}_k}{k}$ . Se le rate sono  $n$ , per avere ammortamento del debito  $P$  la rata  $R$  deve essere tale che

$$P = R a_{\overline{n}|r_k} = R \frac{(1+r_k)^n - 1}{r_k(1+r_k)^n}, \quad r_k = \frac{\tilde{r}_k}{k}. \quad (1.6.3)$$

E' da notare che  $\tilde{r}_k$  non è il tasso annuo effettivo  $r_e$ , dato da

$$r_e = \left(1 + \frac{\tilde{r}_k}{k}\right)^k - 1$$

e che  $r_e > \tilde{r}_k$  (se  $\tilde{r}_k > 0$ ), come abbiamo visto in precedenza.

Il tasso annuo effettivo  $r_e$  è denotato anche con la sigla Tae.

Facciamo due esempi.

**Esempio 1.9.** Ho acquistato un computer del costo di 1.000 euro che ho rimborsato in regime di capitalizzazione composta in un anno con rate semestrali costanti al tasso annuo nominale del 6%. L'operazione non ha comportato altri costi. Qual è stato il tasso di interesse annuo effettivo e quanto ho pagato per ogni rata?

Tenendo presente che il tasso d'interesse convertibile è  $r_2 = 3\%$ , il tasso di interesse annuo effettivo  $r_e$  è:

$$r_e = (1 + 0,03)^2 - 1 = (1,03)^2 - 1 = 1,0609 - 1 = 0,0609 = 6,09\%.$$

La rata  $R$  da me pagata è stata

$$R = \frac{1.000}{a_{\overline{2}|r_2}} = 1.000 \frac{0,03(1,03)^2}{(1,03)^2 - 1} \approx 522,6 \text{ euro.}$$

**Esempio 1.10.**

Consideriamo un mutuo decennale al tasso annuo nominale del 5% privo di spese di apertura e gestione con rate mensili costanti di 1.060,86 euro. Determinare l'ammontare  $P$  del mutuo e il tasso annuo effettivo di interesse.

In primo luogo procuriamoci il tasso d'interesse convertibile:

$$r_{12} \approx 0,00417.$$

Per quanto riguarda  $P$  avremo:

$$P = 1.060,86 a_{\overline{120}|r_{12}} = 1.060,86 \cdot 94,26397 = 100.000 \text{ euro.}$$

Il calcolo del tasso annuo effettivo di interesse fornisce:

$$r_e = (1,00417)^{12} - 1 \approx 0,0512 = 5,12\%.$$

Sinora abbiamo preso in considerazione una situazione puramente ideale assumendo che un'operazione di prestito o finanziamento non richieda dei costi. Nella realtà per un prestito, un pagamento rateale o un mutuo ci sono sempre diverse spese accessorie. In tal caso interviene, oltre al Tan, anche il Taeg (Tasso Annuo Effettivo Globale) che si pone l'obiettivo di rappresentare nel modo più completo ed esatto possibile il costo di un finanziamento. Si tratta di un tasso puramente

virtuale poiché non viene utilizzato per calcolare le rate. Piuttosto è un indicatore che comprende non solo il tasso effettivo di interesse sul prestito, ma anche le spese accessorie.

Il grande vantaggio del Taeg è il suo utilizzo ai fini comparativi: confrontando il Taeg di due mutui si acquisisce immediatamente l'idea di quale costi di più e di quanto.

I parametri che determinano il Taeg sono fissati per legge. In particolare, oltre alla struttura del rimborso finanziario, rientrano a far parte del calcolo di questo tasso tutte le spese accessorie obbligatorie inerenti al finanziamento, ovvero:

- spese di istruttoria della pratica
- commissioni d'incasso
- assicurazioni obbligatorie
- bolli statali e imposte
- spese del conto corrente di appoggio, se obbligatorio.

Per determinare il Taeg si ipotizza che i costi iniziali riducano il capitale prestato e che le spese periodiche aumentino la rata.

In regime di capitalizzazione composta, l'equazione che definisce il Taeg, denotato con  $r_{eg}$ , è la seguente:

$$P - A = \sum_{s=1}^n (R_s + \alpha_s)(1 + r_{eg})^{-t_s} \quad (1.6.4)$$

dove  $P$  è l'ammontare del prestito,  $A$  rappresenta le spese iniziali per l'apertura della pratica,  $n$  è il numero delle rate,  $R_s$  sono le rate nominali che si pagherebbero se l'operazione non avesse dei costi,  $\alpha_s$  è la maggiorazione delle rate dovuta a commissioni d'incasso, assicurazioni obbligatorie e bolli statali ed eventuali spese del conto corrente d'appoggio,  $t_s$  è l'espressione della cadenza delle rate normalizzata all'anno che è il periodo in base al quale è calcolato  $r_{eg}$ . Se, come spesso avviene, le quote  $R_s$  e  $\alpha_s$  sono costanti ( $R_s = R$ ,  $\alpha_s = \alpha$ ,  $\forall s = 1, 2, \dots, n$ ), la (1.6.4), si riduce a

$$P - A = (R + \alpha) \sum_{s=1}^n (1 + r_{eg})^{-t_s}. \quad (1.6.5)$$

Se le rate, oltre ad essere costanti, sono pagate periodicamente con periodo pari a  $\bar{t}$ , grazie alla (1.6.1), si ha

$$P - A = (R + \alpha) \frac{1 - (1 + r_{eg})^{-n\bar{t}}}{(1 + r_{eg})^{\bar{t}} - 1}. \quad (1.6.6)$$

Nel caso particolare, che si presenta molto spesso, in cui  $\bar{t} = \frac{1}{k}$  con  $k = 1, \dots, n$ , poiché  $t_s = \frac{s}{k}$ , l'equazione precedente si scrive nella forma:

$$P - A = (R + \alpha) \frac{1 - (1 + r_{eg})^{-\frac{n}{k}}}{(1 + r_{eg})^{\frac{1}{k}} - 1}. \quad (1.6.7)$$

Riprendiamo i due esempi considerati in precedenza assumendo ora che le due operazioni richiedano dei costi.

**Esempio 1.11.**

Ho acquistato un computer del costo di 1.000 euro che ho rimborsato in regime di capitalizzazione composta in un anno con rate semestrali costanti al tasso annuo nominale del 6%. All'atto della prima rata mi è stata addebitata la somma di 13 euro a causa dell'imposta di bollo e della commissione bancaria, mentre all'atto del pagamento della seconda rata mi è stata addebitata una commissione bancaria di 2 euro. Determinare il Taeg dell'operazione.

Se utilizziamo quanto ottenuto nell'esempio 1. 9 ed adottiamo le notazioni introdotte in precedenza, abbiamo:

$$P = 1.000, A = 0, n = 2, k = 2, R_1 = R_2 = 522,6, \alpha_1 = 13, \alpha_2 = 2.$$

Dunque  $r_{eg}$  è definito mediante l'equazione:

$$1.000 = 535,6(1 + r_{eg})^{-\frac{1}{2}} + 524,6(1 + r_{eg})^{-1}. \quad (1.6.8)$$

Se poniamo

$$(1 + r_{eg})^{\frac{1}{2}} = x,$$

dalla (6.4) otteniamo la seguente equazione di II grado:

$$1.000 x^2 - 535,6 x - 524,6 = 0.$$

La radice positiva dell'equazione, come si verifica facilmente, è data da:

$$x \approx 1,04001554,$$

da cui deduciamo:

$$r_{eg} = (1,04001554)^2 - 1 \approx 1,081613232 - 1 \approx 0,0816 = 8,16\%.$$

Riconsideriamo ora il secondo esempio

**Esempio 1.12.**

Sia dato un mutuo decennale di 100.000 euro al Tan 5% con rate mensili nominali di 1.060,86 euro. La banca che ha concesso il mutuo richiede 800 euro di spese iniziali e il pagamento ogni mese di 20,56 euro per la polizza incendio, 10 euro di spese di incasso e 2 euro di spese di bollo. Verificare che il valore (approssimato) del Taeg è pari al 6%.

In questo caso abbiamo:

$$P = 100.000, A = 800, n = 120, k = 12, R = 1.060,86, \alpha = 32,56.$$

Dunque  $r_{eg}$  è definito mediante l'equazione:

$$100.000 - 800 = 99.200 = 1.093,42 \frac{1 - (1 + r_{eg})^{-10}}{(1 + r_{eg})^{\frac{1}{12}} - 1}. \quad (1.6.9)$$

Si verifica facilmente che se nell'equazione (1.6.9) sostituiamo a  $r_{eg}$  il valore approssimato di 0,06 l'equazione è soddisfatta, ovviamente in via approssimata.

Non è difficile provare che il calcolo del Taeg tramite la (1.6.7) porta alla seguente equazione algebrica di grado  $n$ :

$$(P - A)x^n - (R + \alpha)(x^{n-1} + \dots + x + 1) = 0 \quad (1.6.10)$$

dove  $x = (1 + r_{eg})^{\frac{1}{k}}$ .

**Valutazione di un progetto di investimento col metodo del valore attuale netto**

La nozione di valore attuale di una rendita può essere utilizzata per la valutazione di un dato progetto di investimento.

Un progetto d'investimento è rappresentato da un insieme di attività produttive o finanziarie in cui l'azienda o il privato impegna capitale (costo dell'investimento) con l'obiettivo di conseguire, in contropartita, un flusso di benefici futuri (ricavi dell'investimento) complessivamente superiori ai costi sostenuti. Dunque la realizzazione di un progetto comporta dei costi e dei ricavi e si ha perciò un flusso di capitali disponibili in tempi successivi, ossia una rendita. Prima di intraprendere la realizzazione di un progetto, se ne può valutare la profittabilità determinando il valore attuale della rendita corrispondente, nella quale i costi sono rappresentati come capitali negativi ed i ricavi come capitali positivi, una volta fissato il regime di capitalizzazione. Tale metodo di valutazione è detto metodo del valore attuale netto.

Il criterio del valore attuale netto si basa sul principio secondo il quale un'iniziativa merita di essere presa in considerazione solo se i benefici che ne possono

derivare sono superiori alle risorse utilizzate ossia solo se il valore attuale netto è positivo per cui i ricavi attualizzati superano i costi. Tale metodo è utilizzato soprattutto per la valutazione tra più progetti alternativi che possono essere realizzati attraverso lo stesso esborso iniziale. Il progetto con valore attuale netto maggiore sarà preferito rispetto agli altri.

Vediamo un esempio molto semplice di applicazione di tale criterio.

### Esempio 1.13.

Supponiamo che un imprenditore al tempo  $t = 0$  acquisti e pianti degli alberi al costo di 1.000 euro e voglia poi tagliarli per ricavare un profitto.

A tale proposito ci siano due possibilità:

- gli alberi si tagliano dopo un anno ricavando 2.200 euro;
- gli alberi si tagliano dopo due anni ricavando 3.400 euro.

Vogliamo valutare quale delle due opzioni è più conveniente.

Osserviamo che per ognuna delle due alternative abbiamo un flusso di capitali. Vogliamo valutare il valore attuale netto del progetto supponendo il tasso annuo di interesse  $r = 10\%$  ed adottando il regime di capitalizzazione composta.

#### Caso 1

Abbiamo un flusso di due capitali:  $C_1 = -1.000$  euro al tempo  $t_1 = 0$  e  $C_2 = 2.200$  euro al tempo  $t_2 = 1$ .

Dunque:

$$\begin{aligned} V_0 &= C_1 + C_2 v(0, 1) = \\ &= -1.000 + 2.200 (1 + 0, 1)^{-1} = -1.000 + 2.000 = 1.000 \text{ euro} \end{aligned}$$

#### Caso 2

Abbiamo un flusso di due capitali:  $C_1 = -1.000$  euro al tempo  $t_1 = 0$  e  $C_2 = 3.400$  euro al tempo  $t_2 = 2$ .

Dunque

$$\begin{aligned} V_0 &= C_1 + C_2 v(0, 2) = \\ &= -1.000 + 3.400 (1 + 0, 1)^{-2} = -1.000 + 2.810 = 1.810 \text{ euro.} \end{aligned}$$

In conclusione il secondo progetto ha valore attuale netto superiore e quindi il metodo del valore attuale netto ci dice che la seconda alternativa è più conveniente.

Vediamo ora un secondo esempio di applicazione del metodo del valore attuale netto.

**Esempio 1.14.**

Decidiamo di investire la somma di 10.000 euro dandola in prestito e ci vengono proposte le due seguenti possibilità:

1. riscuotere 3.000 euro fra 3 anni, 4.500 euro fra 5 anni e 5.500 euro fra 10 anni;
2. ottenere il rimborso in 10 rate annuali posticipate di 1.250 euro.

Determiniamo l'investimento più conveniente in un regime di capitalizzazione composta con tasso annuo di interesse del 3%.

Per la prima possibilità di rimborso il valore attuale netto della rendita associata è dato da

$$-10.000 + 3.000(1,03)^{-3} + 4.500(1,03)^{-5} + 5.500(1,03)^{-10} = 719,68.$$

Per quanto riguarda la seconda possibilità, osserviamo che le 10 rate annuali danno luogo ad una rendita discreta temporanea costante di periodo unitario immediata posticipata di cui sappiamo calcolare il valore attuale. In conclusione otteniamo che il valore attuale netto della rendita associata alla seconda possibilità è dato da:

$$-10.000 + 1.250 \frac{(1,03)^{10} - 1}{0,03(1,03)^{10}} = 662,75.$$

Perciò delle due possibilità risulta più conveniente la prima perché ha il valore attuale netto maggiore.

Il criterio del valore attuale netto viene detto per brevità criterio **VAN**, acronimo (in italiano) di **Valore Attuale Netto** o criterio **PNV**, acronimo (in inglese) di **Present Net Value**.

La nozione di valore attuale di una rendita può essere utilizzata anche in altre situazioni in cui non è coinvolto un progetto di investimento. Vediamone un esempio.

**Esempio 1.15.**

Ad un inquilino viene chiesto di scegliere uno dei tre seguenti modi per pagare l'affitto:

1. con un unico versamento di 5.000 euro a fine anno;

2. con due versamenti semestrali posticipati ciascuno di 2.480 euro;
3. con versamenti alla fine di ogni mese di 410 euro.

Stabilire qual è il pagamento più conveniente per l'inquilino se si adotta il metodo del valore attuale con tasso di interesse annuo del 5 % in un regime di capitalizzazione composta.

In analogia con i due esempi precedenti, anche se non si tratta di un progetto di investimento, per decidere qual è il pagamento più conveniente ricorriamo al criterio del valore attuale. Ovviamente in questo caso non ci sono ricavi, ma solo costi e dunque per le rendite corrispondenti alle tre alternative prenderemo per semplicità capitali sempre positivi. E' evidente che il metodo di pagamento più conveniente è quello che corrisponde al valore attuale minore.

Per la prima forma di pagamento calcoliamo il valore attuale di 5.000 euro:

$$5.000(1 + 0,05)^{-1} = 4.761,90 \text{ euro.}$$

Per la seconda, osserviamo che dà luogo ad una rendita discreta, temporanea di 2 termini, costante con periodo pari ad un semestre, immediata e posticipata. Il suo valore attuale è dato da

$$2.480[(1,05)^{-\frac{1}{2}} + (1,05)^{-1}] = 2.480 \frac{1 - (1,05)^{-1}}{(1,05)^{\frac{1}{2}} - 1} = 4.782,18 \text{ euro.}$$

Infine la terza forma di pagamento dà luogo ad una rendita discreta, temporanea di 12 termini, costante con periodo pari a  $\frac{1}{12}$  di anno, immediata e posticipata. Il suo valore attuale è dato da

$$410 \frac{1 - (1,05)^{-1}}{(1,05)^{\frac{1}{12}} - 1} = 4.792,15 \text{ euro.}$$

Dunque, adottando il criterio del valore attuale con interesse annuo del 5 % la forma di pagamento più conveniente è la prima.

## 1.7 Contratti forward e futures.

I titoli derivati sono caratterizzati dal fatto che il loro valore dipende dal valore di un'attività finanziaria o dal verificarsi nel futuro di un dato evento osservabile oggettivamente (ad esempio l'evento può essere costituito dal raggiungimento di un dato valore da parte di un indice di Borsa). L'attività o l'evento costituiscono il **sottostante** del prodotto derivato.

La relazione, rappresentata mediante una funzione matematica, che lega il valore del derivato al sottostante, è detta **pay-off**.

Una categoria importante di prodotti derivati è costituita dai **contratti a termine**.

**Definizione 1.14.** *Un contratto a termine è un accordo tra due soggetti per la consegna di una determinata quantità di un dato sottostante ad un prezzo e ad una data prefissati.*

*Il prezzo è detto prezzo di consegna e la data è detta data di scadenza.*

Il sottostante può essere di vario tipo:

- **attività finanziarie**, come azioni, obbligazioni, valute, strumenti finanziari derivati, indici di Borsa, ecc.

- **merci**, come petrolio, oro, grano, caffè, ecc.

L'**acquirente** (colui che si impegna alla scadenza a corrispondere il prezzo di consegna per ricevere il sottostante) apre sul mercato una **posizione lunga**, mentre il **venditore** (colui che si impegna alla scadenza a consegnare il sottostante per ricevere il prezzo di consegna) apre sul mercato una **posizione corta**. I contratti a termine sono strutturati in modo che al momento della loro conclusione le due prestazioni siano equivalenti. Ciò è ottenuto ponendo il prezzo di consegna, cioè quello stabilito nel contratto, uguale al prezzo corrente del sottostante, maggiorato del valore finanziario del tempo intercorrente tra la data di stipula e la data di scadenza. Il prezzo di consegna, perché le due prestazioni siano effettivamente equivalenti alla conclusione, deve essere uguale al prezzo di mercato del bene sottostante alla data di scadenza. Ma tale condizione potrebbe non verificarsi in ragione dei movimenti del prezzo corrente che il sottostante via via assume. Ciò determina il **profilo di rischio/rendimento** di un contratto a termine che può essere così riassunto:

- per l'acquirente il rischio è rappresentato dal deprezzamento del bene; se non fosse vincolato dal contratto, potrebbe acquistare il bene sul mercato ad un prezzo inferiore. Viceversa, in caso di apprezzamento del bene sottostante, l'acquirente maturerà un guadagno
- per il venditore il rischio è rappresentato dall'apprezzamento del bene sottostante poiché il contratto lo costringe a vendere il bene ad un prezzo inferiore a quello che realizzerebbe sul mercato. Viceversa conseguirà un guadagno in caso di deprezzamento perché, a causa del contratto, venderà il bene ad un prezzo superiore a quello di mercato.

La decisione di stipulare un contratto a termine può essere ricondotta alle seguenti finalità:

- **finalità di copertura (hedging).**

Supponiamo di detenere ad esempio titoli di Stato decennali che già sappiamo di dover vendere prima della scadenza per pagare la rata di un mutuo che scade il 30 settembre ed il cui importo è uguale al valore che i titoli hanno attualmente. In questa situazione siamo esposti al rischio del deprezzamento che i titoli di Stato potrebbero subire per cui il 30 settembre l'ammontare della loro vendita non sarebbe sufficiente a pagare le rate del mutuo. La conclusione di un contratto a termine come venditori ci copre da questo rischio. Infatti venderemo a termine i titoli di Stato con scadenza il 30 settembre e prezzo di consegna uguale al loro attuale valore.

- **finalità speculativa.**

Se siamo convinti che un certo titolo finanziario, ad esempio una certa tipologia azioni, avrà un notevole incremento di valore, possiamo stipulare un contratto a termine come acquirenti e, se come pensiamo, il titolo incrementerà il proprio valore, alla scadenza del contratto il prezzo di mercato delle azioni sarà superiore al prezzo di consegna e acquistando le azioni avremo un profitto.

L'esecuzione del contratto alla scadenza può realizzarsi:

- con l'effettiva consegna del bene sottostante da parte del venditore all'acquirente dietro pagamento del prezzo di consegna: **consegna fisica o physical delivery**
- con il pagamento del differenziale in denaro tra il prezzo corrente del sottostante al momento della scadenza e il prezzo di consegna indicato nel contratto. Se la differenza è positiva sarà dovuta dal venditore all'acquirente e viceversa se negativa: **consegna per differenziale o cash settlement.**

Le principali tipologie dei contratti a termine sono i contratti **forward** e i contratti **futures**.

### **Contratti forward.**

I contratti forward si caratterizzano per il fatto di essere stipulati fuori dai mercati regolamentati, cioè nei mercati OTC.

Se analizziamo i **flussi di cassa** ossia i pagamenti che vengono scambiati tra le due parti durante la vita del contratto, gli unici flussi di cassa si manifestano alla scadenza con la consegna fisica del bene o con la consegna per differenziale. Non sono previsti flussi di cassa intermedi durante la vita del contratto e di

norma non sono previsti flussi di cassa neanche alla data di stipula poiché il contratto a termine è strutturato in modo da rendere equivalenti le due prestazioni.

### Esempio 1.16.

Consideriamo un contratto a termine forward avente come bene sottostante un barile di petrolio:

- il prezzo di mercato del barile alla scadenza, nei due casi che ipotizziamo, è pari a 40 euro e 30 euro
- il prezzo di consegna è di 35 euro
- la scadenza è fissata a 90 giorni dalla data di stipulazione del contratto
- la data di stipulazione del contratto è il 1<sup>o</sup> marzo.

Alla scadenza (30 maggio) l'acquirente del forward pagherà 35 euro alla controparte e in cambio riceverà un barile di petrolio (physical delivery) oppure verrà pagata dal venditore o dall'acquirente la differenza tra il prezzo di mercato del barile di petrolio e il prezzo di consegna (cash settlement).

Nel primo caso ipotizzato, il valore di mercato del barile alla scadenza è pari a 40 euro e l'acquirente, se adotterà la consegna fisica, riceverà un barile di petrolio pagando solo 35 euro con un guadagno di 5 euro. Se adotterà il cash settlement, poiché il prezzo di mercato del sottostante è superiore di 5 euro al prezzo di consegna, riceverà dal venditore la differenza di 5 euro. In ogni caso l'acquirente guadagna 5 euro e il venditore ne perde altrettanti.

Nel secondo caso il valore di mercato del barile alla scadenza è pari a 30 euro. Le parti si invertono. L'acquirente subisce una perdita di 5 euro e il venditore ne guadagna altrettanti.

### Contratti futures.

I contratti futures sono anch'essi contratti a termine come i forward, ma se ne differenziano per essere standardizzati e negoziati sui mercati regolamentati. Il loro prezzo, detto **future price**, essendo quotato sui mercati regolamentati, non è propriamente contrattato tra le due parti, ma è il risultato dell'incontro di proposte di acquisto, immesse da chi vuol acquistare, con le proposte di vendita, immesse da chi intende vendere. Di norma è indicato in "punti indice".

In relazione all'attività sottostante, il contratto future assume diverse denominazioni:

- **commodity future** se l'attività sottostante è una merce
- **financial future** se l'attività sottostante è un'attività finanziaria.

La standardizzazione fa sì che esistano contratti uguali per

- oggetto (cioè il bene sottostante)

- dimensione (cioè il valore nominale che si ottiene moltiplicando il prezzo espresso in punti indice per un moltiplicatore convenzionalmente stabilito)
- date di scadenza (c'è un calendario prefissato con in genere quattro scadenze in un anno)
- regole di negoziazione (orari di contrattazione, luoghi di consegna, modalità di liquidazione, ecc.).

Ulteriore elemento distintivo rispetto ai forward è la presenza della **Clearing House** che si interpone in tutte le transazioni concluse sui mercati dei futures. In Italia svolge il ruolo di Clearing House la Cassa di Compensazione e Garanzia. Quando due soggetti compravendono un contratto, ne danno immediatamente comunicazione alla Clearing House che procede a comprare il future dalla parte di chi ha venduto e a venderlo alla parte che ha comprato. La Clearing House assume dunque il ruolo di controparte sia dell'acquirente sia del venditore. Gli obblighi contrattuali non sorgono direttamente tra acquirente e venditore, ma tra ciascun contraente e la Clearing House. Così nel caso di inadempimento di una delle due parti, la Clearing House si sostituisce ai suoi obblighi garantendo il buon esito della transazione, salvo poi rivalersi sul soggetto inadempiente.

La Clearing House adotta il **sistema dei margini** a tutela delle posizioni aperte sul mercato dal rischio di inadempimento. Tale sistema prevede il versamento da parte dei due contraenti di un margine iniziale, pari ad una fissata percentuale del valore nominale, su un apposito conto detenuto dalla Clearing House. Tale margine viene versato a garanzia del buon fine della transazione e verrà restituito nel giorno di liquidazione del contratto future.

Oltre al margine iniziale, viene calcolato giornalmente un altro margine, il margine di variazione, che corrisponde al guadagno o alla perdita realizzati da ciascuna delle due parti alla fine della giornata lavorativa. A fine giornata la Clearing House rileva il prezzo di chiusura del future e, calcolando la differenza tra questo e il prezzo di chiusura del giorno precedente, determina il profitto e la perdita di ogni parte come se la posizione fosse liquidata in quel momento. La parte che ha subito una variazione di prezzo sfavorevole paga alla Clearing House il relativo margine di variazione e questa provvede a girarlo alla parte per la quale la variazione del prezzo è stata positiva.

Dunque nel caso di contratto future, vi sono flussi di cassa sia all'atto della stipula del contratto (margine iniziale) sia durante la vita del contratto (margine di variazione) sia alla scadenza (liquidazione del contratto).

#### **Esempio 1.17.**

Consideriamo un future avente come sottostante il titolo azionario Alfa:

- il prezzo future al quale è stato compravenduto il contratto è pari a 110 punti

- il valore nominale del contratto è pari a 1 euro per ogni punto ed è quindi di 110 euro
- il contratto impegna all'acquisto/vendita di un'unità di sottostante
- la scadenza è a tre giorni dalla data di stipulazione del contratto
- il margine iniziale è pari al 10% del valore nominale del contratto.

Alla scadenza l'acquirente pagherà 110 euro alla Cassa di Compensazione e Garanzia e riceverà un titolo Alfa (physical delivery) oppure riceverà (o pagherà) una somma pari alla differenza fra prezzo di mercato del titolo Alfa e prezzo future (cash settlement). E' evidente che nel caso in cui il prezzo di mercato sia  $> 110$ , ci sarà un profitto per l'acquirente e una perdita per il venditore. Se invece il prezzo di mercato è  $< 110$ , avverrà l'opposto riguardo guadagno e perdita per acquirente e venditore. Questo è il risultato finanziario complessivo dell'operazione alla scadenza.

Ma abbiamo visto che i futures prevedono il versamento dei margini di variazione durante la vita del contratto.

Per comprendere come funziona il sistema dei margini, ipotizziamo una evoluzione dei titoli Alfa tale che l'acquirente a termine abbia un profitto di 0,3 euro. Al momento iniziale entrambe le parti versano come margine iniziale 11 euro.

Al secondo giorno, assumendo che il prezzo sia diminuito a 109,5 punti indice, l'acquirente ha maturato una perdita pari a 0,5 euro poiché  $(109,5 - 110) \times 1$  euro = - 0,5 euro. L'acquirente dovrà corrispondere immediatamente alla Clearing House 0,5 euro.

Al terzo giorno, assumendo che il prezzo sia aumentato a 109,7, l'acquirente ha maturato un guadagno pari a  $(109,7 - 109,5) \times 1$  euro = 0,2 euro che riceverà dalla Clearing House, ma che non gli consentirà di colmare la perdita del giorno precedente. A livello cumulato, l'acquirente sopporta ancora una perdita di 0,3 euro.

Al quarto giorno, supponendo che il prezzo sia pari a 110,3, l'acquirente ha maturato un guadagno rispetto al giorno precedente pari a  $(110,3 - 109,7) \times 1$  euro = 0,6 euro. Questo guadagno consente all'acquirente di ripianare la residua perdita derivante dal secondo giorno e anzi, a livello cumulato, l'acquirente avrà conseguito un guadagno di 0,3 euro.

Alla scadenza verrà anche restituito alle parti il margine inizialmente versato di 11 euro.

Mediante il sistema di margine, le parti sono tutelate dal rischio di inadempimento. Infatti, se una parte non corrisponde la perdita giornaliera maturata, la Clearing House utilizza il margine iniziale per corrispondere il profitto maturato alla controparte e invita la parte inadempiente a reintegrare il margine iniziale. Ove ciò non avvenga, la Clearing House provvede a chiudere la posizione della parte che non ha versato il margine, evitando così futuri inadempimenti.

E' da rilevare che i contratti forward sono più rischiosi dei futures poiché non c'è tutela nel caso di inadempienza di una delle due parti.

## 1.8 Nozioni di base sulle Opzioni.

In questo paragrafo esponiamo alcune nozioni di base relativamente alle opzioni classiche, dette **opzioni vanilla** o **opzioni standard**

**Definizione 1.15.** *Le opzioni sono contratti derivati che attribuiscono ad un soggetto, dietro pagamento di un corrispettivo denominato **premio** (prezzo delle opzioni), la facoltà, da esercitare entro la data di scadenza o alla data di scadenza, detta **data di esercizio**, di acquistare o vendere determinate attività ad un prezzo fissato, detto **prezzo di esercizio**.*

Dunque nel contratto intervengono due soggetti:

- l'**acquirente (holder)** che pagando il premio acquista la facoltà di esercitare l'opzione al prezzo di esercizio. Assume dunque posizione lunga ed acquista un diritto sull'attività sottostante senza però essere soggetto ad alcun obbligo
- il **venditore (writer)** che rilascia l'opzione alla controparte ed assume posizione corta. La sua posizione implica un obbligo e non un diritto.

Le attività sottostanti il contratto possono essere rappresentate da merci o da strumenti finanziari come titoli di Stato, azioni, indici di Borsa, futures, tassi di interesse, cambi esteri, ecc.

La principale classificazione delle opzioni consiste nella differenziazione tra:

- **opzioni di acquisto** o **call options** che conferiscono al possessore la facoltà di acquistare ad un prezzo prestabilito
- **opzioni di vendita** o **put options** che attribuiscono al possessore la facoltà di vendere ad un prezzo prestabilito.

Sotto il profilo del tempo in cui il diritto può essere esercitato, è possibile distinguere:

- **opzioni europee** se la facoltà può essere esercitata esclusivamente alla data di esercizio;
- **opzioni americane** se può essere esercitata in qualsiasi momento entro la data di esercizio.

Consideriamo un'opzione call europea che ha  $T$  come data di esercizio. Sia  $X$  il prezzo di esercizio e  $S(T)$  il prezzo del sottostante alla data  $T$ .

Se  $S(T) > X$ , all'acquirente della call conviene esercitare l'opzione poiché acquista l'attività sottostante al prezzo  $X$  che è inferiore al suo prezzo di mercato e dunque ha un profitto (lordo) dato da  $S(T) - X$ . Ovviamente, se  $S(T) \leq X$ , l'acquirente di una call non esercita l'opzione ed ha una perdita pari al premio pagato alla stipula del contratto.

Se invece l'opzione è una put, all'acquirente conviene esercitare l'opzione se  $S(T) < X$  perché così vende l'attività sottostante al prezzo  $X$  che è superiore al prezzo di mercato e dunque ha un profitto dato da  $X - S(T)$ . Ovviamente, se  $S(T) \geq X$ , l'acquirente di una put non esercita l'opzione ed ha una perdita pari al premio.

Se la call o la put fosse americana, tale argomentazione si dovrebbe fare relativamente a tutti i tempi precedenti  $T$ .

Il venditore dell'opzione, che ha l'obbligo di adeguarsi alla scelta dell'acquirente, ha una perdita (o un profitto) pari al profitto (o alla perdita) di chi ha acquistato l'opzione.

L'acquirente di una call come il venditore di una put si attende un aumento del prezzo dell'attività sottostante, mentre l'acquirente di una put così come il venditore di una call si aspetta una diminuzione di prezzo dell'attività sottostante. Gli acquirenti di opzioni pagano un premio perché hanno illimitate possibilità di profitto, mentre hanno limitate possibilità di perdita (al massimo perdono il premio versato), all'opposto i venditori di opzioni ricevono un premio perché a fronte di un profitto limitato (il premio) hanno potenziali perdite illimitate.

Sia  $T$  la data di esercizio di un'opzione e sia  $t$  un tempo  $\leq T$ .

Al tempo  $t$  l'opzione può essere **in the money**, **at the money**, **out of the money**.

Indichiamo con  $S(t)$  il prezzo del sottostante al tempo  $t$  e con  $X$  il prezzo di esercizio.

**Definizione 1.16.** *Diciamo che un'opzione è in the money al tempo  $t$  se ci fosse per l'acquirente un flusso di cassa positivo nel caso in cui venisse esercitata immediatamente.*

Pertanto una call è in the money se  $S(t) > X$ , una put è in the money se  $S(t) < X$ .

**Definizione 1.17.** *Diciamo che un'opzione è at the money al tempo  $t$  se per il possessore ci fosse un flusso di cassa nullo in caso di esercizio immediato.*

Dunque è at the money ogni opzione per la quale  $S(t) = X$  sia che si tratti di una call che di una put.

**Definizione 1.18.** Diciamo che un'opzione è *out of the money* al tempo  $t$  se ci fosse per il possessore un flusso di cassa negativo se venisse esercitata immediatamente.

Quindi una call è *out of the money* se  $S(t) < X$ , una put è *out of the money* se  $S(t) > X$ .

Nel caso di opzione europea, questa verrà esercitata solo se alla data di scadenza è *in the money*, nel caso di opzione americana verrà esercitata ad una data antecedente la data di scadenza solo se in tale data è *in the money*.

Concludiamo il paragrafo osservando che se abbiamo una call europea, il pagamento che dà all'acquirente alla data di scadenza ossia il pay-off è:

$$\max \{S(T) - X, 0\},$$

mentre per una put europea il pay-off è dato da

$$\max \{X - S(T), 0\}.$$

## 1.9 Swap, Warrant e Convertibili

**Definizione 1.19.** Uno swap è un accordo privato tra due parti che si scambiano flussi di cassa futuri secondo modalità predefinite.

I flussi di cassa possono essere espressi nella stessa valuta oppure in valute differenti. La determinazione della quantità di flussi da scambiarsi richiede una variabile sottostante che spesso è un tasso di interesse.

Le principali e più diffuse forme di swap sono:

- swap di tasso d'interesse (interest rate swap o IRS)
- swap di valuta (currency swap o CS).

### Swap di tasso d'interesse.

Nella sua forma tipica è un contratto bilaterale in base al quale i contraenti si scambiano, con riferimento ad un capitale nominale, un flusso di interesse a tasso fisso con un flusso di interesse a tasso variabile a date prestabilite per un certo periodo di tempo.

In genere, come tasso variabile si usa il **LIBOR** (London Inter-Bank Offered Rate) che è il tasso di interesse al quale le grandi banche che operano sul mercato di Londra si prestano denaro tra loro, spesso durante la notte (in batch notturno), dopo la chiusura dei mercati. Il Libor è calcolato giornalmente dalla British Bankers' Association in base alle negoziazioni tra le banche e varia al variare delle condizioni economiche. Esso è maggiore del tasso di sconto che gli

istituti di credito pagano per un prestito alla banca centrale. In realtà vi sono diversi Libor a seconda della durata (da overnight fino a 12 mesi) e delle valute. Il Libor è un indice del costo del denaro a breve termine che viene adoperato comunemente come base per il calcolo dei tassi d'interesse relativi a molte altre operazioni finanziarie (mutui, futures, ecc.) principalmente in valute diverse dall'Euro, per il quale il tasso di riferimento è più spesso l'**EURIBOR (Europe Inter-Bank Offered Rate)**. L'Euribor è il tasso di interesse al quale si prestano denaro le principali banche europee nell'area dell'euro e viene determinato giornalmente dall'European Banking Federation. Vi sono più Euribor a seconda della durata (da 1 settimana a 12 mesi).

Normalmente le due controparti alle date di scadenza si scambiano solo il saldo tra i due pagamenti, cioè il datore di tasso fisso pagherà la differenza tra tasso fisso e tasso variabile se il tasso variabile sarà inferiore al tasso fisso e viceversa. Uno IRS può essere usato per trasformare un prestito a tasso variabile in un prestito a tasso fisso e viceversa.

Ad esempio, si consideri una società X che per finanziarsi abbia ricevuto un prestito al tasso fisso del 4,75% annuo. Se tale società stipula un contratto swap in cui su un capitale nominale pari a quello del finanziamento riceve il 4,5% annuo e paga un tasso variabile LIBOR a 12 mesi, l'effetto netto per la società X è quello di pagare gli interessi al tasso LIBOR + 0,25% annuo sul finanziamento. Tale operazione consente la trasformazione del prestito da uno a tasso fisso ad uno a tasso variabile e può risultare appetibile per la società X in una ipotesi di tassi discendenti.

In modo del tutto analogo una attività a tasso variabile può essere convertita in una a tasso fisso o viceversa.

Dunque un IRS, combinato con un'attività o una passività, può modificare le caratteristiche di rischio di tasso d'interesse dell'attività o della passività.

### **Swap di valuta.**

Come l'IRS, è un contratto che prevede uno scambio di flussi di interesse (a tasso fisso o variabile) per un periodo determinato, ma, a differenza dell'IRS, i flussi di interesse sono espressi in valute diverse ed è previsto normalmente anche lo scambio dei capitali espressi in valute diverse. Si presta alla gestione delle passività e delle attività, consentendo al mutuatario e all'investitore di cambiare le caratteristiche di rischio di tasso d'interesse e di cambio della loro posizione finanziaria e di ottenere vantaggi in termini di costo e di rendimento.

Inoltre un CS può consentire di accedere indirettamente a mercati non facilmente accessibili. Per esempio, una società americana non conosciuta in Giappone potrebbe indebitarsi in Yen ricorrendo ad un currency swap che le consenta di trasformare il suo debito in dollari in un debito in Yen.

Sono disponibili anche opzioni su swap, ossia **swaption**. Per esempio, l'opzione su IRS è un'opzione per scambiare un titolo a tasso fisso con uno a tasso variabile.

Il **warrant** è una particolare tipologia di opzione che ha come caratteristica principale quella di essere emesso da una società o un'istituzione finanziaria sotto forma di titolo negoziabile, quotato presso una o più Borse internazionali.

Le principali differenze rispetto alle altre tipologie di opzioni, oltre al fatto che queste ultime possono essere negoziate nei mercati OTC, sono il taglio minimo di negoziazione che è più ridotto e le scadenze che sono normalmente più lunghe. Essendo opzioni, i warrant sono strumenti finanziari che dietro pagamento di un premio conferiscono la facoltà di acquistare (call warrant) o vendere (put warrant), entro la data di scadenza o alla data di scadenza, ad un prezzo prestabilito un certo quantitativo di strumenti finanziari.

Generalmente si distingue tra **warrant (in senso stretto)** e **covered warrant**.

La differenza principale tra di essi è costituita dalle attività finanziarie sottostanti: per i warrant possono essere solo azioni, mentre per i covered warrant, oltre che azioni, possono essere tassi d'interesse, valute, indici, panieri di azioni.

Un'ulteriore differenza sono gli emittenti. Infatti i warrant sono emessi da società per azioni per garantirsi a termine il costo per l'aumento di capitale ed hanno come azioni sottostanti azioni della società stessa che li ha emessi. I covered warrant sono emessi da banche su strumenti finanziari di terzi e con fini speculativi. Inoltre, mentre a scadenza se un warrant viene esercitato c'è la consegna fisica delle azioni sottostanti, con i covered warrant a scadenza non c'è la consegna del sottostante ma di un controvalore in contanti.

Le **obbligazioni convertibili** sono obbligazioni con opzioni incorporate. Attribuiscono al possessore interessi periodici a tasso fisso e la possibilità di scambiare con azioni, in date fissate, i certificati obbligazionari sulla base di un determinato rapporto di conversione. I possessori di obbligazioni convertibili hanno la possibilità di scelta tra conservare lo stato di creditori fino alla scadenza oppure diventare azionisti della stessa società o di altre società.

Le **obbligazioni reverse convertible** sono prestiti con durata prestabilita, con cedola molto elevata, ma che lasciano al debitore l'opzione di consegnare, alla scadenza, titoli azionari anziché restituire il capitale investito. L'opzione verrà esercitata, se la quotazione dell'azione collegata scenderà, durante la vita dell'obbligazione, al di sotto di un limite prefissato e, se, alla data di rimborso, il prezzo dei titoli azionari sarà inferiore al capitale prestato. In caso di forte ribasso dei titoli collegati, non è improbabile che per il possessore delle obbligazioni la perdita in conto capitale, causata dalla consegna di un bene a prezzo deci-

samente superiore a quello di mercato, finisce per annullare l'introito procurato dall'elevato valore della cedola. Si tratta di titoli con un'elevata dose di rischio che tuttavia vengono sempre più venduti allo sportello in tempi recenti.

## 1.10 Portafoglio e portafoglio di arbitraggio.

**Definizione 1.20.** *Un portafoglio è un insieme di quantità detenute di titoli (una quantità per ogni titolo).*

Un portafoglio è dunque una collezione di contratti, ciascuno dei quali prevede pagamenti a diverse date future e in diversi stati.

Ad esempio un portafoglio è costituito da 5 azioni FCA, 6 BOT, 3 BTP, ecc....

Supponiamo che nel portafoglio siano presenti  $N$  titoli. Denotiamo con  $\vartheta_i$  la quantità detenuta del titolo  $i$ -esimo. Si osservi che  $\vartheta_i$  può essere positivo e negativo a seconda della posizione aperta sul mercato relativamente al titolo  $i$ -esimo dal detentore del portafoglio: se relativamente al titolo  $i$ -esimo il detentore del portafoglio ha una posizione lunga (ossia ha la posizione di acquirente), allora  $\vartheta_i > 0$  e viceversa; se ha una posizione corta (ossia ha la posizione di venditore), allora  $\vartheta_i < 0$  e viceversa.

Indichiamo con  $p_i$  il prezzo del titolo  $i$ -esimo.

**Definizione 1.21.** *Definiamo vettore dei prezzi il vettore  $p \in \mathbb{R}^N$  rappresentato dal vettore colonna:*

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ \dots \\ \dots \\ p_N \end{pmatrix}.$$

Identifichiamo un portafoglio con il vettore  $\vartheta \in \mathbb{R}^N$  rappresentato mediante il vettore colonna delle quantità di ogni titolo:

$$\vartheta = \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \dots \\ \dots \\ \vartheta_N \end{pmatrix}.$$

Pertanto  $\vartheta$  rappresenta le posizioni prese dal detentore del portafoglio ad una certa data.

**Definizione 1.22.** Dato il vettore dei prezzi  $p$ , il costo del portafoglio  $\vartheta$  è dato da:

$$\sum_{i=1}^N p_i \vartheta_i = p^T \vartheta.$$

I titoli che ad un certo tempo  $t$  compongono il portafoglio, essendo dei contratti finanziari, prevedranno pagamenti in date future, pagamenti che saranno diversi a seconda degli stati che si possono verificare in corrispondenza di ogni singola data.

Supponiamo che ad una determinata data futura sia  $K$  il numero degli stati possibili. Diamo pertanto la seguente definizione:

**Definizione 1.23.** Definiamo matrice dei pagamenti (ad una certa data futura) la seguente matrice  $N \times K$ :

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1K} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{N1} & \dots & d_{NK} \end{pmatrix}$$

dove  $d_{ij}$  rappresenta il numero di unità di conto pagate da un'unità del titolo  $i$ -esimo nello stato  $j$ .

**Definizione 1.24.** Il flusso dei pagamenti del portafoglio nello stato  $j$  è dato da

$$\sum_{i=1}^N d_{ij} \vartheta_i = d_j^T \vartheta,$$

dove con  $d_j$  denotiamo il vettore colonna  $\begin{pmatrix} d_{1j} \\ \dots \\ d_{Nj} \end{pmatrix}$ .

Nel seguito, dato un qualsiasi vettore  $q \in \mathbb{R}^n$ , scriveremo  $q > 0$  ( $< 0$ ) se tutte le sue componenti sono positive (negative) e  $q \geq 0$  ( $\leq 0$ ) se tutte le sue componenti sono non negative (non positive).

**Definizione 1.25.** Un portafoglio  $\vartheta$  si dice portafoglio di arbitraggio se è soddisfatta una di queste due condizioni:

$$i) \quad p^T \vartheta \leq 0 \quad e \quad D^T \vartheta > 0$$

$$ii) \quad p^T \vartheta < 0 \quad e \quad D^T \vartheta \geq 0.$$

La condizione *i)* ci dice che il costo del portafoglio è non positivo e i flussi dei pagamenti sono positivi in ogni stato.

La condizione *ii)* ci dice che il costo del portafoglio è negativo e i flussi dei pagamenti sono non negativi in ogni stato.

Dunque un portafoglio di arbitraggio garantisce pagamenti positivi in tutti gli stati, cioè profitto sicuro, a costo al più nullo oppure pagamenti non negativi a costo negativo.

L'assenza di possibilità di arbitraggio, cioè l'impossibilità di comporre un portafoglio di arbitraggio, implica che non esiste un investimento a costo nullo che garantisca con certezza un profitto positivo nei tempi futuri, ma non è vero il viceversa.

Vediamo un esempio di portafoglio di arbitraggio. In tale esempio, come in quelli successivi, assumiamo che i prezzi siano espressi nella medesima unità monetaria, ad esempio in euro, ma per brevità non la indichiamo esplicitamente.

**Esempio 1.18. Esempio di portafoglio di arbitraggio.**

Supponiamo di avere tre titoli ( $N = 3$ ) e due stati ( $K = 2$ ).

Un portafoglio  $\vartheta$  sia così costituito:

- 1) 1 posizione corta relativamente ad una obbligazione priva di rischio con valore iniziale  $B_0 = 300$  e tasso di interesse annuo  $r = 3\%$ ;
- 2) 1 posizione lunga relativamente ad un'azione con prezzo iniziale  $S_0^{(1)} = 200$  e prezzo dopo un anno pari a 229 nello stato 1 e 192 nello stato 2. Inoltre nello stato 1 l'azione paga dopo un anno un dividendo pari a 1 e nessun dividendo nello stato 2;
- 3) 1 posizione lunga relativamente ad un'azione con prezzo iniziale  $S_0^{(2)} = 100$  e prezzo dopo un anno pari a 80 nello stato 1 e 120 nello stato 2. Inoltre nello stato 1 e nello stato 2 l'azione dopo un anno non paga dividendi.

Verifichiamo che il portafoglio è un portafoglio di arbitraggio.

Scriviamo il vettore  $\vartheta$  e il vettore dei prezzi  $p$ :

$$\vartheta = \begin{pmatrix} - & 1 \\ & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Determiniamo ora il costo del portafoglio:

$$p^T \vartheta = 300 \cdot (-1) + 200 \cdot 1 + 100 \cdot 1 = 0.$$

Dunque il costo del portafoglio è nullo. Consideriamo ora la matrice dei pagamenti (dopo 1 anno). Teniamo presente che l'obbligazione dopo 1 anno indipendentemente dallo stato paga:

$$300 + 300 \cdot 0,03 \cdot 1 = 309$$

e che l'azione che rappresenta il II titolo dà luogo dopo un anno ad un dividendo pari a 1 nel I stato.

Otteniamo dunque:

$$D = \begin{pmatrix} 309 & 309 \\ 230 & 192 \\ 80 & 120 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il flusso dei pagamenti dovuti al portafoglio nello stato 1:

$$309 \cdot (-1) + 230 \cdot 1 + 80 \cdot 1 = 1 > 0$$

e il flusso dei pagamenti dovuti al portafoglio nello stato 2:

$$309 \cdot (-1) + 192 \cdot 1 + 120 \cdot 1 = 3 > 0$$

Abbiamo un portafoglio con costo nullo e per il quale sono positivi entrambi i flussi dei pagamenti; è dunque un portafoglio di arbitraggio, essendo verificata la condizione *i*).

Ci poniamo ora la seguente domanda: assegnati  $p$  e  $D$ , ci sono possibilità di arbitraggio?

La risposta ci viene dal seguente teorema, detto **Teorema fondamentale dell'arbitraggio**

**Teorema 1.1.** *Assegnati il vettore dei prezzi  $p$  e la matrice dei pagamenti  $D$ , non ci sono possibilità di arbitraggio se e solo se  $\exists \varphi \in \mathbb{R}^K$  tale che  $\varphi > 0$  e*

$$p = D \varphi.$$

Il vettore  $\varphi$  è detto **vettore dei prezzi di stato**.

Dimostrazione

Ci limitiamo a dimostrare la condizione sufficiente perché la dimostrazione della condizione necessaria è molto complessa.

Supponiamo che esista un vettore  $\varphi > 0$  ( $\varphi \in \mathbb{R}^K$ ) tale che

$$p = D \varphi.$$

Vogliamo dimostrare che non ci sono possibilità di arbitraggio.

Ragioniamo per assurdo: supponiamo che esista un portafoglio di arbitraggio  $\vartheta$ .

D'altra parte per l'ipotesi da cui siamo partiti, si ha

$$p^T \vartheta = (D \varphi)^T \vartheta = \varphi^T D^T \vartheta,$$

ossia ù

$$p^T \vartheta = \varphi^T (D^T \vartheta). \quad (1.10.1)$$

Ma abbiamo supposto che  $\vartheta$  sia un portafoglio di arbitraggio per cui è soddisfatta la condizione *i*) o la condizione *ii*).

Supponiamo dapprima verificata la condizione *i*) per cui si ha:

$$p^T \vartheta \leq 0 \quad \text{e} \quad D^T \vartheta > 0.$$

Poiché per ipotesi  $\varphi > 0$ , deduciamo:

$$\varphi^T (D^T \vartheta) > 0.$$

Ma allora, tenendo presente la (3.2), ricaviamo che dobbiamo avere simultaneamente:

$$p^T \vartheta \leq 0 \quad \text{e} \quad p^T \vartheta > 0$$

che è un assurdo.

Supponiamo ora verificata la condizione *ii*):

$$p^T \vartheta < 0 \quad \text{e} \quad D^T \vartheta \geq 0.$$

Poiché  $\varphi > 0$ , si ha

$$\varphi^T (D^T \vartheta) \geq 0.$$

Allora si ottiene dalla (3.2) che si deve avere simultaneamente:

$$p^T \vartheta < 0 \quad \text{e} \quad p^T \vartheta \geq 0$$

che è ancora un assurdo.

Dunque la condizione sufficiente del teorema è dimostrata.

### **Esempio 1.19.**

Supponiamo di avere tre titoli ( $N = 3$ ) e due stati possibili ( $K = 2$ ).

I titoli siano i seguenti:

- 1) I titolo = una obbligazione priva di rischio con valore iniziale  $B_0 = 300$  e tasso di interesse annuo  $r = 3\%$ ;

- 2) II titolo = un'azione priva di dividendi con prezzo iniziale  $S_0^{(1)} = 200$  e prezzo dopo un anno pari a 229 nello stato 1 e 189 nello stato 2;
- 3) III titolo = un'azione priva di dividendi con prezzo iniziale  $S_0^{(2)} = 100$  e prezzo dopo un anno pari a 80 nello stato 1 e 120 nello stato 2.

Ci chiediamo se ci sono possibilità di arbitraggio.

Per rispondere a questa domanda applicheremo il teorema fondamentale dell'arbitraggio.

Scriviamo dapprima il vettore dei prezzi e la matrice dei pagamenti:

$$p = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 309 & 309 \\ 229 & 189 \\ 80 & 120 \end{pmatrix}.$$

In base al teorema fondamentale dell'arbitraggio, abbiamo che se esiste un vettore  $\varphi > 0$  ( $\varphi \in \mathbb{R}^2$ ) tale che

$$p = D \varphi,$$

non ci sono possibilità di arbitraggio.

Vediamo allora se  $\exists \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$  con  $\varphi_1, \varphi_2 > 0$  tale che

$$\begin{aligned} 309 \varphi_1 + 309 \varphi_2 &= 300 \\ 229 \varphi_1 + 189 \varphi_2 &= 200 \\ 80 \varphi_1 + 120 \varphi_2 &= 100. \end{aligned}$$

Il sistema scritto sopra è un sistema algebrico lineare di tre equazioni in 2 incognite, ma notiamo che la II equazione si ottiene sottraendo membro a membro dalla I equazione la III. Dunque il sistema è equivalente a quello costituito dalla I e dalla III equazione:

$$\begin{aligned} 309 \varphi_1 + 309 \varphi_2 &= 300 \\ 80 \varphi_1 + 120 \varphi_2 &= 100, \end{aligned}$$

che, con opportune semplificazioni, si può scrivere nella forma

$$\begin{aligned} 1,03 \varphi_1 + 1,03 \varphi_2 &= 1 \\ 4 \varphi_1 + 6 \varphi_2 &= 5. \end{aligned}$$

Tale sistema è di Cramer poiché, come si può verificare facilmente, il determinante della matrice dei coefficienti delle incognite è non nullo. Perciò ammette una e

una sola soluzione che possiamo calcolare con la regola di Cramer. Precisamente abbiamo:

$$\varphi_1 \approx 0,41 > 0 \quad \varphi_2 \approx 0,56 > 0.$$

Dunque per il teorema fondamentale dell'arbitraggio non ci sono possibilità di arbitraggio.

### Esempio 1.20.

Come negli esempi precedenti, supponiamo di avere tre titoli ( $N = 3$ ) e due stati del mondo ( $K = 2$ ).

I tre titoli siano i seguenti:

- 1) I titolo = un'obbligazione priva di rischio con valore iniziale  $B_0 = 300$  e tasso di interesse annuo  $r = 3\%$ ;
- 2) II titolo = un'azione priva di dividendi con prezzo iniziale  $S_0^{(1)} = 200$  e prezzo dopo un anno pari a 230 nello stato 1 e 190 nello stato 2;
- 3) III titolo = un'azione priva di dividendi con prezzo iniziale  $S_0^{(2)} = 100$  e prezzo dopo un anno pari a 80 nello stato 1 e 120 nello stato 2.

Ci proponiamo di stabilire se ci sono possibilità di arbitraggio e, in caso di risposta affermativa, di comporre un portafoglio di arbitraggio.

Scriviamo il vettore dei prezzi e la matrice dei pagamenti:

$$p = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 309 & 309 \\ 230 & 190 \\ 80 & 120 \end{pmatrix}.$$

Perché ci sia possibilità di arbitraggio dobbiamo provare che non esiste alcun vettore  $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$  tale che  $p = D\varphi$  e con entrambe le componenti positive.

Consideriamo perciò il sistema

$$\begin{aligned} 309\varphi_1 + 309\varphi_2 &= 300 \\ 230\varphi_1 + 190\varphi_2 &= 200 \\ 80\varphi_1 + 120\varphi_2 &= 100. \end{aligned}$$

Il sistema scritto sopra è un sistema lineare di tre equazioni in 2 incognite. Perché ammetta soluzione è necessario e sufficiente che la matrice incompleta (ossia la matrice dei coefficienti delle incognite) e la matrice completa (ossia la matrice dei coefficienti delle incognite e del termine noto) abbiano lo stesso rango. Ma, come si verifica facilmente, la matrice incompleta ha rango 2 e la matrice completa 3.

Dunque il sistema non ammette soluzione e c'è possibilità di arbitraggio. Vediamo di trovare un portafoglio di arbitraggio. Possiamo seguire diverse strade; vediamone una.

Cerchiamo un portafoglio

$$\vartheta = \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{pmatrix}$$

tale che abbia costo nullo e per il quale i flussi dei pagamenti dopo un anno siano entrambi positivi.

Un portafoglio di tale tipo è di arbitraggio poiché soddisfa alla condizione  $i$ ) della definizione di portafoglio di arbitraggio.

Ci proponiamo perciò di trovare  $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$  tali che

$$300 \vartheta_1 + 200 \vartheta_2 + 100 \vartheta_3 = 0, \quad (1.10.2)$$

$$309 \vartheta_1 + 230 \vartheta_2 + 80 \vartheta_3 > 0, \quad (1.10.3)$$

$$309 \vartheta_1 + 190 \vartheta_2 + 120 \vartheta_3 > 0. \quad (1.10.4)$$

Dalla (1.10.2) deduciamo

$$\vartheta_3 = -3 \vartheta_1 - 2 \vartheta_2.$$

Sostituendo nelle (1.10.3) e (1.10.4) la relazione precedente, otteniamo

$$\begin{aligned} 69 \vartheta_1 + 70 \vartheta_2 &> 0, \\ 51 \vartheta_1 + 50 \vartheta_2 &< 0 \end{aligned} \quad (1.10.5)$$

da cui segue

$$-\frac{70}{69} \vartheta_2 < \vartheta_1 < -\frac{50}{51} \vartheta_2. \quad (1.10.6)$$

Osserviamo che, essendo  $-\frac{70}{69} \approx -1,014495 < -\frac{50}{51} \approx -0,980392$ , perchè sia soddisfatta la disuguaglianza precedente, necessariamente  $\vartheta_2$  deve essere un numero positivo e  $\vartheta_1$  un numero negativo.

Se scegliamo:

$$\vartheta_1 = -1, \quad \vartheta_2 = 1,$$

è facile verificare che la (1.10.6) è soddisfatta e dalla (1.10.2) otteniamo  $\vartheta_3 = 1$ . Perciò un esempio di portafoglio di arbitraggio è

$$\vartheta = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vediamo ora di applicare il teorema fondamentale dell'arbitraggio facendo intervenire tra i titoli del portafoglio anche delle opzioni.

Consideriamo un'opzione call europea con sottostante un'azione avente prezzo  $S$  alla scadenza dell'opzione stessa. Se  $S > X$  con  $X$  prezzo di esercizio, il possessore esercita l'opzione e riceve  $S - X$ , se invece  $S \leq X$ , il possessore non esercita la call e riceve 0. Quindi alla scadenza il pagamento ricevuto dal detentore di una call è  $= \max\{S - X, 0\}$ .

Se l'opzione è una put europea e alla scadenza l'azione sottostante ha prezzo  $S < X$ , il detentore esercita la put, cioè vende l'azione al prezzo  $X$  ricevendo  $X - S$ . Se invece  $S \geq X$ , il detentore non esercita l'opzione e perciò riceve 0. Quindi alla scadenza il pagamento ricevuto dal detentore di una put è dato da  $\max\{X - S, 0\}$ .

Quanto detto sopra sussiste anche per le opzioni americane, tenendo presente che il detentore può esercitare l'opzione in qualunque momento entro la data di scadenza.

Vediamo un esempio di applicazione del teorema fondamentale dell'arbitraggio ad un portafoglio contenente un'opzione.

### Esempio 1.21.

Si abbiano 3 titoli ( $N = 3$ ) e due stati possibili ( $K = 2$ ).

I titoli siano i seguenti:

- 1) 1 obbligazione priva di rischio con valore iniziale  $B_0 = 1$  e tasso d'interesse annuo del 10%;
- 2) 1 azione, priva di dividendi, con prezzo iniziale  $S_0 = 200$  e con prezzo al tempo  $T = 1$  anno pari a 250 nello stato 1 e 150 nello stato 2;
- 3) 1 call europea con titolo sottostante l'azione, con prezzo di esercizio  $X = 190$ , data di scadenza 1 anno e con prezzo iniziale, cioè il premio da pagare, pari a  $c_0 = 30$ .

Ci chiediamo se ci sono possibilità di arbitraggio.

Scriviamo il vettore dei prezzi e la matrice dei pagamenti:

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 200 \\ 30 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1,1 & 1,1 \\ 250 & 150 \\ 60 & 0 \end{pmatrix}.$$

dove nella III riga della matrice dei pagamenti, corrispondente alla call, abbiamo tenuto presente che nello stato 1 l'azione ha prezzo  $S = 250 > X = 190$ ; dunque la call viene esercitata e dà il pagamento  $250 - 190 = 60$ . Nello stato 2

si ha  $S = 150 < X = 190$ ; dunque la call non viene esercitata e dà pagamento = 0.

Vediamo se esiste un vettore  $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$  tale che  $p = D\varphi$  e con entrambe le componenti positive.

Scriviamo il sistema corrispondente:

$$\begin{aligned} 1,1\varphi_1 + 1,1\varphi_2 &= 1 \\ 250\varphi_1 + 150\varphi_2 &= 200 \\ 60\varphi_1 &= 30. \end{aligned}$$

Dalla III equazione deduciamo

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}$$

e sostituendo nella II equazione otteniamo:

$$125 + 150\varphi_2 = 200,$$

da cui

$$\varphi_2 = \frac{75}{150} = \frac{1}{2}.$$

Ma se nella I equazione poniamo  $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{1}{2}$ , questa non è soddisfatta.

Dunque ci sono effettivamente delle possibilità di arbitraggio.

Vediamo di comporre un portafoglio di arbitraggio.

Procedendo come nell'esempio precedente, cerchiamo un portafoglio

$$\vartheta = \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{pmatrix}$$

tale che si abbia

$$\vartheta_1 + 200\vartheta_2 + 30\vartheta_3 = 0, \quad (1.10.7)$$

$$1,1\vartheta_1 + 250\vartheta_2 + 60\vartheta_3 > 0, \quad (1.10.8)$$

$$1,1\vartheta_1 + 150\vartheta_2 > 0. \quad (1.10.9)$$

La (1.10.7) fornisce

$$\vartheta_1 = -200\vartheta_2 - 30\vartheta_3.$$

Grazie a tale relazione, le (1.10.8) e (1.10.9) portano alla seguente doppia disuguaglianza

$$-\frac{27}{30}\vartheta_3 < \vartheta_2 < -\frac{33}{70}\vartheta_3. \quad (1.10.10)$$

D'altra parte,  $-\frac{27}{30} = -0,9 < -\frac{33}{70} \approx -0,47143$ , cosicch  necessariamente  $\vartheta_3$  deve essere positivo e  $\vartheta_2$  deve essere negativo. Se scegliamo:

$$\vartheta_2 = -1, \quad \vartheta_3 = 2,$$

  facile verificare che la (1.10.10)   soddisfatta e dalla (1.10.7) otteniamo  $\vartheta_1 = 140$ .

Perci  un esempio di portafoglio di arbitraggio   il seguente:

$$\vartheta = \begin{pmatrix} 140 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che, poich  il prezzo iniziale della call  $c_0 = 30$  consente di comporre un portafoglio di arbitraggio, il suo prezzo sul mercato aumenter  al trascorrere del tempo perch  ci sar  una forte richiesta da parte degli arbitraggisti.

Possiamo allora chiederci come si deve fissare il prezzo iniziale  $c_0$  della call in modo tale che non ci siano possibilit  di arbitraggio.

Usiamo ancora il teorema fondamentale dell'arbitraggio cercando un valore di  $c_0$  in corrispondenza del quale esista un vettore dei prezzi di stato  $\varphi > 0$  tale che  $p = D\varphi$ .

Dovremo allora determinare  $c_0$  in modo tale che si abbia:

$$\begin{aligned} 1,1\varphi_1 + 1,1\varphi_2 &= 1 \\ 250\varphi_1 + 150\varphi_2 &= 200 \\ 60\varphi_1 &= c_0. \end{aligned}$$

Se consideriamo il sistema formato dalle prime due equazioni si vede facilmente che   di Cramer e quindi ammette una ed una sola soluzione. Con la regola di Cramer otteniamo:

$$\varphi_1 \approx 0,6363 > 0, \quad \varphi_2 \approx 0,2727 > 0.$$

Sostituendo nell'ultima equazione abbiamo

$$c_0 \approx 38,178.$$

Dunque perch  non ci sia possibilit  di arbitraggio deve essere

$$c_0 \approx 38,178.$$

Se il prezzo della call fissato inizialmente   30, come detto prima, il suo prezzo aumenta fino ad arrivare al valore di equilibrio  $\approx 38,178$  in corrispondenza del quale gli arbitraggisti non sono pi  interessati all'acquisto dell'opzione per cui il suo prezzo alla fine si stabilizza sul valore  $\approx 38,178$ .

# Capitolo 2

## Alcune proprietà matematiche delle opzioni ed il loro utilizzo

### 2.1 Introduzione.

Lo scopo di questo capitolo è di stabilire alcune proprietà matematiche ottenute da R. C. Merton nel 1973 relative alle opzioni aventi come sottostante un'azione.

A tal fine assumiamo che siano verificate le seguenti ipotesi:

- il mercato è perfettamente competitivo;
- c'è assenza di possibilità di arbitraggio;
- non ci sono costi di transazione;
- sul mercato si può acquistare e/o vendere in quantità arbitrarie ed infinitamente divisibili;
- i tassi d'interesse attivi e passivi sono uguali.

Sono molteplici i fattori che influenzano il prezzo di un'opzione scritta su un'azione, ma noi, seguendo Merton, terremo per il momento conto dei tre seguenti:

- 1) il prezzo corrente dell'azione;
- 2) la vita residua, cioè il tempo che manca alla data di scadenza;
- 3) il prezzo di esercizio.

In realtà vi sarebbero ulteriori fattori da prendere in considerazione, come la volatilità del prezzo dell'azione e il tasso d'interesse privo di rischio di cui parleremo più avanti, oltre ai dividendi attesi durante la vita dell'opzione, cui faremo un breve cenno in questo capitolo.

## 2.2 Proprietà delle call europee e americane.

Nel seguito utilizzeremo le seguenti notazioni:  
 $S$  è il prezzo dell'azione sottostante l'opzione;

$X$  è il prezzo di esercizio dell'opzione;

$\tau$  è la vita residua, che al tempo  $t$  è uguale a  $T - t$  con  $T$  data di esercizio;

$c(S, \tau, X)$  è il valore (o prezzo) di una call europea;

$C(S, \tau, X)$  è il valore (o prezzo) di una call americana.

Ovviamente quando  $\tau = 0$  si deve avere:

$$c(S, 0, X) = C(S, 0, X) = \max \{S - X, 0\}.$$

**Proposizione 2.1.** *Il prezzo di una call europea è non negativo.*

### Dimostrazione

Sia  $c$  il prezzo di una call europea e supponiamo per assurdo  $c < 0$ . Consideriamo il portafoglio che si ottiene comprando la call: il costo del portafoglio è negativo, ma il pagamento assicurato dall'opzione alla scadenza è  $\max \{S - X, 0\} \geq 0$ . Allora abbiamo costruito un portafoglio di arbitraggio essendo soddisfatta la condizione *ii*) della definizione di portafoglio di arbitraggio. Dunque abbiamo ottenuto un risultato contrario all'ipotesi che avevamo inizialmente assunto e ci troviamo di fronte a un assurdo. Perciò

$$c \geq 0.$$

**Osservazione 2.1.** La stessa proposizione vale anche per una call americana.

**Proposizione 2.2.** *Data una call americana, si ha:*

$$C(S, \tau, X) \geq \max \{S - X, 0\},$$

*ossia una call americana vale almeno quanto il suo valore di esercizio.*

### Dimostrazione

Se si tiene presente l'osservazione 1, si ha  $C \geq 0$ .

Perciò ci resta da provare che  $C \geq S - X$ . Ragioniamo ancora per assurdo e supponiamo  $C < S - X$ . Notiamo che da tale ipotesi segue  $S - X > 0$ .

Comprando la call ed esercitandola subito si ha un costo negativo:  $C - (S - X) < 0$  e nei tempi futuri, in tutti gli stati, il valore del portafoglio è 0, poichè sul portafoglio non c'è più niente per cui il pagamento è 0.

Contro l'ipotesi si è costruito un portafoglio di arbitraggio.

**Proposizione 2.3.** *Date una call americana e una europea sullo stesso titolo, con uguale prezzo di esercizio e uguale vita residua, la call americana vale almeno quanto quella europea, ossia*

$$C(S, \tau, X) \geq c(S, \tau, X).$$

#### Dimostrazione

Supponiamo per assurdo  $C < c$ . Mostriamo che anche in questo caso è possibile comporre un portafoglio di arbitraggio. A tal fine compriamo la call americana e per quella europea assumiamo una posizione corta sul mercato, ossia la vendiamo. Il costo sostenuto per comporre il portafoglio è  $C - c < 0$  e dunque negativo.

Poiché siamo noi ad aver comprato la call americana, siamo noi a scegliere quando esercitarla e noi scegliamo di non esercitarla prima della data di scadenza  $T$ . Esaminiamo alla scadenza la situazione nella tabella dei pagamenti rappresentata sotto ed indichiamo per brevità semplicemente con  $S$  il valore dell'azione al tempo  $T$ .

	$S \leq X$	$S > X$
pagamento call americana	0	$S - X$
pagamento call europea	0	$-(S - X)$
pagamento totale	0	0

Se alla scadenza si ha  $S \leq X$ , noi che deteniamo la call americana ovviamente non la esercitiamo, ma anche il detentore di quella europea non la esercita e quindi il pagamento che riceviamo è 0 per entrambe le call.

Se alla scadenza si ha  $S > X$ , esercitiamo la call americana per cui otteniamo un pagamento pari a  $S - X$ . Anche l'acquirente della call europea la esercita ed ottiene il pagamento  $S - X$ , per cui noi che deteniamo il portafoglio abbiamo una perdita di uguale entità.

Vediamo comunque dalla tabella dei pagamenti che il nostro portafoglio è un portafoglio di arbitraggio poiché il costo è negativo mentre il pagamento è nullo in entrambi gli stati possibili. Perciò siamo ancora di fronte ad un assurdo e la proprietà è dimostrata.

**Proposizione 2.4.** *Data una call europea avente come sottostante un'azione di prezzo  $S$ , si ha*

$$c \leq S.$$

Dimostrazione

Per assurdo, sia  $c > S$ .

Allora si potrebbe comporre un portafoglio comprando l'azione e assumendo una posizione corta relativamente alla call. Il costo iniziale sostenuto è  $S - c < 0$ . Alla scadenza della call si possono avere due casi, come si vede dalla tabella dei pagamenti:

	$S \leq X$	$S > X$
pagamento azione	$S$	$S$
pagamento call	$0$	$-(S - X)$
pagamento totale	$S \geq 0$	$X \geq 0$

Il pagamento dovuto al portafoglio alla scadenza è non negativo e perciò abbiamo ancora un portafoglio di arbitraggio contro l'ipotesi.

**Osservazione 2.2.** La proposizione 2.4 sussiste anche per una call americana. Inoltre, come si vede facilmente, dalle proposizioni 2.1 e 2.4 segue

$$c(0, \tau, X) = C(0, \tau, X) = 0.$$

**Proposizione 2.5.** *Date due call americane sulla stessa azione e con il medesimo prezzo di esercizio, si ha:*

$$C(S, \tau_2, X) \geq C(S, \tau_1, X) \quad \text{se } \tau_2 > \tau_1.$$

Dimostrazione

Supponiamo

$$C(S, \tau_2, X) < C(S, \tau_1, X).$$

Se compriamo la call con vita residua  $\tau_2$  e assumiamo una posizione corta relativamente all'altra, il costo iniziale del portafoglio sarà:

$$C(S, \tau_2, X) - C(S, \tau_1, X) < 0.$$

La call con vita residua minore sia esercitata al tempo  $t$ , antecedente o uguale alla data di scadenza oppure non venga esercitata neppure alla data di scadenza; ciò comporta per il portafoglio un pagamento dato da  $-\max\{S(t) - X, 0\}$ . Al tempo  $t$  il valore della call con vita residua maggiore è  $C(S(t), T_2 - t, X)$ , avendo

indicato con  $T_2$  la relativa data di scadenza.

Consideriamo

$$C(S(t), T_2 - t, X) - \max\{S(t) - X, 0\}.$$

Se tale valore è positivo, vendendo la call con vita residua maggiore si realizza un profitto positivo. Se tale valore è minore o uguale a zero, si esercita l'opzione allo stesso tempo  $t$  e si ricaverà

$$\max\{S(t) - X, 0\} - \max\{S(t) - X, 0\} = 0.$$

Si ha comunque un portafoglio di arbitraggio con costo negativo e profitto non negativo, contro l'ipotesi di assenza di possibilità di arbitraggio.

**Osservazione 2.3.** Si noti che l'enunciato della proposizione 2.5 è conforme al fatto che l'opzione americana con maggiore vita residua consente molte più possibilità di esercizio rispetto a quella con vita residua minore.

Si potrebbe dimostrare, ragionando per assurdo, la seguente proposizione

**Proposizione 2.6.** *Date due call europee sulla stessa azione e con la medesima vita residua, si ha:*

$$c(S, \tau, X_2) \leq c(S, \tau, X_1) \quad \text{se } X_2 > X_1.$$

Tale risultato è conforme al fatto che al crescere di  $X$  diminuisce il pagamento che ci dà la call e quindi la call vale di meno.

Al fine di ottenere un'ulteriore proprietà, consideriamo un'obbligazione priva di rischio che paga una unità di conto alla data di scadenza  $T$  e indichiamo con  $B(T - t)$  il prezzo dell'obbligazione al tempo  $t \leq T$ . Sia poi data una call europea con sottostante un'azione con data di scadenza  $T$  e vita residua  $T - t$ . Usando la notazione  $T - t = \tau$  usata per la call anche per l'obbligazione, abbiamo  $B(T - t) = B(\tau)$  e poiché  $\tau = 0$  se  $t = T$ , abbiamo anche  $B(0) = 1$ . Perciò  $B(\tau)$  viene a rappresentare il prezzo di un'obbligazione priva di rischio che paga una unità di conto dopo un tempo pari a  $\tau$ .

Dimostriamo ora la seguente

**Proposizione 2.7.** *In assenza di dividendi*

$$c(S, \tau, X) \geq \max\{S - X B(\tau), 0\}.$$

Dimostrazione

Poiché sappiamo che  $c(S, \tau, X) \geq 0$ , è sufficiente dimostrare:

$$c(S, \tau, X) \geq S - X B(\tau).$$

Ragionando per assurdo supponiamo  $c(S, \tau, X) < S - X B(\tau)$ .

Vendendo l'azione, comprando la call e collocando una somma pari a  $X B(\tau)$  in obbligazioni prive di rischio, componiamo un portafoglio con costo iniziale:

$$c(S, \tau, X) - S + X B(\tau)$$

che risulta negativo per l'ipotesi fatta.

	$S \leq X$	$S > X$
pagamento azione	$-S$	$-S$
pagamento call	0	$S - X$
pagamento obbligazioni	$X$	$X$
pagamento totale	$X - S \geq 0$	0

Esaminiamo la tabella dei pagamenti alla scadenza della call, ossia trascorso il tempo  $\tau$ , tenendo presente le posizioni del detentore del portafoglio relativamente ai tre titoli e i relativi pagamenti. Ovviamente, poiché le obbligazioni sono prive di rischio e  $B(0) = 1$ , il pagamento che queste danno alla scadenza è sempre uguale a  $X$ . Concludiamo che in ciascuno dei due stati possibili il pagamento ricevuto dal portafoglio è  $\geq 0$  e dunque abbiamo composto un portafoglio di arbitraggio contraddicendo l'ipotesi.

**Osservazione 2.4.** Poiché per la proposizione 2.3  $C(S, \tau, X) \geq c(S, \tau, X)$ , la proposizione 2.7 vale anche per le call americane.

**Osservazione 2.5.** La proposizione 2.7 vale in assenza di dividendi. Se alla scadenza della call sono pagati dividendi pari a  $D$ , ragionando come per la proposizione 2.7, con la sostituzione di  $X$  con  $X + D$  nel coefficiente di  $B(\tau)$ , si può dimostrare che

$$c(S, \tau, X) \geq \max \{S - (X + D)B(\tau), 0\}.$$

**Proposizione 2.8.** *In assenza di dividendi una call americana non verrà mai esercitata prima della scadenza e quindi ha lo stesso valore di una corrispondente call europea cioè*

$$C(S, \tau, X) = c(S, \tau, X).$$

#### Dimostrazione

Ancora una volta ragioniamo per assurdo, supponendo che la call americana venga esercitata a tempo residuo  $\tau > 0$  (la scadenza si ha per  $\tau = 0$ ). Ovviamente se la call viene esercitata, abbiamo  $S > X$  e il detentore riceve  $S - X$ .

Per la proposizione 2.7 e l'osservazione 2.4 si ha

$$C(S, \tau, X) \geq \max \{S - X B(\tau), 0\}. \quad (2.2.1)$$

Se  $\tau > 0$  avremo  $B(\tau) < 1$ , poiché  $B(\tau)$  è il valore scontato al tempo  $t$  di un capitale pari ad una unità di conto disponibile al tempo  $T$ . Allora

$$S - XB(\tau) > S - X > 0.$$

Quindi dalla (2.2.1) segue

$$C(S, \tau, X) > S - X. \quad (2.2.2)$$

Ma risulta irragionevole aver esercitato la call poichè si è ricevuto  $S - X$  che per la (2.2.2) risulta inferiore a quanto si sarebbe ottenuto vendendola.

Il risultato della proposizione 2.8 è ottenuto sotto l'ipotesi che le opzioni siano scritte su azioni che non pagano dividendi. Nella realtà la maggior parte di chi emette azioni paga dividendi agli azionisti e i possessori di opzioni devono tener conto che allo stacco dei dividendi il prezzo di mercato delle azioni diminuisce e quindi diminuisce anche il valore delle opzioni stesse, il cui possesso non dà diritto al dividendo. Dunque il pagamento di un dividendo durante la vita dell'opzione può incentivare il possessore di una call americana a non attendere la scadenza per evitare la riduzione del prezzo dell'opzione allo stacco del dividendo. Pertanto, quando ci si attende che vengano distribuiti dividendi, non è possibile affermare che una call americana non verrà mai esercitata anticipatamente.

Le proposizioni seguenti mostrano la relazione che intercorre tra il prezzo di una call e il prezzo di esercizio e quella tra il prezzo di una call e il prezzo dell'azione sottostante.

**Proposizione 2.9.**  $c(S, \tau, X)$  è una funzione convessa del prezzo di esercizio  $X$ .

#### Dimostrazione

Ricordiamo prima di tutto la definizione di funzione convessa:

*Data la funzione reale  $f = f(x)$  definita sull'intervallo  $(a, b)$ , diciamo che è convessa se, comunque presi  $x_1, x_2 \in (a, b)$  con  $x_1 \neq x_2$ , si ha*

$$\forall \lambda \in [0, 1] \quad f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2),$$

*ossia se ogni punto del segmento di estremi  $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$  non sta al di sotto del grafico della funzione.*

E' utile ora considerare la funzione definita in  $\mathbb{R}^+$  nel modo seguente:

$$X \mapsto \max \{S - X, 0\}$$

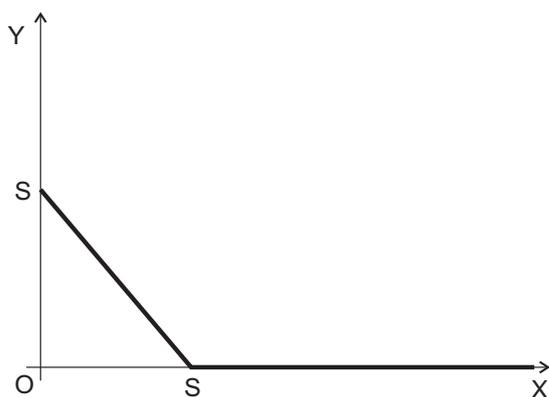


Figura 2.1: Grafico della funzione  $X \mapsto \max \{S - X, 0\}$

dove supponiamo  $S (\geq 0)$  fissato in  $\mathbb{R}^+$ .

Il suo grafico è rappresentato nella Figura 2.1. La funzione presa in esame è chiaramente convessa.

Allora, comunque presi  $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^+$  con  $X_1 \neq X_2$ , per definizione di funzione convessa si ha  $\forall \lambda \in [0, 1]$

$$\max \{S - [\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2], 0\} \leq \lambda \max \{S - X_1, 0\} + (1 - \lambda) \max \{S - X_2, 0\}. \quad (2.2.3)$$

La proposizione risulta dimostrata se proviamo che, comunque presi  $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^+$  con  $X_1 \neq X_2$ ,  $\forall \lambda \in [0, 1]$  risulta

$$c(S, \tau, \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2) \leq \lambda c(S, \tau, X_1) + (1 - \lambda) c(S, \tau, X_2). \quad (2.2.4)$$

Ragioniamo per assurdo supponendo che in corrispondenza di una data coppia  $(X_1, X_2)$  esista un  $\lambda \in [0, 1]$  tale che:

$$c(S, \tau, \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2) > \lambda c(S, \tau, X_1) + (1 - \lambda) c(S, \tau, X_2).$$

Allora potremmo costruire un portafoglio di arbitraggio nel seguente modo: compriamo  $\lambda$  opzioni call sull'azione di prezzo  $S$  con vita residua  $\tau$  e prezzo di esercizio  $X_1$ ,  $(1 - \lambda)$  opzioni call sulla medesima azione con la stessa vita residua e con prezzo di esercizio  $X_2$  ed assumiamo posizione corta relativamente ad una call sempre sulla stessa azione con la stessa vita residua ma con prezzo di esercizio  $X_3 = \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2$ .

Il costo iniziale del portafoglio è

$$\lambda c(S, \tau, X_1) + (1 - \lambda) c(S, \tau, X_2) - c(S, \tau, X_3)$$

che risulta negativo per l'ipotesi fatta.

D'altra parte, alla scadenza il pagamento dovuto al portafoglio è dato da

$$\lambda \max \{S - X_1, 0\} + (1 - \lambda) \max \{S - X_2, 0\} - \max \{S - X_3, 0\}$$

che risulta non negativo per la (2.2.3).

Ma per ipotesi non c'è possibilità di arbitraggio e dunque, abbiamo ancora una volta ottenuto un assurdo per cui, comunque presi  $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^+$  con  $X_1 \neq X_2$ ,  $\forall \lambda \in [0, 1]$  deve valere la (2.2.4).

Possiamo notare che, essendo  $\lambda, 1 - \lambda \in [0, 1]$ , nella dimostrazione di questa proposizione abbiamo utilizzato la quarta delle ipotesi che abbiamo fatto inizialmente (vedi pag.61) relativamente alla possibilità di acquistare o vendere titoli anche in quantità infinitamente divisibili.

**Osservazione 2.6.** La proposizione 2.9 vale anche per call americane.

**Proposizione 2.10.** *Se  $c(S, \tau, X)$  è una funzione omogenea di grado 1 in  $S$  e in  $X$ , allora è una funzione convessa in  $S$ .*

Dimostrazione

Ricordiamo che  $c(S, \tau, X)$  è una funzione omogenea di grado 1 in  $S$  e in  $X$  se

$$\forall k \in \mathbb{R}^+ \quad c(kS, \tau, kX) = kc(S, \tau, X). \quad (2.2.5)$$

Dobbiamo dimostrare che, nell'ipotesi che valga la (2.2.5), presi  $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^+$  con  $S_1 \neq S_2$ , si ha

$$\forall \lambda \in [0, 1] \quad c(\lambda S_1 + (1 - \lambda)S_2, \tau, X) \leq \lambda c(S_1, \tau, X) + (1 - \lambda) c(S_2, \tau, X).$$

Supponiamo dapprima  $S_1, S_2 \neq 0$  e poniamo

$$S_3 = \lambda S_1 + (1 - \lambda) S_2 \quad X_1 = \frac{X}{S_1} \quad X_2 = \frac{X}{S_2} \quad \gamma = \lambda \frac{S_1}{S_3} \geq 0.$$

In effetti  $\gamma \leq 1$  poichè

$$\gamma = \frac{\lambda S_1}{S_3} = \frac{\lambda S_1}{\lambda S_1 + (1 - \lambda) S_2} \quad \text{con} \quad (1 - \lambda) S_2 \geq 0.$$

Dunque  $\gamma \in [0, 1]$ .

Per la proposizione 2.9 abbiamo:

$$c(1, \tau, \gamma X_1 + (1 - \gamma)X_2) \leq \gamma c(1, \tau, X_1) + (1 - \gamma) c(1, \tau, X_2).$$

Moltiplicando entrambi i membri della disuguaglianza scritta sopra per  $S_3$  e sfruttando l'omogeneità di  $c$  deduciamo:

$$c(S_3, \tau, \gamma X_1 S_3 + (1 - \gamma) X_2 S_3) \leq \lambda S_1 c(1, \tau, X_1) + (1 - \lambda) S_2 c(1, \tau, X_2) \quad (2.2.6)$$

dove abbiamo tenuto presente che

$$\gamma S_3 = \lambda S_1, \quad (1 - \gamma) S_3 = \left(1 - \lambda \frac{S_1}{S_3}\right) S_3 = S_3 - \lambda S_1 = (1 - \lambda) S_2.$$

Ma, per le posizioni fatte in precedenza,

$$\gamma X_1 S_3 = \lambda S_1 \frac{X}{S_1} = \lambda X, \quad (1 - \gamma) X_2 S_3 = (1 - \lambda) S_2 \frac{X}{S_2} = (1 - \lambda) X.$$

Sostituendo nella (2.2.6) e tenendo presente l'omogeneità di  $c$ , otteniamo:

$$c(S_3, \tau, \lambda X + (1 - \lambda) X) \leq \lambda c(S_1, \tau, X_1 S_1) + (1 - \lambda) c(S_2, \tau, X_2 S_2).$$

D'altra parte

$$X_1 S_1 = X \quad X_2 S_2 = X$$

per cui infine deduciamo

$$c(S_3, \tau, X) \leq \lambda c(S_1, \tau, X) + (1 - \lambda) c(S_2, \tau, X)$$

che è ciò che volevamo provare nell'ipotesi  $S_1, S_2 \neq 0$ .

Supponiamo ora  $S_1$  o  $S_2 = 0$ ; ad esempio, tanto per fissare le idee,  $S_1 = 0$  e ricordiamo che, come abbiamo visto nell'Osservazione 2.2, si ha:

$$c(0, \tau, X) = 0.$$

Allora è immediato provare che se  $S_1 = 0$ , si ha:

$$\forall \lambda \in [0, 1] \quad c(\lambda S_1 + (1 - \lambda) S_2, \tau, X) \leq \lambda c(S_1, \tau, X) + (1 - \lambda) c(S_2, \tau, X).$$

Infatti, se  $S_1 = 0$ , essendo  $c(0, \tau, X) = 0$  è sufficiente provare la seguente disuguaglianza:

$$\forall \lambda \in [0, 1] \quad c((1 - \lambda) S_2, \tau, X) \leq (1 - \lambda) c(S_2, \tau, X).$$

Se  $\lambda = 0$  o  $\lambda = 1$ , si vede immediatamente che la relazione scritta sopra è vera con il segno di uguaglianza.

Se  $0 < \lambda < 1$ , si deduce:

$$c((1 - \lambda) S_2, \tau, X) = (1 - \lambda) c\left(S_2, \tau, \frac{X}{1 - \lambda}\right) \leq (1 - \lambda) c(S_2, \tau, X)$$

dove abbiamo sfruttato l'omogeneità di  $c$  rispetto a  $S$  e a  $X$  e la proposizione 2.6.

A questo punto, tenendo presenti le proposizioni appena dimostrate e supponendo che l'azione sottostante la call non paghi dividendi, possiamo avere un'idea più precisa della dipendenza da  $S$  del valore di una call europea  $c(S, \tau, X)$ , supponendo fissati  $\tau$  e  $X$ .

Infatti:

1.  $\max \{S - X B(\tau), 0\} \leq c(S, \tau, X) \leq S$ ;
2. sotto opportune ipotesi la funzione:  $S \mapsto c(S, \tau, X)$  è convessa;
3.  $c(0, \tau, X) = 0$ .

Inoltre alla data di scadenza (cioè per  $\tau = 0$ ) si deve avere

$$c(S, 0, X) = \max \{S - X, 0\}.$$

Infine osserviamo che da 1. discende che per  $S \rightarrow +\infty$   $c(S, \tau, X) \rightarrow +\infty$ .

In Figura 2.2 è rappresentato un probabile grafico di  $c(S, \tau, X)$  in funzione di  $S$  con  $X$  e  $\tau > 0$  fissati, supponendo  $c$  soddisfacente alle ipotesi della proposizione 2.10 e derivabile rispetto a  $S$ . Si può notare che la tangente al grafico della funzione ha sempre pendenza  $< 1$ , ossia

$$0 < \frac{\partial c}{\partial S} < 1.$$

In Figura 2.3 a  $\tau$  sono attribuiti i due valori  $\tau_1$  e  $\tau_2$  con  $\tau_2 > \tau_1$ . Come si vede, più l'opzione call si avvicina alla scadenza (cioè  $\tau$  diminuisce) più il suo prezzo si avvicina al pagamento alla scadenza.

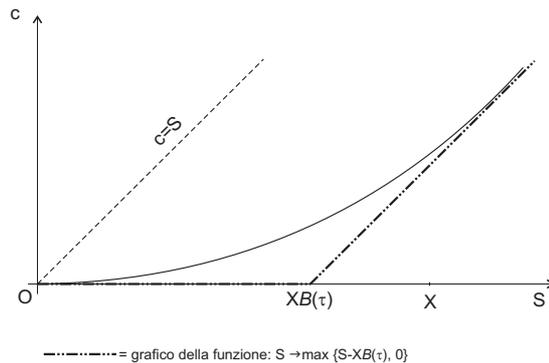


Figura 2.2: Probabile grafico di  $c(S, \tau, X)$  in funzione di  $S$

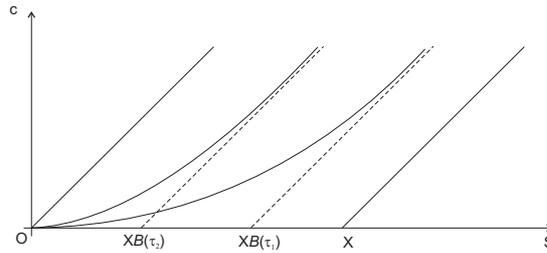


Figura 2.3: Probabili grafici di  $c$  in funzione di  $S$  con due valori di  $\tau$

Per la proposizione 2.8, in assenza di dividendi, ciò che abbiamo detto per le call europee si estende anche alle call americane.

Osserviamo comunque che in effetti non abbiamo ancora trovato un'espressione analitica vera e propria di  $c$  in funzione di  $S$ , ma ne abbiamo soltanto ottenuto delle importanti proprietà.

## 2.3 Relazione di parità put - call.

Consideriamo ora un'opzione put e utilizziamo le seguenti notazioni:

$p(S, \tau, X)$  è il valore (o prezzo) di una put europea;

$P(S, \tau, X)$  è il valore (o prezzo) di una put americana.

Alla scadenza si deve avere:

$$p(S, 0, X) = \max \{X - S, 0\}.$$

La proposizione seguente stabilisce un'importante relazione che lega le call europee e le put europee, aventi come sottostante un'azione, nota come **relazione di parità put - call**.

**Proposizione 2.11.** *Nelle ipotesi che i tassi di interesse attivi e passivi siano uguali e in assenza di dividendi si ha:*

$$p(S, \tau, X) = c(S, \tau, X) - S + X B(\tau).$$

### Dimostrazione

Dapprima dimostriamo

$$c(S, \tau, X) - p(S, \tau, X) - S + X B(\tau) \geq 0. \quad (2.3.1)$$

Ragioniamo per assurdo supponendo che si abbia:

$$c(S, \tau, X) - p(S, \tau, X) - S + X B(\tau) < 0.$$

Possiamo in tale ipotesi costruire un portafoglio di arbitraggio assumendo posizione lunga relativamente alla call, posizione corta relativamente alla put e all'azione e collocando  $X B(\tau)$  su obbligazioni prive di rischio. Il costo del portafoglio è

$$c(S, \tau, X) - p(S, \tau, X) - S + X B(\tau)$$

che risulta negativo in base all'ipotesi fatta.

Per vedere il valore del portafoglio alla scadenza, analizziamo la tabella dei pagamenti. Da questa vediamo che il valore del portafoglio è nullo con costo iniziale negativo. Il portafoglio è di arbitraggio per cui ci troviamo di fronte ad un assurdo. E' dunque vera la (2.3.1).

	$S \leq X$	$S > X$
pagamento call	0	$S - X$
pagamento put	$-(X - S)$	0
pagamento azione	$-S$	$-S$
pagamento obbligazione	$X$	$X$
pagamento totale	0	0

D'altra parte, ragionando ancora per assurdo, è facile dimostrare che si ha anche

$$c(S, \tau, X) - p(S, \tau, X) - S + X B(\tau) \leq 0. \quad (2.3.2)$$

Dalle (2.3.1) e (2.3.2) deduciamo:

$$p(S, \tau, X) + S - X B(\tau) \leq c(S, \tau, X) \leq p(S, \tau, X) + S - X B(\tau)$$

da cui

$$c(S, \tau, X) = p(S, \tau, X) + S - X B(\tau),$$

ossia la tesi.

**Osservazione 2.7.** Dalla relazione di parità put-call segue che, se si ha un'espressione esplicita per  $c(S, \tau, X)$ , si ottiene immediatamente anche l'espressione esplicita per  $p(S, \tau, X)$ .

**Osservazione 2.8.** Dalla relazione di parità put-call discendono alcune proprietà delle put europee grazie alle proprietà delle call europee. Precisamente:

1.  $c(S, \tau, X) \geq \max \{S - X B(\tau), 0\} \implies p(S, \tau, X) \geq \max \{X B(\tau) - S, 0\}$ ;
2.  $c(S, \tau, X) \leq S \implies p(S, \tau, X) \leq X B(\tau)$ ;
3. se la funzione  $S \mapsto c(S, \tau, X)$  è convessa, allora lo è anche la funzione  $S \mapsto p(S, \tau, X)$ ;
4. dai punti 1. e 2. (o dalla relazione di parità put-call tenendo presente che  $c(0, \tau, X) = 0$ ) discende:

$$p(0, \tau, X) = X B(\tau).$$

La Figura 2.4 rappresenta un probabile grafico della funzione  $S \mapsto p(S, \tau, X)$  con  $X, \tau > 0$  fissati, nell'ipotesi che valga la relazione di parità put-call e che  $c$  sia convessa e derivabile rispetto a  $S$ . E' da rilevare che per una put europea si

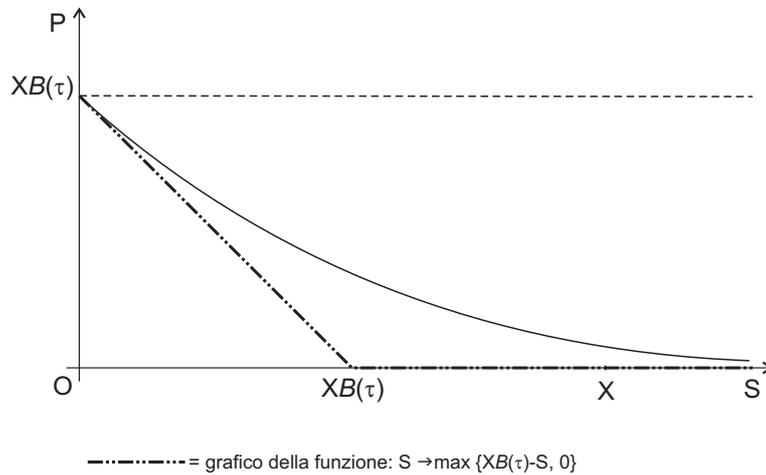


Figura 2.4: Probabile grafico di  $p(S, \tau, X)$  in funzione di  $S$

ha:

$$-1 < \frac{\partial p}{\partial S} < 0.$$

Finora abbiamo considerato solo put europee. Per quanto riguarda le put americane si potrebbe dimostrare la seguente

**Proposizione 2.12.** *Anche in assenza di dividendi, esiste una probabilità positiva che una put americana venga esercitata prima della scadenza. Dunque il valore di una put americana è strettamente maggiore del valore della corrispondente put europea, cioè*

$$P(S, \tau, X) > p(S, \tau, X).$$

Quanto asserito nella precedente proposizione mostra che c'è una differenza notevole tra una call e una put americane. La valutazione delle put americane è un compito più complesso di quella delle corrispondenti europee.

## 2.4 Utilizzo delle opzioni e loro combinazioni.

Nei paragrafi precedenti abbiamo ricavato alcune proprietà per le call e le put aventi come sottostante un'azione senza ancora avere un'espressione analitica vera e propria delle funzioni  $c(S, \tau, X)$  (o  $C(S, \tau, X)$ ) e  $p(S, \tau, X)$  (o  $P(S, \tau, X)$ ). In ogni caso è evidente che si tratta di titoli rischiosi. E' naturale a questo punto chiederci quali sono le finalità di chi utilizza le opzioni.

In primo luogo vi può essere una **finalità speculativa** che illustriamo riprendendo l'esempio alla fine del paragrafo 10 del Capitolo 1 riguardante un portafoglio avente tra i titoli un'opzione nell'ipotesi di assenza di possibilità di arbitraggio. Ricordiamo che i titoli erano 3 e gli stati possibili 2. Per dare più concretezza all'esempio indichiamo esplicitamente l'unità monetaria utilizzata che ovviamente assumiamo essere l'euro. I titoli erano i seguenti:

- 1) un'obbligazione priva di rischio con valore iniziale  $B_0 = 1$  euro e tasso d'interesse annuo del 10%;
- 2) un'azione, priva di dividendi, con prezzo iniziale  $S_0 = 200$  euro e con prezzo al tempo  $T = 1$  anno pari a 250 euro nello stato 1 e 150 euro nello stato 2;
- 3) una call europea con titolo sottostante l'azione, con prezzo di esercizio  $X = 190$  euro, data di esercizio 1 anno e con prezzo iniziale pari a  $c_0 = 38,178$  euro.

Se si possiede la somma di 38,178 euro, con questa si può acquistare la call, che alla scadenza, cioè dopo un anno, nell'eventualità che si verifichi lo stato 1, ossia quello favorevole, fornisce il pagamento di 60 euro con un guadagno netto dato da

$$60 - 38,178 = 21,822 \text{ euro.}$$

Se invece si acquistano obbligazioni prive di rischio investendo la stessa cifra di 38,178 euro dopo un anno il guadagno netto è soltanto 3,8178 euro, cioè l'interesse annuo è dunque decisamente inferiore a quanto si potrebbe ottenere con l'acquisto della call.

Se poi si comprasse direttamente l'azione, nell'eventualità che si verifichi lo stato 1, si potrebbe avere un guadagno netto di 50 euro e quindi superiore a quello che si avrebbe con l'acquisto della call, ma con un costo iniziale di 200 euro e dunque molto elevato.

Perciò, come possiamo vedere da questo semplice esempio, una finalità di coloro che compravendono opzioni è quella speculativa poiché è possibile conseguire guadagni rilevanti con un esborso modesto o comunque minore di quello necessario per l'acquisto delle azioni, ferma restando in ogni caso la componente di rischio.

Un altro aspetto delle opzioni è quello di **copertura dal rischio**.

Infatti è possibile combinare una o più opzioni con il titolo sottostante, in modo tale che o il titolo sottostante protegga le opzioni in caso di perdita o le opzioni proteggano il titolo da perdite.

Vediamone un esempio.

Supponiamo di comporre il seguente portafoglio: compriamo due call europee aventi come sottostante un'azione e assumiamo posizione corta relativamente all'azione. Se il prezzo iniziale delle call e dell'azione sono rispettivamente  $c_0$  e  $S_0$ , il costo del portafoglio è

$$2c_0 - S_0.$$

Sia  $T$  la data di scadenza delle call,  $S$  il prezzo dell'azione a tale data e  $X$  il prezzo di esercizio delle call.

Il pagamento del portafoglio alla scadenza è dunque:

$$2 \max \{S - X, 0\} - S.$$

Questo è ovviamente il pagamento lordo.

Per avere il pagamento netto dobbiamo sottrarre il costo del portafoglio:

$$2 \max \{S - X, 0\} - 2c_0 - (S - S_0).$$

Ovviamente  $2 \max \{S - X, 0\} - 2c_0$  rappresenta il pagamento netto dovuto alle call, mentre  $-(S - S_0)$  è quello dovuto all'azione.

Nella Figura 2.5 sono riportati i grafici delle tre funzioni di  $S$  che rappresentano il pagamento netto dovuto solo alle due call, quello dovuto solo all'azione e quello totale.

Per semplicità assumiamo:  $X = S_0$ .

Il primo grafico è l'unione di un segmento parallelo all'asse delle ascisse e di una semiretta avente pendenza pari a 2, il secondo è una semiretta con pendenza pari a  $-1$ , il terzo, a forma di V, è ottenuto sommando i due grafici precedenti. Notiamo che se nel nostro portafoglio detenessimo solo la posizione corta relativamente all'azione, all'aumentare di  $S$  potremmo andare incontro a perdite illimitate (la semiretta che rappresenta il pagamento netto dovuto a tale posizione corta dopo l'intersezione con l'asse delle ascisse per  $S = X$  è situata nel

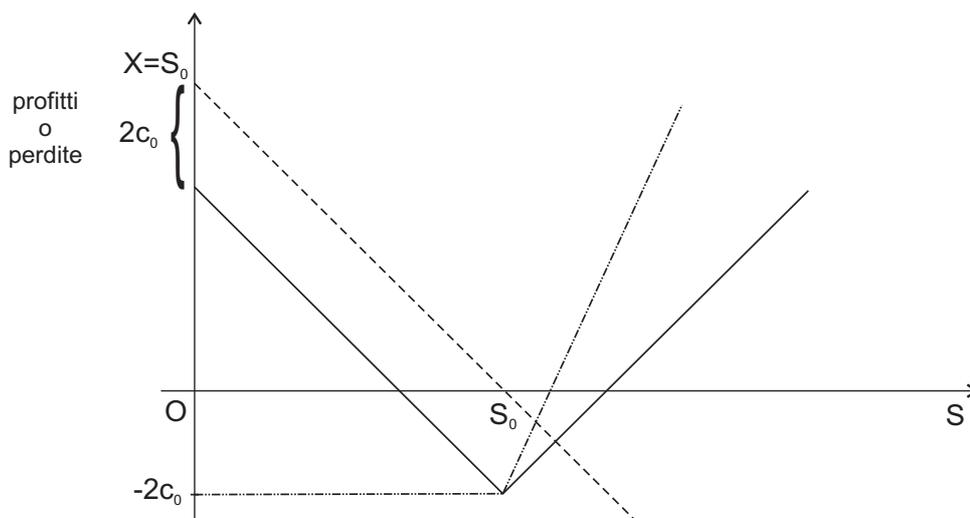


Figura 2.5: Grafici in funzione di  $S$  del pagamento netto dovuto solo alle due call, quello dovuto solo all'azione e quello totale

semipiano inferiore e quindi rappresenta una perdita). L'inserimento nel portafoglio della posizione lunga relativamente alle due call, che comporta per il guadagno totale il grafico a V, ci protegge da eventuali forti movimenti del prezzo dell'azione.

Se si assume simultaneamente una posizione di segno opposto relativamente ad una o più call e al titolo sottostante si ottiene un esempio di strategia di copertura dal rischio.

Ma in tal caso possiamo chiederci qual è il numero ottimale di call e di azioni relativamente alle quali assumere posizioni opposte per avere una protezione perfetta dal rischio.

Supponiamo di avere un portafoglio con una posizione lunga relativamente ad una call avente come sottostante un'azione e con una posizione corta relativamente all'azione stessa.

La Figura 2.6 mostra il grafico del prezzo della call in funzione del prezzo azionario. Supponiamo che il prezzo dell'azione sia tale da trovarci nel punto  $A$  della figura. Se il prezzo dell'azione presenta un incremento di  $dS$ , il nostro portafoglio, a causa della posizione corta sull'azione, subirà una variazione pari a  $-dS$  e dunque una perdita, ma contemporaneamente avrà un guadagno pari all'incremento  $dc$  che il prezzo della call ha a causa dell'aumento del prezzo dell'azione.

Tuttavia, se teniamo presente che  $\frac{\partial c}{\partial S} < 1$ , deduciamo che  $dc < dS$ . Allora il portafoglio subisce in complesso una perdita a causa dell'aumento del prezzo azionario. Dunque con una call e una sola azione non si ha copertura perfetta dal

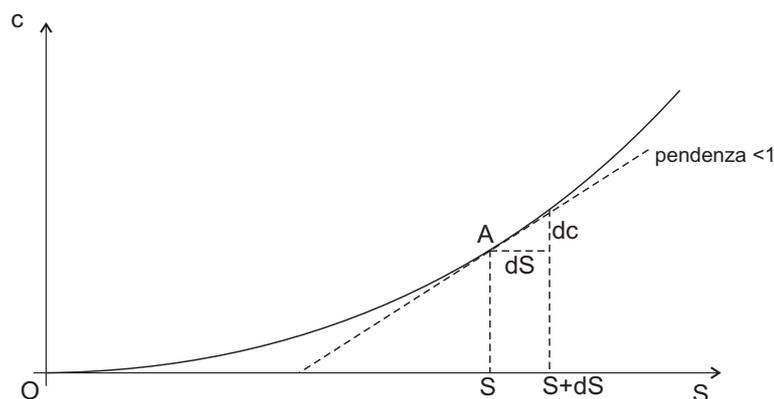


Figura 2.6: Grafico del prezzo della call in funzione del prezzo azionario.

rischio. Ma con opportuni aggiustamenti di posizioni si può eliminare la perdita del portafoglio.

Definiamo infatti la quantità denominata delta di un'opzione call:

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S} < 1.$$

Se, anziché avere una posizione corta relativamente ad un'azione, si avesse una posizione corta relativamente a  $\Delta$  azioni, allora un aumento del prezzo azionario di  $dS$  determinerebbe una perdita pari a  $\Delta dS$ , che è molto vicino a  $dc$  se l'incremento  $dS$  è molto piccolo. Di conseguenza il guadagno nella posizione in opzioni viene controbilanciato, in via approssimata, dalla perdita nella posizione opposta nell'azione.

L'approssimazione è tanto migliore quanto più piccola è la variazione.

La procedura che consiste nel controbilanciare i cambiamenti in  $c$  con una posizione di segno opposto in  $\Delta$  unità del titolo sottostante è detta **delta hedging**. Il portafoglio così ottenuto si dice **neutrale** rispetto a  $\Delta$ . Un tale portafoglio non è soggetto a movimenti imprevedibili, cioè è coperto e come tale esente da rischi.

Osserviamo che la posizione del portafoglio resta neutrale per un periodo relativamente breve perché  $\Delta$  cambia durante la vita di un'opzione. In pratica, quando si utilizza una strategia di delta hedging, il portafoglio deve essere aggiustato periodicamente. In questo caso si parla di **ribilanciamento**.

E' facile provare che si può ottenere un portafoglio coperto anche assumendo una posizione lunga relativamente ad un'azione e una posizione corta relativamente ad un numero di opzioni call con sottostante l'azione stessa pari a  $\frac{1}{\Delta}$ .

Consideriamo ora un'opzione put (europea) scritta su un'azione che non paga dividendi. Definiamo la quantità denominata **delta** di un'opzione put nel modo

seguinte:

$$\Delta = \frac{\partial p}{\partial S} < 0.$$

Poiché si tratta di un valore negativo, per avere copertura dal rischio bisogna assumere posizioni dello stesso segno relativamente alla put e all'azione sottostante.

Oltre alla strategia di copertura dal rischio, gli investitori possono attuare altri tipi di strategie utilizzando le opzioni. Infatti una delle caratteristiche delle opzioni è che possono essere combinate per creare un'ampia gamma di possibili funzioni di profitto.

**Definizione 2.1.** *Una combinazione di opzioni è una strategia operativa mediante opzioni che fa uso di call e di put sullo stesso titolo.*

Le combinazioni principali sono:

- **straddle:** può essere di due tipi : *bottom straddle* o *top straddle*. La prima consiste nel comprare una call e una put con lo stesso prezzo di esercizio  $X$  e uguale data di esercizio  $T$ . Se alla scadenza il prezzo del titolo sottostante è prossimo a  $X$ , la straddle comporta una perdita, mentre, se il prezzo del sottostante varia in modo significativo in una delle due direzioni, ne consegue un profitto. La top straddle consiste nel vendere una call e una put con lo stesso prezzo di esercizio  $X$  e uguale data di esercizio  $T$ . In tal caso, si ha una perdita se il prezzo del titolo sottostante differisce in modo significativo dal prezzo di esercizio, mentre si ha un profitto se il sottostante ha un prezzo prossimo a quello di esercizio;
- **strangle:** riguarda un'opzione call e un'opzione put con la stessa scadenza, ma con prezzi di esercizio diversi;
- **strip:** consiste nell'acquisto di una call e di due put con lo stesso prezzo e la stessa data di esercizio. Si ritiene dunque in questo caso più probabile un deprezzamento del titolo sottostante;
- **strap** : consiste nell'acquisto di due call e di una put con lo stesso prezzo e la stessa data di esercizio. Si ritiene dunque in questo caso più probabile un apprezzamento del titolo sottostante;
- **spread:** è una strategia in cui si assumono posizioni su due o più opzioni dello stesso tipo. Una spread al rialzo si ottiene comprando una call (put) con prezzo di esercizio basso e vendendo una call (put) con prezzo di esercizio alto; una spread al ribasso si ottiene comprando una call (put) con prezzo di esercizio alto e vendendo una call (put) con prezzo di esercizio basso. Si possono utilizzare anche altre tipologie di spread, ma su ciò non insistiamo.

## 2.5 Opzioni esotiche.

Le opzioni che abbiamo considerato finora sono opzioni classiche dette **opzioni vanilla o opzioni standard**, per le quali il pagamento al momento dell'esercizio è:

- $\max\{S - X, 0\}$  per le call
- $\max\{X - S, 0\}$  per le put.

Ma sul mercato sono state immesse anche numerose tipologie di opzioni differenti da quelle classiche, dette **opzioni esotiche**, che rappresentano le opzioni di seconda generazione.

Queste differiscono dalle opzioni standard essenzialmente per il tipo di pagamento. Elenchiamone rapidamente le principali:

- **opzioni composte**, ossia opzioni su opzioni. Il sottostante è a sua volta un'opzione; ci sono quindi due prezzi di esercizio e due date di esercizio, relativi all'opzione composta e all'opzione sottostante;
- **opzioni con barriera**. Ci sono diversi tipi di tali opzioni. Possono essere *down-and-in* o *up-and-in*. Diventano attive e si comportano come un'opzione europea standard solo quando il valore  $S$  del sottostante cade al di sotto (o al di sopra) di un limite inferiore (o superiore) prespecificato  $\bar{S}$ , detto **barriera**; se durante la vita dell'opzione ciò non accade, l'opzione si esaurisce ed il pagamento è un rimborso fisso. Ci sono poi le opzioni *down-and-out* e *up-and-out* che sono soggette a cancellazione. Sono identiche alle opzioni europee, con la caratteristica che vengono annullate immediatamente se il prezzo azionario cade al di sotto (o al di sopra) di un limite inferiore (o superiore) prespecificato  $\bar{S}$ , detto **barriera**; il contratto specifica anche il valore del rimborso che viene ricevuto quando viene raggiunta la barriera e può dipendere dalla data in cui ciò avviene;
- **opzioni a scelta**. Il possessore alla scadenza può scegliere se l'opzione è una call o una put. Nella data prefissata per la scelta, il valore dell'opzione è  $\max\{c, p\}$  dove  $c$  è il valore della call sottostante e  $p$  è il valore della put sottostante. In genere per queste opzioni il prezzo è elevato;
- **opzioni retrospettive o Lookback**. Sono opzioni il cui valore dipende dal prezzo minimo o massimo raggiunto dall'azione sottostante durante la vita dell'opzione. Per una call *floating* il pagamento alla scadenza è dato da  $\max\{S - S_{min}, 0\}$  e per una put *floating* da  $\max\{S_{max} - S, 0\}$ , mentre per una call *fixed* il pagamento alla scadenza è dato da  $\max\{S_{max} - X, 0\}$  e per una put *fixed* da  $\max\{X - S_{min}, 0\}$ ;

- **opzioni scritte su più attività.** Sono opzioni il cui sottostante è costituito da più attività ossia da più titoli. Questo paniere consente di diversificare il rischio dei singoli titoli componenti;
- **opzioni asiatiche.** Sono opzioni il cui pagamento dipende dalla media dei prezzi del sottostante:  $S_{medio}$ . Tale media può essere considerata come prezzo finale del sottostante o come prezzo di esercizio. Nel primo caso il pay-off è dato da

$$\max\{S_{medio} - X, 0\} \quad \text{per una call}$$

$$\max\{X - S_{medio}, 0\} \quad \text{per una put,}$$

mentre nel secondo caso è dato da

$$\max\{S - S_{medio}, 0\} \quad \text{per una call}$$

$$\max\{S_{medio} - S, 0\} \quad \text{per una put.}$$

La media  $S_{medio}$  può essere la media aritmetica o la media integrale dei valori di  $S$ ;

- **opzioni Bermuda.** Possono essere esercitate prima della scadenza, ma solo a date prefissate.



# Capitolo 3

## Richiami di teoria della probabilità

### 3.1 Spazio di probabilità.

Come abbiamo osservato nell'introduzione, per formulare modelli matematici in ambito finanziario occorre ricorrere al calcolo stocastico che è basato sulla teoria della probabilità.

Per tale motivo, scopo di questo capitolo è di richiamare alcuni concetti fondamentali di tale teoria.

Per elaborare modelli probabilistici bisogna prima di tutto fissare uno spazio di probabilità. Al fine di darne una definizione rigorosa, richiamiamo alcune definizioni.

**Definizione 3.1.** *Dato l'insieme  $\Omega \neq \emptyset$ , una famiglia  $\mathcal{A}$  di suoi sottoinsiemi è detta algebra dell'insieme  $\Omega$  se sono soddisfatte le tre condizioni seguenti:*

- 1)  $\Omega \in \mathcal{A}$
- 2)  $A \in \mathcal{A} \implies \mathcal{C}(A) \in \mathcal{A}$
- 3)  $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$ .

Si prova facilmente (vedi Appendice 2 nell'ultimo capitolo) la seguente

**Proposizione 3.1.** *Se  $\mathcal{A}$  è un'algebra, allora si ha*

- i)  $\emptyset \in \mathcal{A}$
- ii)  $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$
- iii)  $A, B \in \mathcal{A} \implies B \setminus A \in \mathcal{A}$

**Definizione 3.2.** La famiglia  $\mathcal{A}$  di sottoinsiemi di  $\Omega$  è detta  $\sigma$ -algebra dell'insieme  $\Omega$  se soddisfa alle proprietà 1), 2) e, in luogo della proprietà 3), alla seguente:

3') Se  $\{A_i\}_{i=1,2,\dots}$  è un'infinità numerabile di insiemi  $A_i \in \mathcal{A}$  per ogni  $i \in \mathbb{N}$ , allora

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

Ovviamente, se sussiste la proprietà 3'), è verificata di conseguenza anche la 3) e dunque una  $\sigma$ -algebra è anche un'algebra.

Si osservi che per le leggi di De Morgan, se  $\mathcal{A}$  è una  $\sigma$ -algebra, anche l'intersezione di un'infinità numerabile di insiemi che stanno in  $\mathcal{A}$  sta in  $\mathcal{A}$ .

Notiamo che l'intersezione di  $\sigma$ -algebre è ancora una  $\sigma$ -algebra.

**Definizione 3.3.** Data una famiglia  $\mathcal{F}$  di sottoinsiemi di  $\Omega$ , denotiamo con  $\sigma(\mathcal{F})$  l'intersezione di tutte le  $\sigma$ -algebre che contengono la famiglia  $\mathcal{F}$  e diciamo che  $\sigma(\mathcal{F})$  è la  $\sigma$ -algebra generata da  $\mathcal{F}$ .

Essendo l'intersezione di tutte le  $\sigma$ -algebre contenenti  $\mathcal{F}$ ,  $\sigma(\mathcal{F})$  è la più piccola  $\sigma$ -algebra contenente  $\mathcal{F}$ .

**Definizione 3.4.** Dato lo spazio topologico  $\mathcal{T}$ , la sua  $\sigma$ -algebra di Borel, denotata con  $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ , è la  $\sigma$ -algebra generata dalla famiglia degli insiemi aperti di  $\mathcal{T}$ .

**Definizione 3.5.** La coppia  $(\Omega, \mathcal{A})$  dove  $\Omega$  è un insieme diverso dall'insieme vuoto e  $\mathcal{A}$  è una  $\sigma$ -algebra di  $\Omega$  è detta spazio misurabile ed ogni sottoinsieme di  $\Omega$  che sta in  $\mathcal{A}$  è detto insieme misurabile.

**Definizione 3.6.** Dato un insieme  $\Omega \neq \emptyset$  e una sua  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}$ , chiamiamo misura ( $\sigma$ -additiva) per l'insieme  $\Omega$  una qualsiasi applicazione  $M$  a valori reali non negativi definita su  $\mathcal{A}$  che gode delle due proprietà seguenti:

- $M(\emptyset) = 0$
- se  $\{A_i\}_{i=1,2,\dots}$  è un'infinità numerabile di insiemi  $A_i \in \mathcal{A}$  per ogni  $i \in \mathbb{N}$  disgiunti a due a due si ha

$$M\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} M(A_i).$$

La terna  $(\Omega, \mathcal{A}, M)$  è detta spazio misura.

Un esempio ben noto di spazio misura è la terna  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, m)$  dove  $\mathcal{L}$  è la  $\sigma$ -algebra degli insiemi di  $\mathbb{R}^n$  misurabili secondo Lebesgue e  $m$  è la misura di Lebesgue.

Dalla definizione data di misura discende la seguente proposizione facilmente dimostrabile (vedi Appendice 2, ultimo capitolo):

**Proposizione 3.2.** *Se  $(\Omega, \mathcal{A}, M)$  è uno spazio misura, si ha:*

1. *la misura  $M$  gode della proprietà di finita additività, cioè se  $\{A\}_{i=1,2,\dots,n}$  è una successione di  $n$  insiemi misurabili disgiunti a due due, allora*

$$M\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n M(A_i);$$

2.  $\forall A, B \in \mathcal{A}$  con  $A \subseteq B$   $M(A) \leq M(B)$ ;
3.  $\forall A, B \in \mathcal{A}$  con  $A \subseteq B$   $M(B \setminus A) = M(B) - M(A)$ ;
4.  $\forall A, B \in \mathcal{A}$   $M(A \cup B) = M(A) + M(B) - M(A \cap B)$ .

Siamo ora in grado di dare la definizione rigorosa di spazio di probabilità.

**Definizione 3.7.** *Definiamo spazio di probabilità lo spazio misura  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  dove  $\Omega$  è detto insieme degli stati o anche spazio campione  $\mathcal{A}$  è una  $\sigma$ -algebra di sottoinsiemi di  $\Omega$ , detti eventi  $P$  è una misura definita su  $\mathcal{A}$ , detta misura di probabilità, tale che  $P(\Omega) = 1$ .*

Osserviamo che per il secondo punto della proposizione 3.2 otteniamo che:

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad P(A) \leq 1.$$

Dunque

$$P : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1].$$

Da un punto di vista "fisico", gli elementi  $\omega$  di  $\Omega$  possono rappresentare lo stato di un fenomeno (come per esempio la posizione di una particella nello spazio geometrico o il prezzo di un titolo azionario) oppure il risultato di un esperimento. Quindi  $\Omega$  è l'insieme di tutti i possibili stati o di tutti i possibili risultati.

Analogamente la definizione matematica di evento corrisponde, da un punto di vista "fisico", alla nozione intuitiva di evento che si forma in modo naturale in tutti tutti noi quando osserviamo un dato fenomeno o un dato esperimento.

**Definizione 3.8.** Un evento  $A$  è detto trascurabile se  $P(A) = 0$ , mentre è detto certo se  $P(A) = 1$ .

Dalla definizione di spazio di probabilità e dalla proposizione 3.2 (punto 3.) segue immediatamente

**Proposizione 3.3.** Sia  $A$  un evento; posto  $A^C = \mathcal{C}(A)$ , si ha:

$$P(A^C) = 1 - P(A).$$

Mostriamo due semplici esempi.

**Esempio 3.1.**

Consideriamo il caso del lancio in successione per due volte di una moneta. Allora lo spazio degli stati  $\Omega$  è dato da

$$\Omega = \{TT, TC, CT, CC\},$$

dove  $TT$  sta ad indicare l'uscita di due teste,  $TC$  l'uscita di una testa e di una croce nell'ordine e così via.

Poiché  $\Omega$  è formato da un numero finito di elementi, possiamo prendere come  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}$  il suo insieme delle parti,  $\mathcal{P}(\Omega)$ .

L'evento intuitivo: "è uscita almeno una testa" è rappresentato matematicamente dall'insieme:

$$A_1 = \{TT, TC, CT\}.$$

Analogamente

$$A_2 = \text{"non è uscita nessuna testa"} = \{CC\};$$

$$A_3 = \text{"è uscita testa al primo lancio"} = \{TT, TC\};$$

$$A_4 = \text{"è uscita testa o croce"} = \Omega;$$

$$A_5 = \text{"non sono uscite né testa né croce"} = \emptyset.$$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  sono tutti eventi.

Se assumiamo che tutti i sottoinsiemi di  $\Omega$  aventi come unico elemento un singolo stato abbiano uguale probabilità, ossia che la moneta sia equa (non truccata), deduciamo:

$$P(\{TT\}) = P(\{TC\}) = P(\{CT\}) = P(\{CC\}) = \frac{1}{4}.$$

Vediamo ora di determinare la probabilità dei cinque eventi considerati precedentemente.

Otteniamo:

$$P(A_1) = P(\{TT\}) + P(\{TC\}) + P(\{CT\}) = \frac{3}{4};$$

$$P(A_2) = P(\{CC\}) = \frac{1}{4};$$

$$P(A_3) = P(\{TT\}) + P(\{TC\}) = \frac{1}{2};$$

$$P(A_4) = P(\Omega) = 1;$$

$$P(A_5) = P(\emptyset) = 0.$$

L'insieme  $\Omega$  può avere anche infiniti elementi, come mostriamo nell'esempio successivo.

### Esempio 3.2. Esempio del bersaglio

Supponiamo di dover colpire, ad esempio con una freccia, un bersaglio rappresentato da un insieme piano  $\Omega$ . Il verificarsi di uno stato (o risultato)  $\omega$  si ha quando la freccia colpisce un determinato punto del bersaglio; dunque gli stati si identificano con i punti di  $\Omega$ . Un evento  $A$  è un sottoinsieme di  $\Omega$  e si interpreta nel modo seguente: "è stato colpito un qualche punto appartenente al sottoinsieme  $A$  di  $\Omega$ ".

Per dare rigore matematico alle nostre argomentazioni supponiamo che  $\Omega$  sia una regione piana misurabile secondo Lebesgue e assumiamo come  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}$  la famiglia di tutti i sottoinsiemi di  $\Omega$  misurabili secondo Lebesgue.

La misura di probabilità è definita nel modo seguente:

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}, \quad m = \text{misura di Lebesgue.}$$

## 3.2 Variabili casuali.

Un altro modo per descrivere una probabilità, dato uno spazio di probabilità, è quello di associare ad ogni stato un numero reale o una ennupla di numeri reali ossia di definire una funzione a valori in  $\mathbf{R}$  o in  $\mathbf{R}^n$  sull'insieme degli stati. Se tale funzione soddisfa ad una opportuna ipotesi è detta **variabile casuale o aleatoria (random variable)**.

**Esempio 3.3.**

Riferiamoci all'esempio 1 e definiamo la seguente funzione:

$$\forall \omega \in \Omega \quad X(\omega) = \text{"numero di volte che appare testa in } \omega\text{"}.$$

Allora

$$X(TT) = 2, \quad X(TC) = 1, \quad X(CT) = 1, \quad X(CC) = 0.$$

Una funzione di tale tipo è una variabile casuale.

Prima della definizione rigorosa di variabile casuale, diamo la seguente

**Definizione 3.9.** Dato lo spazio misurabile  $(\Omega, \mathcal{A})$ , diciamo che la funzione  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è  $\mathcal{A}$ -misurabile se

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Definizione 3.10.** Dato lo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , diciamo che la funzione  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è una variabile casuale (o aleatoria) reale definita sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  se è  $\mathcal{A}$ -misurabile, ossia se

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \text{ è un evento } \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

E' evidente che, se l'insieme degli stati  $\Omega$  è formato da un numero finito di elementi e  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$  (come nell'esempio 1), ogni funzione definita su  $\Omega$  a valori in  $\mathbb{R}$  è una variabile casuale.

E' banale dimostrare la seguente proposizione.

**Proposizione 3.4.** Siano  $X, Y$  due variabili casuali sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  e  $c$  un numero reale fissato.

Allora  $X + c, cX, X + Y, X - Y, XY$  sono variabili casuali sullo stesso spazio di probabilità.

Osserviamo che la definizione di variabile casuale su uno spazio di probabilità è analoga alla definizione di funzione definita su  $\mathbb{R}^n$  misurabile secondo Lebesgue. Il ruolo della misura di Lebesgue è svolto per le variabili casuali dalla misura di probabilità. Perciò, procedendo come nella teoria della misura di Lebesgue, si prova il seguente risultato (vedi Appendice 2):

**Proposizione 3.5.** Siano dati lo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  e la funzione  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora le seguenti proprietà sono equivalenti:

a)  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) > x\} \in \mathcal{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b)  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq x\} \in \mathcal{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

c)  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

d)  $X$  è variabile casuale sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

Si potrebbero poi dimostrare le due seguenti proposizioni.

**Proposizione 3.6.** *La funzione  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è variabile casuale sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ossia è misurabile rispetto alla  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}$  se e solo se  $X^{-1}(U) \in \mathcal{A}$  per ogni aperto  $U \subseteq \mathbb{R}$  o equivalentemente se e solo se  $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$  per ogni insieme di Borel  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .*

**Proposizione 3.7.** *Siano  $X$  una variabile casuale reale sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  e  $g$  una funzione reale definita su  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{B}$ -misurabile (ossia misurabile rispetto a  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ). Allora  $g \circ X$  è una variabile casuale sullo stesso spazio di probabilità.*

La definizione di variabile casuale a valori reali può essere generalizzata al caso di applicazioni, definite sull'insieme degli stati di uno spazio di probabilità, che assumano i loro valori in  $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione 3.11.** *Dato lo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , si dice che la funzione  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una variabile casuale o aleatoria su  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  se lo sono tutte le sue componenti.*

Per le variabili casuali a valori in  $\mathbb{R}^n$  sussiste l'analogia della proposizione 3.6.

**Proposizione 3.8.** *La funzione  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una variabile casuale su  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  se e solo se  $X^{-1}(U) \in \mathcal{A}$  per ogni aperto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  o equivalentemente se e solo se  $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$  per ogni insieme di Borel  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ .*

Nel seguito prenderemo in considerazione solo variabili casuali a valori in  $\mathbb{R}$  eccetto che in alcuni casi particolari.

**Definizione 3.12.** *La variabile casuale  $X$  si dice discreta se assume solo un numero finito o un'infinità numerabile di valori, ossia se  $X(\Omega)$  è un sottoinsieme finito o numerabile di  $\mathbb{R}$ .*

*Si dice che la variabile casuale  $X$  è continua se  $X(\Omega)$  è un intervallo.*

Nell'esempio 1 la variabile casuale introdotta è discreta.

**Definizione 3.13.** *Data la variabile casuale reale  $X$  sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , l'applicazione:*

$$P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$$

tale che

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

è detta distribuzione (o legge) di  $X$  e scriviamo  $X \sim P_X$ .

Notiamo che per la proposizione 3.6 la distribuzione  $P_X$  è ben definita. Poiché

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\},$$

si suol dire che  $P_X(B)$  indica la probabilità che la variabile casuale  $X$  appartenga al Borelliano  $B$ .

Non è difficile provare la seguente

**Proposizione 3.9.** *Se  $X$  è una variabile casuale reale sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , si ha che  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$  è uno spazio di probabilità.*

La definizione di distribuzione si estende immediatamente anche a variabili casuali a valori in  $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione 3.14.** *Data la variabile casuale  $X$  a valori in  $\mathbb{R}^n$  sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , si definisce distribuzione (o legge) di  $X$  l'applicazione:*

$$P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, 1]$$

tale che

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Ovviamente se  $X$  è una variabile casuale a valori in  $\mathbb{R}^n$  sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , si ha che  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), P_X)$  è uno spazio di probabilità.

**Definizione 3.15.** *Considerata la variabile casuale reale  $X$  sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , si chiama funzione di distribuzione (o funzione di ripartizione o funzione di distribuzione cumulativa) di  $X$  la funzione*

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

tale che

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_X(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}). \quad (3.2.1)$$

Si osservi che, essendo  $X$  variabile casuale, l'insieme  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$  è un evento e dunque la funzione data dalla (3.2.1) è ben definita.

Se facciamo uso della distribuzione  $P_X$ , possiamo riscrivere la (3.2.1) nel modo seguente:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_X(x) = P_X((-\infty, x]). \quad (3.2.2)$$

**Proposizione 3.10.** *La funzione di distribuzione della variabile casuale  $X$  gode delle quattro seguenti proprietà:*

1)  $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \quad F_X(b) - F_X(a) = P_X((a, b]) = P(\{\omega \in \Omega : a < X(\omega) \leq b\});$

- 2)  $F_X(x)$  è una funzione non decrescente;  
 3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ ;  
 4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$ .

Le prime due proprietà si dimostrano facilmente utilizzando la (3.2.2), mentre per le ultime due proprietà, pur essendo molto intuitive, la dimostrazione rigorosa non è immediata.

Sia  $X$  una variabile casuale discreta a più valori ed indichiamo con  $x_1, x_2, \dots$  i valori che assume (che sono in numero finito o eventualmente un'infinità numerabile), ordinati in ordine crescente per cui  $x_1 < x_2 < \dots$   
 Sia

$$p_i = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}), \quad i = 1, 2, \dots \quad \text{dove } p_i > 0 \text{ e } \sum_i p_i = 1.$$

Nel seguito per brevità useremo le seguenti notazioni:

$$\{X = x\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}, \quad \{X \leq x\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\},$$

$$P(X = x) := P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}), \quad P(X \leq x) := P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}).$$

Con tali notazioni, possiamo scrivere:

$$p_i = P(X = x_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

La funzione

$$p_X : X(\Omega) \rightarrow (0, 1)$$

$$x_i \mapsto p_i$$

è detta **funzione di probabilità** per la variabile casuale discreta  $X$ . Tale funzione individua in maniera completa la distribuzione  $P_X$  della variabile discreta  $X$ .

Ovviamente se la variabile casuale  $X$  è costante su  $\Omega$ , cioè se si ha

$$X(\omega) = c = \text{costante} \quad \forall \omega \in \Omega,$$

allora  $X$  è una variabile discreta ad un solo valore e  $P(X = c) = P(\Omega) = 1$ .

Vediamo ora quale forma viene ad assumere la funzione di distribuzione per la variabile casuale discreta  $X$ .

Per definizione, fissato  $x$ , si ha:

$$F_X(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}).$$

D'altra parte gli unici valori che  $X$  può assumere sono  $x_1, x_2, \dots$  e perciò nella determinazione della funzione di distribuzione di  $X$  svolgeranno un ruolo fondamentale gli  $x_i$  per  $i = 1, 2, \dots$

Se  $x < x_1$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \emptyset,$$

se  $x \geq x_1$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \bigcup_{x_i \leq x} \{X = x_i\}$$

dove la scritta  $x_i \leq x$  sotto il simbolo di unione sta ad indicare che l'unione è estesa a tutti i valori dell'indice  $i$  tali che  $x_i \leq x$ .

Otteniamo perciò che  $F_X(x)$  ha la forma seguente:

$$\begin{aligned} \text{se } x < x_1 \quad F_X(x) &= 0 \\ \text{se } x \geq x_1 \quad F_X(x) &= \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} p_i. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

dove la scritta  $x_i \leq x$  sotto il simbolo di sommatoria sta ad indicare che la somma è estesa a tutti i valori dell'indice  $i$  tali che  $x_i \leq x$ .

Supponiamo ora che la variabile casuale  $X$  sia continua.

In analogia con le notazioni introdotte in precedenza, poniamo:

$$\begin{aligned} \{X \in B\} &:= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}; \\ P_X(B) = P(X \in B) &:= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}), \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

essendo  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

Se esiste una funzione  $p_X(x)$  a valori reali definita su  $\mathbb{R}$ , non negativa,  $\mathcal{B}$ -misurabile tale che

$$P_X(B) = P(X \in B) = \int_B p_X(t) dt \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad (3.2.5)$$

dove l'integrale a secondo membro è un integrale di Lebesgue, questa è detta **funzione di densità di probabilità per la variabile causale  $X$** .

E' evidente che condizione necessaria affinché la funzione  $p_X(x)$  sia una funzione di densità di probabilità è che sia sommabile secondo Lebesgue poichè deve godere della proprietà:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) dx = 1. \quad (3.2.6)$$

**Osservazione 3.1.** Dalla (3.2.5), deduciamo che se  $B$  ha misura di Lebesgue nulla, allora  $P(X \in B) = 0$  e dunque, se in particolare  $B = \{x\}$ , abbiamo  $P(X = x) = 0$ .

Se esiste una funzione di densità di probabilità, allora la funzione di distribuzione della variabile casuale  $X$  si esprime nella forma:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(t) dt. \quad (3.2.7)$$

**Osservazione 3.2.** Se esiste la funzione di densità di probabilità  $p_X(x)$ , la funzione di distribuzione è continua e derivabile quasi ovunque su  $\mathbb{R}$  con  $\frac{dF_X}{dx}(x) = p_X(x)$ .

Vediamo ora alcuni esempi di distribuzioni di probabilità.

### Esempio 3.4. Distribuzione di Bernoulli

Diciamo che la variabile casuale  $X$  ha una distribuzione di Bernoulli se  $X$  è discreta e può assumere solo i valori 0 e 1 con probabilità rispettivamente  $1 - p$  e  $p$  con  $p \in (0, 1)$ .

Vediamo quale forma assume la funzione di distribuzione  $F_X(x)$ .

Se  $x < 0$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \emptyset \implies F_X(x) = 0.$$

Se  $0 \leq x < 1$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \{X = 0\} \implies F_X(x) = P(X = 0) = 1 - p.$$

Se  $x \geq 1$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \{X = 0\} \cup \{X = 1\} = \Omega \implies F_X(x) = P(\Omega) = 1.$$

Il grafico di  $F_X$  è rappresentato in Figura 3.1.

### Esempio 3.5. Distribuzione uniforme

Supponiamo dapprima che la variabile casuale  $X$  sia discreta ed assuma solo gli  $n$  valori  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Diciamo che  $X$  ha distribuzione uniforme se la corrispondente funzione di probabilità  $p_X$  è la seguente:

$$p_X : \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow (0, 1)$$

$$i \mapsto p_i = \frac{1}{n}.$$

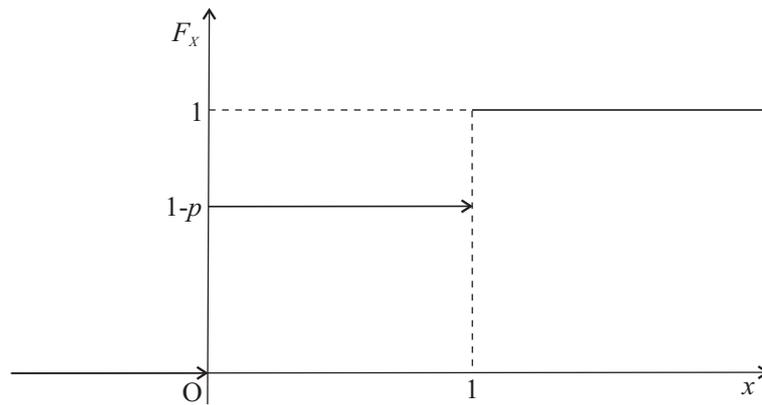


Figura 3.1: Distribuzione di Bernoulli

Se teniamo presente la (3.2.3), per la funzione di distribuzione di  $X$  deduciamo:

$$\begin{aligned}
 \text{se } x < 1 \quad F_X(x) &= P(\emptyset) = 0 \\
 \text{se } 1 \leq x < 2 \quad F_X(x) &= p_1 = \frac{1}{n} \\
 \text{se } j \leq x < j+1 \quad F_X(x) &= p_1 + \dots + p_j = \frac{j}{n} \quad j = 2, \dots, n-1 \\
 \text{se } x \geq n \quad F_X(x) &= P(\Omega) = 1.
 \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Il grafico della funzione  $F_X$  nel caso discreto con  $n = 3$  è rappresentato in Figura 3.2.

Supponiamo ora che la variabile casuale  $X$  sia continua e che l'insieme dei suoi

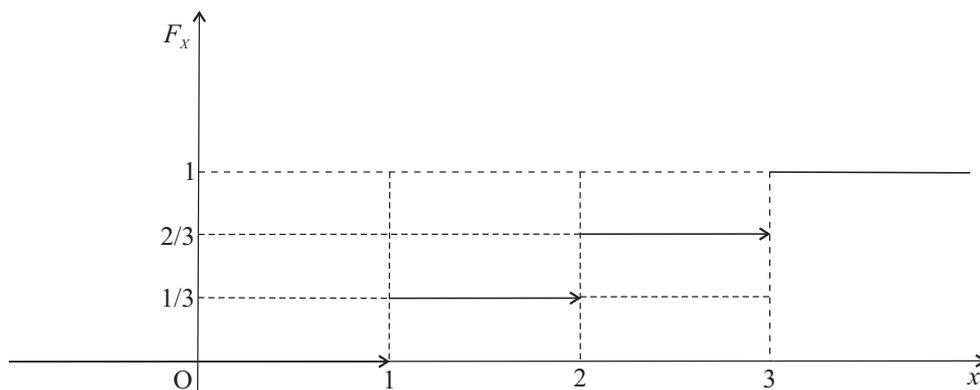


Figura 3.2: Distribuzione uniforme: caso discreto

valori sia l'intervallo  $[a, b]$ .

Diciamo che  $X$  ha distribuzione uniforme se la funzione di densità di probabilità è così definita:

$$\begin{aligned} \text{se } x < a \text{ o } x > b & \quad p_X(x) = 0 \\ \text{se } x \in [a, b] & \quad p_X(x) = \frac{1}{b-a}. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Procuriamoci ora la funzione di distribuzione data dalla (3.2.7):

$$\begin{aligned} \text{se } x < a & \quad F_X(x) = 0 \\ \text{se } x \in [a, b] & \quad F_X(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a} \\ \text{se } x > b & \quad F_X(x) = \int_a^b \frac{1}{b-a} dt = 1. \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Il grafico della funzione  $F_X$  nel caso continuo è dato in Figura 3.3.

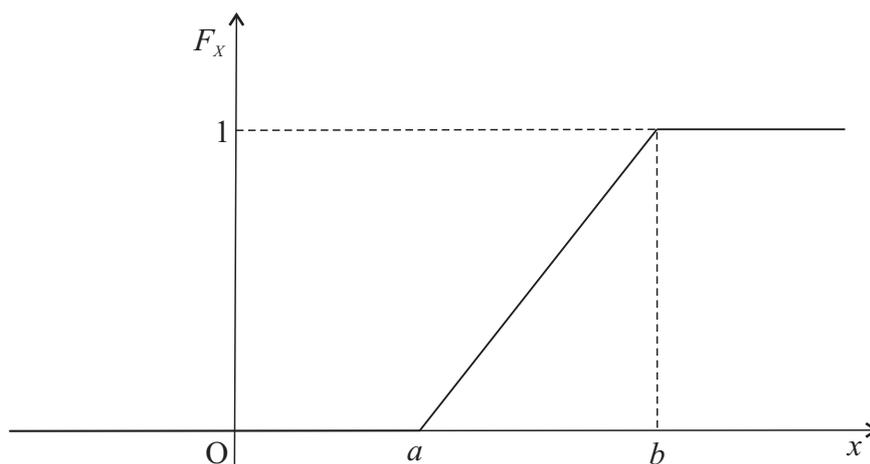


Figura 3.3: Distribuzione uniforme: caso continuo

### Esempio 3.6. Distribuzione gaussiana o normale

Sia  $X$  una variabile casuale continua.

Diciamo che  $X$  ha una distribuzione normale o gaussiana se la funzione di densità di probabilità è data da:

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

con  $\sigma, \mu$  costanti e  $\sigma > 0$ .

Il grafico di  $p_X$  ha la caratteristica forma "a campana" ed è simmetrico rispetto alla retta di equazione  $x = \mu$ .

E' immediato verificare che la funzione  $p_X(x)$  presenta un massimo per  $x = \mu$  e tale massimo vale  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ .

Determiniamo l'area sotto la curva grafico della funzione  $p_X$ , ossia calcoliamo l'integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx.$$

Effettuiamo il cambiamento di variabile d'integrazione

$$\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} = t$$

da cui

$$dx = \sqrt{2}\sigma dt.$$

Sostituendo nell'integrale otteniamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2}\sigma \exp\{-t^2\} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 1.$$

Si noti che il risultato trovato assicura che  $p_X$  è una funzione di densità di probabilità.

Poiché l'altezza della curva grafico della funzione è  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$  e l'area sotto la curva è 1,  $\sigma$  dà una misura di quanto è stretta la curva: se  $\sigma$  è grande abbiamo una curva bassa e larga, mentre se  $\sigma$  è piccolo la curva è alta e stretta e si contrae attorno alla retta  $x = \mu$ .

Nel caso in cui  $\sigma = 1, \mu = 0$ , si parla di **distribuzione gaussiana o normale standard**.

In Figura 3.4 è rappresentato il grafico di  $p_X(x)$  per  $\mu = 2$  e differenti valori di  $\sigma$ .

Una distribuzione normale si denota con  $N(\mu, \sigma^2)$  e perciò per indicare che la variabile casuale  $X$  ha la distribuzione gaussiana  $N(\mu, \sigma^2)$  usiamo la scrittura

$$X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

La funzione di distribuzione nel caso di una distribuzione normale è data da:

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dt \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

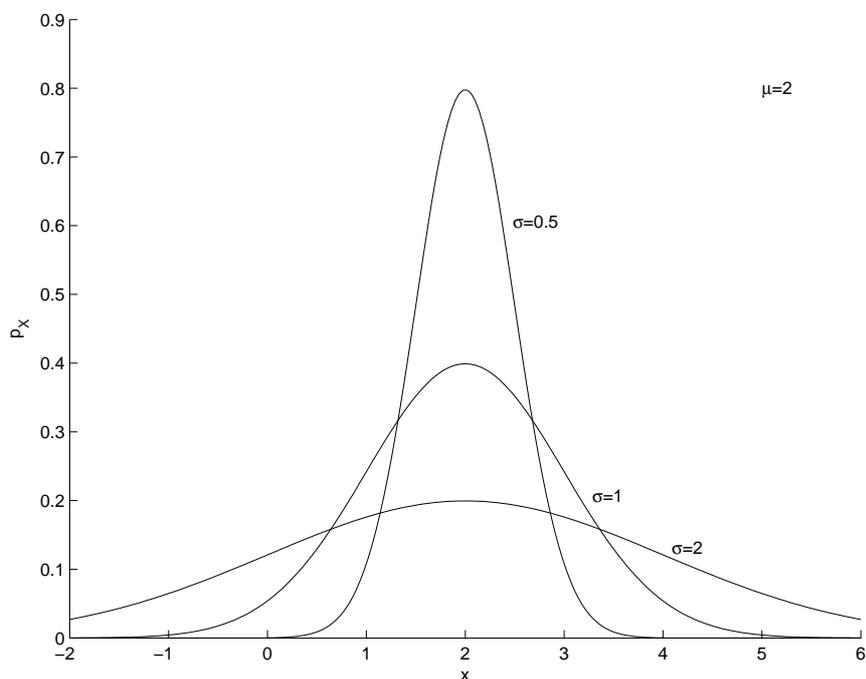


Figura 3.4: Distribuzione Gaussiana

I valori di  $F_X$  vengono calcolati numericamente o vengono desunti dalle apposite tavole.

La distribuzione normale si incontra spesso nello studio dei fenomeni naturali, in particolare ogni volta che il risultato di un esperimento è dovuto alla somma di numerosi piccoli effetti che operano tutti in maniera indipendente e nessuno dei quali prevale sugli altri.

### Esempio 3.7. Distribuzione log - normale

Se  $X$  è una variabile casuale, per la proposizione 3.7 si ha che anche  $Z = e^X$  è una variabile casuale sullo stesso spazio di probabilità. Nel caso in cui  $X$  ha distribuzione normale, allora  $Z = e^X$  **definisce una variabile casuale con distribuzione log - normale.**

Viceversa, se  $Z$  è una variabile casuale positiva, il cui logaritmo naturale ha una distribuzione normale, allora  $Z$  **ha distribuzione log - normale.**

Si può verificare che se  $Z$  ha distribuzione log - normale la sua funzione di densità

di probabilità  $f_Z$  è la seguente:

$$\begin{aligned} \text{se } z \leq 0 & \quad f_Z(z) = 0 \\ \text{se } z > 0 & \quad f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma z} \exp\left\{-\frac{(\log z - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}. \end{aligned}$$

Altri esempi di distribuzioni che non esamineremo in dettaglio sono:

- **Distribuzione esponenziale**

Diciamo che una variabile casuale continua  $X$  ha una distribuzione esponenziale di parametro  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ) se la funzione di densità di probabilità ha la forma seguente:

$$\begin{aligned} \text{se } x < 0 & \quad p_X(x) = 0 \\ \text{se } x \geq 0 & \quad p_X(x) = \lambda \exp^{-\lambda x}. \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

In tal caso si scrive  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ .

Tale distribuzione viene utilizzata ad esempio quando  $X$  rappresenta la durata di un dispositivo (non soggetto ad usura) o il tempo di attesa del verificarsi di un evento.

- **Distribuzione binomiale**

Sia data la variabile casuale  $X$  discreta che assume solo gli  $n + 1$  valori  $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ .

Diciamo che  $X$  ha distribuzione binomiale con parametri  $n$  e  $p \in (0, 1)$  se la corrispondente funzione di probabilità  $p_X$  è così definita:

$$p_X(i) = \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i} \quad \forall i = 0, 1, \dots, n.$$

- **Distribuzione di Poisson**

Consideriamo una variabile casuale  $X$  discreta soddisfacente le due seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} \text{i) } & X(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{0\} \\ \text{ii) } & p_X(i) = \frac{\lambda^i \exp^{-\lambda}}{i!} \quad \forall i = 0, 1, \dots, n, \dots \end{aligned}$$

dove  $\lambda$  è un parametro positivo.

Allora diciamo che  $X$  ha distribuzione di Poisson di parametro  $\lambda$  e scriviamo  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ .

### 3.3 Integrazione di variabili casuali.

In primo luogo osserviamo che per convenienza nel seguito considereremo applicazioni che assumono i loro valori nell'insieme dei numeri reali esteso, cioè in

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Diamo ora la seguente

**Definizione 3.16.** *Diremo che uno spazio misura  $(\Omega, \mathcal{A}, M)$  è completo se la  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}$  contiene tutti i sottoinsiemi degli insiemi di misura nulla, cioè se  $A \in \mathcal{A}$  con  $M(A) = 0$  e  $B \subset A$ , allora anche  $B \in \mathcal{A}$ .*

Un esempio di spazio misura completo è  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, m)$  dove  $\mathcal{L}$  è la  $\sigma$ -algebra degli insiemi di  $\mathbb{R}^n$  misurabili secondo Lebesgue e  $m$  è la misura di Lebesgue.

Ogni spazio misura può sempre essere completato.

Si può dimostrare, come nel caso della misura di Lebesgue, la seguente proposizione:

**Proposizione 3.11.** *Dato lo spazio misura completo  $(\Omega, \mathcal{A}, M)$ , siano  $f$  e  $g$  applicazioni definite su  $\Omega$  a valori reali tali che  $f(\omega) = g(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega \setminus A$  con  $M(A) = 0$ . Se  $f$  è  $\mathcal{A}$ -misurabile, allora anche  $g$  è  $\mathcal{A}$ -misurabile.*

Nel seguito supporremo che lo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  sia completo, ma questa ipotesi non è particolarmente restrittiva poiché, come abbiamo osservato, se uno spazio misura non è completo può sempre essere completato.

**Definizione 3.17.** *Siano  $X_1, X_2$  applicazioni definite su  $\Omega$  a valori in  $\mathbb{R}$ . Diremo che  $X_1 = X_2$  quasi sicuramente (q. s.) se*

$$P(\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \neq X_2(\omega)\}) = 0$$

o equivalentemente se

$$P(\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) = X_2(\omega)\}) = 1.$$

Dalla proposizione 3.11 segue che se  $X_1, X_2$  sono applicazioni reali definite su  $\Omega$  uguali q. s. e  $X_1$  è variabile casuale, lo è anche  $X_2$ .

Il nostro scopo è ora di mostrare che è possibile definire per una variabile casuale sullo spazio di probabilità completo  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un integrale relativo alla misura di probabilità  $P$  che è la generalizzazione di quello di Lebesgue per le funzioni  $\mathcal{L}$ -misurabili.

Dimostriamo dapprima la

**Proposizione 3.12.** *Sia  $A$  un evento, allora la funzione caratteristica dell'insieme  $A$ :  $\chi_A$  è una variabile casuale.*

Dimostrazione

Ricordiamo che  $\chi_A$  è definita nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \text{se } \omega \in A & \quad \chi_A(\omega) = 1 \\ \text{se } \omega \in A^C & \quad \chi_A(\omega) = 0. \end{aligned}$$

Osserviamo che per ipotesi  $A$  è misurabile e quindi lo è anche il suo complementare  $A^C$ .

Noi dobbiamo dimostrare che  $\chi_A$  è  $\mathcal{A}$ -misurabile cioè che

$$\{\omega \in \Omega : \chi_A(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ma basta osservare che

$$\begin{aligned} \text{se } x < 0 & \quad \{\omega \in \Omega : \chi_A(\omega) \leq x\} = \emptyset \in \mathcal{A} \\ \text{se } 0 \leq x < 1 & \quad \{\omega \in \Omega : \chi_A(\omega) \leq x\} = A^C \in \mathcal{A} \\ \text{se } x \geq 1 & \quad \{\omega \in \Omega : \chi_A(\omega) \leq x\} = A \cup A^C = \Omega \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

**Definizione 3.18.** *Diremo che la funzione  $X^{(s)}$  a valori reali definita su  $\Omega$  è  $\mathcal{A}$ -semplice se è una combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di eventi a due a due disgiunti, cioè se*

$$X^{(s)} = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{A_i},$$

dove  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sono eventi tali che  $A_i \cap A_j = \emptyset$  se  $i \neq j$ .

Per la proposizione precedente ogni funzione  $\mathcal{A}$ -semplice è una variabile casuale che chiameremo **variabile casuale semplice**.

Una variabile casuale semplice si può scrivere in più modi come combinazione lineare di funzioni caratteristiche, ma si può provare che la definizione di integrale che daremo dopo non dipende dalla rappresentazione.

**Osservazione 3.3.**

E' evidente che una variabile casuale discreta che assume un numero finito di valori è semplice. Infatti se la variabile casuale  $X$  assume gli  $n$  valori  $x_1, \dots, x_n$  con  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  e se  $A_i = \{X = x_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , allora possiamo rappresentarla nella forma:

$$X = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{A_i}, \quad \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j. \quad (3.3.1)$$

Ma è anche facile verificare che una variabile casuale semplice è una variabile casuale discreta che assume un numero finito di valori.

Dunque le variabili casuali semplici si identificano con le variabili casuali discrete che assumono un numero finito di valori. La rappresentazione (3.3.1) è detta **rappresentazione canonica**.

**Proposizione 3.13.** *Se  $X$  è una variabile casuale non negativa, esiste una successione  $X_n^{(s)}$  di variabili casuali semplici con  $X_{n+1}^{(s)} \geq X_n^{(s)}$  tale che:*

$$X(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n^{(s)}(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega.$$

**Definizione 3.19.** *Siano  $A$  un evento e  $X^{(s)} = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{A_i}$  una variabile casuale semplice non negativa. Definiamo integrale di  $X^{(s)}$  su  $A$  rispetto alla misura di probabilità  $P$  il seguente numero reale:*

$$\int_A X^{(s)} dP = \sum_{i=1}^n x_i P(A_i \cap A). \quad (3.3.2)$$

Se si vuole sottolineare qual è la variabile d'integrazione in luogo di  $\int_A X^{(s)} dP$  si scrive  $\int_A X^{(s)}(\omega) dP(\omega)$ .

Ovviamente se  $A = \Omega$

$$\int_{\Omega} X^{(s)} dP = \sum_{i=1}^n x_i P(A_i).$$

Indichiamo con  $\mathcal{S}$  la classe delle variabili casuali semplici non negative.

Data una variabile casuale non negativa  $X$ , denotiamo poi con  $\mathcal{S}_-(X)$  la classe delle variabili casuali semplici non negative che sono maggiorate da  $X$ , cioè

$$\mathcal{S}_-(X) = \{X^{(s)} \in \mathcal{S} : 0 \leq X^{(s)}(\omega) \leq X(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega\}.$$

**Definizione 3.20.** *Sia  $X$  una variabile casuale non negativa. Preso un qualsiasi evento  $A$ , si definisce integrale di  $X$  su  $A$  rispetto alla misura di probabilità  $P$  il seguente numero reale (esteso):*

$$\int_A X dP = \sup \left\{ \int_A X^{(s)} dP, \quad X^{(s)} \in \mathcal{S}_-(X) \right\}. \quad (3.3.3)$$

Se l'integrale di  $X$  su  $A$  è finito, si dice che  $X$  è sommabile su  $A$  rispetto alla misura di probabilità  $P$  o  $P$ -sommabile su  $A$ .

**Osservazione 3.4.** Se  $X \in \mathcal{S}$ , la definizione (3.3.3) restituisce il valore dell'integrale definito dalla (3.3.2).

L'integrale su un evento di una variabile casuale non negativa gode di numerose proprietà, del tutto analoghe a quelle relative all'integrale su un insieme misurabile secondo Lebesgue di una funzione  $\mathcal{L}$ -misurabile non negativa e si dimostrano con le stesse argomentazioni.

Sussiste tra l'altro la seguente

**Proposizione 3.14.** *Se  $X, Y$  sono variabili casuali non negative e  $A, B$  sono eventi si ha:*

$$1) X(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in A \implies \int_A X dP = 0;$$

$$2) P(A) = 0 \implies \int_A X dP = 0;$$

$$3) \int_A X dP = \int_{\Omega} X \chi_A dP;$$

$$4) X(\omega) \leq Y(\omega) \quad \forall \omega \in A \implies \int_A X dP \leq \int_A Y dP;$$

$$5) A \subseteq B \implies \int_A X dP \leq \int_B X dP;$$

$$6) \text{ se } A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \text{ con } A_i \in \mathcal{A} \text{ per } i = 1, 2, \dots \text{ e } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ per } i, j = 1, 2, \dots, i \neq j, \text{ allora}$$

$$\int_A X dP = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} X dP.$$

Ora estendiamo la definizione di integrale su un evento a variabili casuali che assumono i loro valori in tutto  $\mathbb{R}$ .

Sia  $X$  una variabile casuale che assume valori anche negativi.

Poniamo

$$X^+ = \max\{X, 0\}, \quad X^- = -\min\{X, 0\},$$

per cui risulta

$$X = X^+ - X^-, \quad |X| = X^+ + X^-.$$

Si noti che, essendo  $X$  variabile casuale, anche  $X^+$  e  $X^-$  sono variabili casuali.

**Definizione 3.21.** *Sia  $X$  una variabile casuale a valori anche negativi. Diciamo che  $X$  è  $P$ -sommabile sull'evento  $A$  se*

$$\int_A |X| dP < +\infty.$$

In tal caso si pone come integrale di  $X$  su  $A$  rispetto alla misura di probabilità  $P$  il numero reale:

$$\int_A X dP = \int_A X^+ dP - \int_A X^- dP. \quad (3.3.4)$$

Si osservi che il secondo membro della precedente uguaglianza è ben definito ed è finito, essendo  $0 \leq X^-, X^+ \leq |X|$ .

Può essere utile talora poter disporre della nozione di integrale anche per variabili casuali non sommabili di segno qualunque.

Dunque diremo che  $X$  è  **$P$ -integrabile su  $A$**  se uno almeno dei due integrali

$$\int_A X^+ dP, \quad \int_A X^- dP$$

è finito.

In tal caso come valore dell'integrale di  $X$  su  $A$  si prende ancora il numero reale:

$$\int_A X dP = \int_A X^+ dP - \int_A X^- dP$$

che risulterà essere un ben definito elemento di  $\mathbb{R}$  esteso.

Alle variabili casuali sommabili su un evento rispetto alla misura di probabilità  $P$  si estendono tutte le proprietà di cui godono le funzioni reali sommabili nel senso di Lebesgue su un insieme  $\mathcal{L}$ -misurabile.

Richiamiamone alcune.

**Proposizione 3.15.** *Siano  $X, Y$  variabili casuali sommabili sull'evento  $A$ .*

1) *Se  $c_1, c_2$  sono due numeri reali fissati, allora*

$$\int_A (c_1 X + c_2 Y) dP = c_1 \int_A X dP + c_2 \int_A Y dP;$$

2) *Se  $B, C$  sono eventi disgiunti contenuti in  $A$ , allora*

$$\int_{B \cup C} X dP = \int_B X dP + \int_C X dP;$$

3)  $\left| \int_A X dP \right| \leq \int_A |X| dP;$

4)  $X = Y$  q.s in  $A$ , ossia  $P(\{\omega \in A : X(\omega) \neq Y(\omega)\}) = 0$ ,  $\implies$

$$\int_A X dP = \int_A Y dP;$$

5) *se  $Z$  è una variabile casuale tale che  $|Z| \leq |X|$  in  $A$ , allora anche  $Z$  è sommabile su  $A$ .*

Osserviamo inoltre che per la definizione data di integrale, valgono anche i teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale, come ad esempio quello di Beppo Levi e della convergenza dominata di Lebesgue.

Altre proprietà verranno enunciate all'occorrenza.

**Definizione 3.22.** Dato il numero reale  $p$  ( $p \geq 1$ ), denotiamo con  $L^p(\Omega)$  l'insieme delle variabili casuali  $X$  tali che  $|X|^p$  sia sommabile su  $\Omega$ , cioè

$$L^p(\Omega) = \left\{ X \text{ variabile casuale reale} : \int_{\Omega} |X|^p dP < +\infty \right\}. \quad (3.3.5)$$

Come nel caso della teoria dell'integrazione secondo Lebesgue, si verifica facilmente che  $L^p(\Omega)$  è uno spazio vettoriale.

Inoltre, sempre in analogia con la teoria di Lebesgue, introduciamo la seguente relazione di equivalenza nella classe delle funzioni  $P$ -sommabili su  $\Omega$ :

$$X \sim Y \iff X = Y \text{ quasi sicuramente}$$

ed identifichiamo la variabile casuale  $X$  con la classe di equivalenza da essa individuata. Se a questo punto denotiamo con  $L^p(\Omega)$  l'insieme quoziente rispetto alla relazione  $\sim$  dello spazio definito dalla (3.3.5) e poniamo

$$\|X\|_{L^p(\Omega)} = \left\{ \int_{\Omega} |X|^p dP \right\}^{\frac{1}{p}},$$

tale quantità definisce una norma in  $L^p(\Omega)$ .

Come nella teoria dell'integrazione secondo Lebesgue, è possibile provare che lo spazio  $L^p(\Omega)$  è uno spazio di Banach, cioè uno spazio vettoriale normato completo.

Si può anche provare la seguente proposizione:

**Proposizione 3.16.** Se  $p$  e  $q$  sono numeri reali  $> 1$  tali che  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  e  $X \in L^p(\Omega)$ ,  $Y \in L^q(\Omega)$ , allora la variabile casuale  $XY \in L^1(\Omega)$  e si ha:

$$\int_{\Omega} |XY| dP \leq \|X\|_{L^p(\Omega)} \|Y\|_{L^q(\Omega)}. \quad (3.3.6)$$

La (3.3.6) è l'analogia della disuguaglianza di Hölder della teoria dell'integrazione secondo Lebesgue e per  $p = q = 2$  è l'analogia di quella di Schwarz.

Dalla proposizione (3.3.6) si deduce che se  $X \in L^p(\Omega)$ , con  $p > 1$ , allora

$X \in L^1(\Omega)$ . Infatti se  $X \in L^p(\Omega)$ , basta applicare la proposizione 3.3.6 prendendo per  $Y$  la variabile casuale identicamente uguale a 1 in  $\Omega$  e tenere presente che per ogni scelta di  $q > 1$ , si ha che  $Y \in L^q(\Omega)$  poiché

$$\int_{\Omega} Y^q dP = P(\Omega) = 1 < +\infty.$$

Si osservi che questa proprietà non sussiste nella teoria dell'integrazione di Lebesgue per funzioni reali perché la misura di Lebesgue non è finita.

In particolare come conseguenza della proprietà detta sopra  $X \in L^2(\Omega) \Rightarrow X \in L^1(\Omega)$ .

Inoltre è facile verificare che lo spazio  $L^2(\Omega)$  è uno spazio di Hilbert poiché è dotato di un prodotto scalare. Infatti se  $X, Y \in L^2(\Omega)$ , il loro prodotto scalare è dato da

$$\int_{\Omega} XY dP.$$

### 3.4 Nozioni generali di teoria della misura

In questo paragrafo forniamo delle nozioni di carattere generale di teoria della misura, che ci saranno utili in seguito.

**Definizione 3.23.** *Dato lo spazio misura  $(\Omega, \mathcal{A}, M)$ , sia  $N$  una misura su  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Diciamo che  $N$  è assolutamente continua rispetto alla misura  $M$  e scriviamo  $N \ll M$  se*

$$\forall A \in \mathcal{A} \text{ tale che } M(A) = 0 \implies N(A) = 0.$$

*Diciamo poi che le due misure sono equivalenti e scriviamo  $M \sim N$  se  $M \ll N$  e  $N \ll M$ .*

**Definizione 3.24.** *Dato lo spazio misura  $(\Omega, \mathcal{A}, M)$ ,  $M$  è una misura finita se  $M(\Omega) < +\infty$ , mentre è una misura  $\sigma$ -finita se esiste un'infinità numerabile  $\{A_i\}_{i=1,2,\dots}$  di sottoinsiemi di  $\Omega$  in  $\mathcal{A}$  tali che*

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \quad e \quad M(A_i) < +\infty \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

È evidente che ogni misura di probabilità è finita, mentre la misura di Lebesgue su  $\mathbb{R}^n$  è  $\sigma$ -finita, ma non finita.

Osserviamo ora che, dato un generico spazio misura  $(\Omega, \mathcal{A}, M)$  completo, la teoria dell'integrazione rispetto ad una misura di probabilità che abbiamo sviluppato per variabili casuali a valori reali si può ripetere in maniera del tutto

analoga relativamente alla misura  $M$  per funzioni a valori reali che siano  $\mathcal{A}$ -misurabili.

**Definizione 3.25.** *Sia  $(\Omega, \mathcal{A}, M)$  uno spazio misura con  $M$  misura  $\sigma$ -finita e consideriamo un'altra misura  $N$  su  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Diciamo che  $N$  è dotata di densità  $f$  rispetto a  $M$  se esiste una funzione  $\mathcal{A}$ -misurabile  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$  tale che*

$$N(A) = \int_A f dM \quad \forall A \in \mathcal{A}. \quad (3.4.1)$$

E' evidente che se la misura  $N$  è dotata di densità rispetto a  $M$ , è anche assolutamente continua rispetto a  $M$ .

**Osservazione 3.5.** Sia  $X$  data una variabile casuale reale su uno spazio di probabilità che ammetta funzione di densità di probabilità  $p_X$ . Se consideriamo lo spazio misura  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$  con  $m$  misura di Lebesgue e la distribuzione  $P_X$  che, come abbiamo visto, è una misura definita su  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , per la definizione precedente concludiamo che la funzione  $p_X$  è la densità di  $P_X$  rispetto alla misura di Lebesgue e che dunque  $P_X$  è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue.

Enunciamo ora, senza dimostrazione, un teorema che svolge un ruolo importante nella teoria della misura e che utilizzeremo nel seguito.

**Teorema 3.1. Teorema di Radon-Nikodym.** *Sia  $(\Omega, \mathcal{A}, M)$  uno spazio misura con  $M$  misura  $\sigma$ -finita. Se  $N$  è una misura su  $(\Omega, \mathcal{A})$  e  $N \ll M$ , allora  $N$  è dotata di densità  $f$  rispetto a  $M$ . Condizione necessaria e sufficiente affinché  $f$  sia  $M$ -sommabile in  $\Omega$  è che la misura  $N$  sia finita. Inoltre  $f$  è unica  $M$ -quasi sicuramente ossia, se esiste un'altra densità  $f^*$ , allora*

$$M(\{\omega \in \Omega : f(\omega) \neq f^*(\omega)\}) = 0.$$

Diamo ora la definizione di misura prodotto e vediamone alcune proprietà.

**Definizione 3.26.** *Dati due spazi misurabili  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$  e  $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ , definiamo:*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 := \sigma(\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\})$$

la  $\sigma$ -algebra prodotto di  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$ .

Chiaramente  $\mathcal{A}$  è una  $\sigma$ -algebra per l'insieme  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$  e dunque  $(\Omega, \mathcal{A})$  è uno spazio misurabile.

Il seguente teorema contiene la definizione di misura prodotto.

**Teorema 3.2.** *Date le due misure  $\sigma$ -finite  $M_1$  e  $M_2$ , definite rispettivamente sugli spazi misurabili  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$  e  $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ , esiste un'unica misura  $M$  definita sullo spazio misurabile  $(\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$  tale che*

$$M(A_1 \times A_2) = M_1(A_1) M_2(A_2), \quad A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2.$$

$M$  è detta *misura prodotto* di  $M_1$  e  $M_2$  scriviamo:

$$M = M_1 \otimes M_2.$$

Di seguito enunciamo il classico teorema di Fubini e Tonelli.

**Teorema 3.3. Teorema di Fubini e Tonelli.** *Dati i due spazi con misura  $\sigma$ -finita  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, M_1)$  e  $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, M_2)$ , sia  $(\Omega, \mathcal{A}, M)$  lo spazio misura con  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ ,  $M = M_1 \otimes M_2$ . Sia poi*

$$f = f(\omega_1, \omega_2) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

una funzione  $\mathcal{A}$ -misurabile. Allora

i)  $\forall \omega_1 \in \Omega_1$  la funzione  $\omega_2 \mapsto f(\omega_1, \omega_2)$  è  $\mathcal{A}_2$ -misurabile e analogamente  $\forall \omega_2 \in \Omega_2$  la funzione  $\omega_1 \mapsto f(\omega_1, \omega_2)$  è  $\mathcal{A}_1$ -misurabile;

ii) se  $f \geq 0$ , la funzione  $\omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) dM_2(\omega_2)$  è  $\mathcal{A}_1$ -misurabile (e quindi  $M_1$ -integrabile su  $\Omega_1$ ) e un risultato analogo vale scambiando il ruolo di  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , se  $f \in L^1(\Omega)$  (rispetto alla misura  $M$ ), per quasi ogni  $\omega_1 \in \Omega_1$  la funzione  $\omega_2 \mapsto f(\omega_1, \omega_2) \in L^1(\Omega_2)$  (rispetto alla misura  $M_2$ ), la funzione  $\omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) dM_2(\omega_2) \in L^1(\Omega_1)$  (rispetto alla misura  $M_1$ ) e un risultato analogo vale scambiando il ruolo di  $\omega_1$  e  $\omega_2$ ;

iii) se  $f \geq 0$  o  $f \in L^1(\Omega)$  si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(\omega_1, \omega_2) dM(\omega_1, \omega_2) &= \int_{\Omega_1} \left( \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) dM_2(\omega_2) \right) dM_1(\omega_1) \\ &= \int_{\Omega_2} \left( \int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) dM_1(\omega_1) \right) dM_2(\omega_2). \end{aligned}$$

### 3.5 Indipendenza di variabili casuali.

Siano  $X, Y$  due variabili casuali definite sullo stesso spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

Se consideriamo l'applicazione:

$$\begin{aligned} (X, Y) : \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega &\longmapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{aligned}$$

è ancora variabile casuale (a valori in  $\mathbb{R}^2$ ) sullo stesso spazio di probabilità. Possiamo perciò considerare la distribuzione di tale variabile casuale che viene denotata con  $P_{XY}$  ed è detta **distribuzione congiunta di  $X$  e  $Y$** , mentre le distribuzioni  $P_X$  e  $P_Y$  di  $X$  e  $Y$  sono dette **distribuzioni marginali** di  $(X, Y)$ . Tenendo presente che

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{B_1 \times B_2 : B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}),$$

abbiamo che

$$P_{XY} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow [0, 1]$$

e

$$\begin{aligned} \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad P_{XY}(B_1 \times B_2) &= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B_1, Y(\omega) \in B_2\}) \\ &=: P(X \in B_1, Y \in B_2). \end{aligned}$$

**Definizione 3.27.** *Se  $X, Y$  sono due variabili casuali definite sullo stesso spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , la funzione*

$$F_{XY}(x, y) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y, \}) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

*è detta funzione di distribuzione congiunta di  $X$  e  $Y$ .*

Ovviamente

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad F_{XY}(x, y) = P_{XY}((-\infty, x] \times (-\infty, y]).$$

Si può provare che la funzione di distribuzione congiunta  $F_{XY}$  determina le funzioni di distribuzione  $F_X$  di  $X$  e  $F_Y$  di  $Y$ , dette **funzioni di distribuzione marginali**, nel modo seguente:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_X(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F_{XY}(x, y),$$

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_{XY}(x, y).$$

Nel caso che  $X, Y$  siano variabili casuali discrete è possibile introdurre la funzione di probabilità congiunta.

Se la variabile casuale  $X$  assume i valori  $x_1, x_2, \dots$  e la variabile casuale  $Y$  assume i valori  $y_1, y_2, \dots$  la **funzione di probabilità congiunta di  $X$  e  $Y$**  è la funzione  $p_{XY}$  tale che

$$p_{XY}(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j) \quad \forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega).$$

Si può provare che la funzione di probabilità congiunta  $p_{XY}$  determina le funzioni di probabilità  $p_X$  di  $X$  e  $p_Y$  di  $Y$ , dette **funzioni di probabilità marginali**, nel modo seguente:

$$\forall x_i \in X(\Omega) \quad p_X(x_i) = \sum_j p_{XY}(x_i, y_j), \quad \forall y_j \in Y(\Omega) \quad p_Y(y_j) = \sum_i p_{XY}(x_i, y_j).$$

Vediamo quale forma assume la funzione di distribuzione congiunta  $F_{XY}$ :

$$\begin{aligned} &\text{se } x < x_1 \text{ o } y < y_1 \quad F_{XY}(x, y) = 0 \\ &\text{se } x \geq x_1, y \geq y_1 \quad F_{XY}(x, y) = \sum_{x_i \leq x, y_j \leq y} p_{XY}(x_i, y_j). \end{aligned}$$

Per variabili casuali continue può esistere la **funzione di densità di probabilità congiunta**  $p_{XY}$ , cioè una funzione definita su  $\mathbb{R}^2$ , non negativa,  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ -misurabile tale che

$$P_{XY}(B_1 \times B_2) = P(X \in B_1, Y \in B_2) = \int \int_{B_1 \times B_2} p_{XY}(t, z) dt dz \quad \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Necessariamente la funzione  $p_{XY}$  è sommabile su  $\mathbb{R}^2$  nel senso di Lebesgue e si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{XY}(t, z) dt dz = 1.$$

Si potrebbe provare che in tal caso le funzioni di densità di probabilità di  $X$  e  $Y$  sono date da

$$p_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{XY}(t, z) dz \quad \text{e} \quad p_Y(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{XY}(t, z) dt.$$

La funzione di distribuzione congiunta di  $X$  e  $Y$  assume quindi l'espressione seguente:

$$F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p_{XY}(t, z) dt dz \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

**Definizione 3.28.** Due variabili casuali  $X, Y$  si dicono *indipendenti* se

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) F_Y(y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

**Proposizione 3.17.** Se  $X, Y$  sono variabili casuali discrete, sono indipendenti se e solo se

$$p_{XY}(x_i, y_j) = p_X(x_i) p_Y(y_j) \quad \forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega).$$

Se  $X, Y$  sono variabili casuali continue ed esiste la funzione di densità di probabilità congiunta, sono indipendenti se e solo se

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x) p_Y(y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (3.5.1)$$

Dimostrazione

Ci limitiamo a dimostrare la condizione sufficiente.

Nel caso di variabili discrete la dimostrazione è banale.

Supponiamo dunque che  $X$  e  $Y$  siano variabili casuali continue.

Per ipotesi sussiste la (3.5.1).

Vogliamo provare che

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) F_Y(y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Per definizione

$$\begin{aligned} F_{XY}(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p_{XY}(t, z) dt dz = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p_X(t) p_Y(z) dt dz \\ &= \int_{-\infty}^x \left( \int_{-\infty}^y p_X(t) p_Y(z) dz \right) dt = \int_{-\infty}^x p_X(t) dt \int_{-\infty}^y p_Y(z) dz \\ &= F_X(x) F_Y(y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato il teorema di Fubini.

L'indipendenza di due variabili casuali è in qualche modo correlata alla definizione elementare di eventi indipendenti.

Ricordiamo la seguente

**Definizione 3.29.** *Due eventi  $A_1, A_2$  si dicono indipendenti se*

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2).$$

Ora estendiamo tale definizione alle sotto  $\sigma$ -algebre di  $\mathcal{A}$ , cioè alle  $\sigma$ -algebre contenute in  $\mathcal{A}$ .

**Definizione 3.30.** *Due sotto  $\sigma$ -algebre  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  di  $\mathcal{A}$  si dicono indipendenti se*

$$\forall A_1 \in \mathcal{A}_1, \forall A_2 \in \mathcal{A}_2 \quad P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2).$$

**Definizione 3.31.** *Data la variabile casuale  $X$  (a valori reali), si definisce  $\sigma$ -algebra da essa generata la  $\sigma$ -algebra, denotata con  $\sigma(X)$ , generata dalla famiglia costituita da tutti gli insiemi  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$  al variare di  $x$  in  $\mathbb{R}$ , ossia la  $\sigma$ -algebra minimale che contiene tali insiemi.*

Si potrebbe far vedere che

$$\sigma(X) = \sigma(\{X^{-1}(B)\}_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})}).$$

Ovviamente una variabile casuale  $X$  è misurabile rispetto alla  $\sigma$ -algebra  $\sigma(X)$  da essa stessa generata; più precisamente  $\sigma(X)$  è la più piccola sotto  $\sigma$ -algebra di  $\mathcal{A}$  rispetto alla quale  $X$  è misurabile.

**Proposizione 3.18.** *Due variabili casuali  $X$  e  $Y$  sono indipendenti se e solo se le  $\sigma$ -algebre da esse generate  $\sigma(X)$  e  $\sigma(Y)$  sono indipendenti.*

Dimostrazione

Dimostriamo soltanto la condizione sufficiente.

Per ipotesi  $\sigma(X)$  e  $\sigma(Y)$  sono  $\sigma$ -algebre indipendenti. Vogliamo provare che  $X$  e  $Y$  sono variabili casuali indipendenti cioè che

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) F_Y(y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Per definizione di funzione di distribuzione, dobbiamo mostrare che

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y\}) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) \cdot P(\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq y\}). \quad (3.5.2)$$

D'altra parte

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x, \} \cap \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq y\}$$

e posto

$$A_1(x) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}, \quad A_2(y) = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq y\},$$

provare la (3.5.2) significa provare che

$$P(A_1(x) \cap A_2(y)) = P(A_1(x)) \cdot P(A_2(y)) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ma tale relazione è vera perché  $A_1(x) \in \sigma(X)$ ,  $A_2(y) \in \sigma(Y)$   $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$  e per ipotesi le due  $\sigma$ -algebre  $\sigma(X)$  e  $\sigma(Y)$  sono indipendenti.

Diamo ora alcuni esempi molto semplici di  $\sigma$ -algebre generate da una variabile casuale.

**Esempio 3.8.**

La variabile causale  $X$  sia tale che

$$X(\omega) = 1 \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Per determinare  $\sigma(X)$ , teniamo presente che

$$\text{se } x < 1 \quad \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \emptyset$$

$$\text{se } x \geq 1 \quad \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \Omega.$$

Concludiamo perciò che  $\sigma(X) = \{\emptyset, \Omega\}$ , ossia è la sotto  $\sigma$ -algebra banale.

**Esempio 3.9.**

La variabile casuale  $X$  sia tale che

$$X(\omega) = 0 \quad \text{o} \quad X(\omega) = 1.$$

Posto

$$I_0 = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = 0\},$$

vediamo di determinare  $\sigma(X)$ . A tal fine teniamo presente che

$$\begin{array}{lll} \text{se} & x < 0 & \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \emptyset \\ \text{se} & 0 \leq x < 1 & \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = I_0 \\ \text{se} & x \geq 1 & \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \Omega. \end{array}$$

La  $\sigma$ -algebra minimale che ha come suoi elementi gli insiemi  $\emptyset, I_0, \Omega$  è la seguente:

$$\{\emptyset, \Omega, I_0, I_0^C\}.$$

**3.6 Momenti di una variabile casuale.**

Sia  $X$  una variabile casuale sullo spazio di probabilità completo  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ed indichiamo con  $P_X$  la sua distribuzione.

Come abbiamo osservato,  $P_X$  è a sua volta una misura di probabilità definita su  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Se  $g$  è una funzione reale  $\mathcal{B}$ -misurabile, è possibile dare la definizione di integrabilità e sommabilità di  $g$  su ogni Borelliano rispetto alla misura di probabilità  $P_X$  in maniera del tutto analoga a quanto abbiamo fatto per le variabili casuali sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Per denotare l'integrale di  $g$  su un Borelliano  $B$  rispetto alla misura  $P_X$  usiamo la notazione seguente:

$$\int_B g(x) dP_X(x) \quad \text{o semplicemente} \quad \int_B g dP_X.$$

Si potrebbe provare il seguente teorema

**Teorema 3.4.** *Siano  $X$  una variabile casuale reale sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  e  $g$  una funzione reale definita su  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{B}$ -misurabile. Allora*

$$g \circ X \in L^1(\Omega) \text{ (rispetto a } P) \iff g \in L^1(\mathbb{R}) \text{ (rispetto a } P_X)$$

e in tal caso vale:

$$\int_{\Omega} g(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dP_X(x).$$

Se  $X$  è una variabile casuale continua dotata di densità di probabilità  $p_X(x)$ , allora

$$g \circ X \in L^1(\Omega) \iff \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| p_X(x) dx < +\infty$$

ed in tal caso si ha:

$$\int_{\Omega} g(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) p_X(x) dx.$$

Il teorema 3.4 si può generalizzare. Enunciamo solo la generalizzazione della seconda parte, che ci sarà utile in seguito:

**Teorema 3.5.** *Siano  $X$  e  $Y$  variabili casuali reali continue sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  con funzione di densità di probabilità congiunta  $p_{XY}(x, y)$  e  $g$  una funzione reale definita su  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{B}$ -misurabile. Allora*

$$g \circ (X, Y) \in L^1(\Omega) \iff \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x, y)| p_{XY}(x, y) dx dy < +\infty$$

e in tal caso vale:

$$\int_{\Omega} g(X(\omega), Y(\omega)) dP(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) p_{XY}(x, y) dx dy.$$

Introduciamo ora la definizione di **momento di ordine  $p$**  o **momento piesimo** di una variabile casuale.

**Definizione 3.32.** *Sia data la variabile casuale  $X$  sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Si definisce momento di ordine  $p$  o momento piesimo di  $X$  con  $p \in \mathbb{N}$ :*

$$E[X^p] = \int_{\Omega} X^p dP,$$

purché  $X \in L^p(\Omega)$ , cioè  $\int_{\Omega} |X|^p dP < +\infty$ .

Se  $X$  è una variabile casuale discreta che assume un numero finito di valori  $x_1, x_2, \dots, x_n$  in  $A_1, A_2, \dots, A_n$  rispettivamente, allora:

$$X = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{A_i}$$

per cui

$$|X|^p = \sum_{i=1}^n |x_i|^p \chi_{A_i} \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Pertanto

$$\int_{\Omega} |X|^p dP = \sum_{i=1}^n |x_i|^p P(A_i) = \sum_{i=1}^n |x_i|^p p_i < +\infty.$$

Dunque  $X \in L^p(\Omega) \quad \forall p \in \mathbb{N}$  e

$$E[X^p] = \int_{\Omega} X^p dP = \sum_{i=1}^n x_i^p p_i. \quad (3.6.1)$$

Sia  $X$  una variabile casuale discreta che assume un'infinità numerabile di valori  $x_1, x_2, \dots$ . Se  $\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p p_i < +\infty$ , allora  $X \in L^p(\Omega)$  e

$$E[X^p] = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^p p_i.$$

$X$  sia ora una variabile casuale continua con densità di probabilità  $p_X(x)$ . Se applichiamo il teorema 3.4, ponendo  $g(x) = x^p \quad \forall x \in \mathbb{R}$ , si deduce che se  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p p_X(x) dx < +\infty$ , allora  $X \in L^p(\Omega)$  e

$$E[X^p] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^p p_X(x) dx.$$

Un caso particolarmente interessante di momento si ha per  $p = 1$ ; il momento di ordine 1 è anche detto **valore atteso** o **media della variabile casuale**  $X$ .

**Proposizione 3.19.** *Il valore atteso di una variabile casuale  $X$  gode delle seguenti proprietà:*

- 1) se  $X = c$  ( $c = \text{costante}$ ), allora  $E[X] = c$ ;
- 2)  $\forall X, Y$  v.c.  $\in L^1(\Omega)$ ,  $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad E[c_1 X + c_2 Y] = c_1 E[X] + c_2 E[Y]$ ;
- 3) se  $X$  e  $Y$  sono variabili casuali indipendenti appartenenti a  $L^1(\Omega)$ , allora  $XY \in L^1(\Omega)$  e

$$E[XY] = E[X] E[Y].$$

Dimostrazione

1)

La variabile  $X$  è discreta ed assume il solo valore  $c$  con probabilità 1. Dunque per la (3.6.1)

$$E[X] = c P(X = c) = c.$$

2)

Tenendo presente che per definizione:

$$E[X] = \int_{\Omega} X dP,$$

la proprietà è conseguenza della linearità dell'integrale.

3)

Dimostriamo tale proprietà solo nel caso in cui  $X$  e  $Y$  sono variabili casuali continue ed esiste la densità di probabilità congiunta per cui esistono anche le densità di probabilità per ciascuna variabile casuale.

In primo luogo osserviamo che grazie al teorema 3.5,

$$XY \in L^1(\Omega) \iff \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |xy|p_{XY}(x, y) dx dy < +\infty$$

e in tal caso vale:

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyp_{XY}(x, y) dx dy. \quad (3.6.2)$$

D'altra parte, per ipotesi  $X, Y \in L^1(\Omega)$  per cui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|p_X(x) dx, \int_{-\infty}^{+\infty} |y|p_Y(y) dy < +\infty.$$

Inoltre, poiché  $X$  e  $Y$  sono indipendenti,  $p_X(x)p_Y(y) = p_{XY}(x, y)$ . Allora, applicando il teorema di Fubini-Tonelli nel caso in cui interviene una funzione non negativa, otteniamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |xy|p_{XY}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|p_X(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} |y|p_Y(y) dy < +\infty.$$

Dunque  $XY \in L^1(\Omega)$  e sussiste la (3.6.2). Per l'indipendenza di  $X$  e  $Y$  e per il teorema di Fubini, dalla (3.6.2) deduciamo:

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} y p_Y(y) dy = E[X] E[Y].$$

Un altro caso particolarmente interessante di momento di una variabile casuale è costituito dal momento di ordine due della variabile casuale  $X - E[X]$ , comunemente detto **varianza della variabile casuale**  $X$  e denotato con  $\sigma_X^2$  o con  $Var(X)$ .

**Definizione 3.33.** Data la variabile casuale  $X \in L^2(\Omega)$ , la sua varianza è definita nel modo seguente:

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2]. \quad (3.6.3)$$

La varianza fornisce una stima di quanto  $X$  si discosta in media dal proprio valore atteso.

Dimostriamo la seguente

**Proposizione 3.20.** Data la variabile casuale  $X \in L^2(\Omega)$ , si ha:

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - (E[X])^2. \quad (3.6.4)$$

Dimostrazione

Per definizione di varianza, abbiamo:

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= E[(X - E[X])^2] = E[X^2] + E[-2E[X]X] + E[(E[X])^2] \\ &= E[X^2] - 2E[X]E[X] + (E[X])^2 \\ &= E[X^2] - (E[X])^2 \end{aligned}$$

dove abbiamo usato dapprima la proprietà 2) e poi la proprietà 1) del valore atteso.

La radice quadrata positiva della varianza è detta **deviazione standard** della variabile casuale  $X$  e denotata con  $\sigma_X$ . (Si osservi che per definizione  $\sigma_X^2 \geq 0$ ). Nella teoria dei mercati finanziari la deviazione standard viene utilizzata per definire la volatilità del prezzo di un titolo azionario.

**Proposizione 3.21.** La varianza di una variabile casuale gode delle seguenti proprietà:

- 1)  $\sigma_{X+c}^2 = \sigma_X^2$ , essendo  $c = \text{costante}$  e  $X \in L^2(\Omega)$ ;
- 2)  $\sigma_{cX}^2 = c^2\sigma_X^2$ , essendo  $c = \text{costante}$  e  $X \in L^2(\Omega)$ ;
- 3) se  $X$  e  $Y$  sono variabili casuali indipendenti, entrambe appartenenti a  $L^2(\Omega)$ , allora

$$\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2. \quad (3.6.5)$$

Dimostrazione

1)

$$\sigma_{X+c}^2 = E[(X + c - E[X + c])^2] = E[(X + c - E[X] - c)^2] = \sigma_X^2.$$

2)

$$\sigma_{cX}^2 = E[(cX - E[cX])^2] = E[c^2(X - E[X])^2] = c^2 E[(X - E[X])^2] = c^2 \sigma_X^2.$$

3)

Supponiamo  $X$  e  $Y$  variabili casuali indipendenti per cui, grazie alla proprietà 3) del valore atteso

$$E[XY] = E[X] E[Y].$$

Se teniamo anche presente la (3.6.4) e la linearità della media, deduciamo allora:

$$\begin{aligned} \sigma_{X+Y}^2 &= E[(X + Y)^2] - (E[X + Y])^2 \\ &= E[X^2] + 2E[XY] + E[Y^2] - (E[X])^2 - (E[Y])^2 - 2E[X] E[Y] \\ &= E[X^2] - (E[X])^2 + E[Y^2] - (E[Y])^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2. \end{aligned}$$

Vediamo alcuni esempi di valore atteso e di varianza di una variabile casuale.

**Esempio 3.10.**

Prendiamo in esame la distribuzione di Bernoulli.

La variabile casuale  $X$  può assumere solo i valori 0 e 1 rispettivamente con probabilità  $(1 - p)$  e  $p$ .

Vogliamo calcolare valore atteso, varianza e deviazione standard.

$$E[X] = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p.$$

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - (E[X])^2 = p - p^2 = p(1 - p).$$

$$\sigma_X = \sqrt{p(1 - p)}.$$

**Esempio 3.11.**

Supponiamo di avere un dado equo che viene lanciato e che all'uscita di una faccia si riceva un pagamento pari al numero uscito.

Tale pagamento è una variabile casuale  $X$  sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  dove

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega), \quad P(\{i\}) = \frac{1}{6} \quad \forall i \in \Omega.$$

$X$  è dunque una variabile casuale discreta che può assumere solo i valori: 1, 2, 3, 4, 5, 6 e la funzione di probabilità è tale che

$$p_X(i) = \frac{1}{6} \quad \forall i \in \Omega.$$

Abbiamo quindi una variabile discreta con distribuzione uniforme.  
Il pagamento medio che ci aspettiamo ad ogni lancio è:

$$E[X] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5.$$

La varianza è:

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} + 16 \cdot \frac{1}{6} + 25 \cdot \frac{1}{6} + 36 \cdot \frac{1}{6} - (3,5)^2 \\ &= \frac{91}{6} - (3,5)^2 \simeq 15,1667 - 12,25 = 2,9167. \end{aligned}$$

La deviazione standard è

$$\sigma_X \simeq \sqrt{2,916} \simeq 1,7078.$$

### Esempio 3.12.

Sia  $X$  una variabile casuale con distribuzione di Poisson di parametro  $\lambda$  per cui si ha

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad p_i = \frac{\lambda^i \exp^{-\lambda}}{i!} \quad \forall i = 0, 1, \dots, n, \dots$$

$X$  è una variabile discreta non negativa che assume un'infinità numerabile di valori dei quali il più piccolo è 0. Dunque  $X \in L^p(\Omega)$  se

$$\int_{\Omega} X^p dP = \sum_{i=0}^{+\infty} i^p p_i = \sum_{i=0}^{+\infty} i^p \frac{\lambda^i \exp^{-\lambda}}{i!} < +\infty,$$

ossia se

$$\sum_{i=0}^{+\infty} i^p \frac{\lambda^i}{i!} < +\infty.$$

Noi ci limitiamo a provare che  $X \in L^1(\Omega)$  e  $L^2(\Omega)$  e ne determiniamo valore atteso e varianza.

$X \in L^1(\Omega)$  poiché

$$\sum_{i=0}^{+\infty} i \frac{\lambda^i}{i!} = \lambda \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = \lambda \exp^{\lambda}$$

e

$$E[X] = \exp^{-\lambda} \sum_{i=0}^{+\infty} i \frac{\lambda^i}{i!} = \lambda.$$

D'altra parte  $X \in L^2(\Omega)$  poiché

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{+\infty} i^2 \frac{\lambda^i}{i!} &= \sum_{i=2}^{+\infty} i(i-1) \frac{\lambda^i}{i!} + \sum_{i=1}^{+\infty} i \frac{\lambda^i}{i!} = \\ &= \lambda^2 \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{i-2}}{(i-2)!} + \lambda \exp^\lambda = (\lambda^2 + \lambda) \exp^\lambda \end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto presente che  $i^2 = i(i-1) + i$ .

Otteniamo allora

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - (E[X])^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

La deviazione standard è

$$\sigma_X = \sqrt{\lambda}.$$

### Esempio 3.13.

Consideriamo una variabile casuale continua con distribuzione uniforme e sia  $[a, b]$  l'insieme dei suoi valori. Come sappiamo, la funzione densità di probabilità è così definita:

$$\begin{aligned} \text{se } x < a \text{ o } x > b & \quad p_X(x) = 0 \\ \text{se } x \in [a, b] & \quad p_X(x) = \frac{1}{b-a}. \end{aligned}$$

E' evidente che  $X \in L^p(\Omega) \quad \forall p \in \mathbb{N}$  poiché

$$\int_{\Omega} |X|^p dP = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p p_X(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b |x|^p dx < +\infty.$$

Il valore atteso è

$$E[X] = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{b+a}{2}.$$

Per la varianza deduciamo:

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad (3.6.6)$$

Infine otteniamo dalla (3.6.6) che la deviazione standard è data da

$$\sigma_X = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

**Esempio 3.14.**

Supponiamo che la variabile casuale  $X$  abbia una distribuzione gaussiana  $N(\mu, \sigma^2)$ . Allora la funzione di densità di probabilità è data da:

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad \text{con } \sigma, \mu = \text{costante e } \sigma > 0.$$

Osserviamo che  $X \in L^p(\Omega) \quad \forall p \in \mathbb{N}$  poiché

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx < +\infty.$$

Il valore atteso è

$$E[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left\{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx. \quad (3.6.7)$$

Per il calcolo dell'integrale al secondo membro della (3.6.7) effettuiamo il cambiamento di variabile d'integrazione:

$$t = \frac{x - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \implies x = \mu + \sqrt{2}\sigma t, \quad dx = \sqrt{2}\sigma dt.$$

Sostituendo nella (3.6.7), deduciamo:

$$E[X] = \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-t^2\} dt + \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t \exp\{-t^2\} dt. \quad (3.6.8)$$

Ma il secondo integrale a secondo membro della (3.6.8) è nullo perché la funzione integranda è dispari e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine. Inoltre

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-t^2\} dt = 1.$$

In definitiva otteniamo:

$$E[X] = \mu.$$

Determiniamo ora la varianza di  $X$ .

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= E[(X - E[X])^2] = E[(X - \mu)^2] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \exp\left\{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx. \end{aligned} \quad (3.6.9)$$

Effettuiamo il cambiamento di variabile d'integrazione:

$$t = \frac{x - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \implies x - \mu = \sqrt{2}\sigma t, \quad dx = \sqrt{2}\sigma dt.$$

Sostituendo nella (3.6.9), deduciamo:

$$\sigma_X^2 = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} 2t^2 \exp\{-t^2\} dt. \quad (3.6.10)$$

Se integriamo per parti prendendo

$$f(t) = -\exp\{-t^2\} \implies f'(t) = 2t \exp\{-t^2\}$$

e

$$g(t) = t \implies g'(t) = 1,$$

otteniamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 2t^2 \exp\{-t^2\} dt = -t \exp\{-t^2\} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-t^2\} dt = \sqrt{\pi}.$$

Sostituendo tale risultato nella (3.6.10), abbiamo

$$\sigma_X^2 = \sigma^2.$$

Dunque, quando si ha una distribuzione gaussiana, la varianza è  $\sigma^2$  e la deviazione standard è  $\sigma$ . La deviazione standard misura il grado di dispersione dei valori attorno alla media  $\mu$ .

Si potrebbe inoltre provare che se  $X$  segue una distribuzione gaussiana con valore atteso  $\mu$  e deviazione standard  $\sigma$ , risulta  $\forall k \in \mathbb{N}$

$$E[(X - \mu)^{2k+1}] = 0 \quad (\text{momenti di } X - \mu \text{ di ordine dispari})$$

$$E[(X - \mu)^{2k}] = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k - 1) \sigma^{2k} \quad (\text{momenti di } X - \mu \text{ di ordine pari}).$$

Pertanto sono sufficienti i due parametri  $\mu$  e  $\sigma$  per caratterizzare la distribuzione gaussiana e i momenti di ordine superiore non forniscono ulteriori informazioni.

## 3.7 Convergenza di successioni di variabili casuali.

Data una successione di variabili casuali  $X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , definite su uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , ci sono diversi modi per definire la convergenza ad una variabile casuale  $X$  definita sullo stesso spazio di probabilità.

Una definizione, che è l'estensione più naturale del concetto di limite dell'analisi matematica, è quella di convergenza con probabilità 1 o quasi sicura.

**Definizione 3.34.** *La successione di variabili casuali  $X_n$  converge alla variabile casuale  $X$  con probabilità 1 (o quasi sicuramente) se:*

$$P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow +\infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| \neq 0\}) = 0$$

o equivalentemente se

$$P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow +\infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| = 0\}) = 1.$$

Se si verifica la convergenza con probabilità 1 scriveremo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X \quad \text{q.s.}$$

Un'altra definizione di convergenza è la seguente

**Definizione 3.35.** *La successione di variabili casuali  $X_n$  si dice convergere in probabilità (o stocasticamente) alla variabile casuale  $X$  se:*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}) = 0.$$

In tal caso scriveremo

$$P - \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X.$$

Si può provare che la convergenza quasi sicura implica la convergenza in probabilità.

Un'ulteriore definizione di convergenza è la convergenza in media di ordine  $p$  con  $p \geq 1$ .

**Definizione 3.36.** *La successione di variabili casuali  $X_n$  converge alla variabile casuale  $X$  in media di ordine  $p$  se  $X_n \in L^p(\Omega) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $X \in L^p(\Omega)$  e*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E[|X_n - X|^p] = 0.$$

Analiticamente questo tipo di convergenza corrisponde alla convergenza in  $L^p$  della teoria dell'integrazione secondo Lebesgue.

In particolare se  $p = 2$ , la convergenza si dice in media quadratica e scriveremo:

$$\text{mq} - \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X.$$

La convergenza in media quadratica svolge un ruolo importante nel calcolo stocastico poiché viene utilizzata per la definizione di integrale di Itô.

Si potrebbero dare altre definizioni di convergenza di successioni di variabili casuali, ma su ciò non insistiamo.

## 3.8 Aspettative condizionate.

Una previsione sul valore di una variabile casuale può essere ottenuto calcolandone il valore atteso, ma esso fornisce il tipo più grossolano di previsione. Quest'ultima può essere migliorata se si dispone di ulteriori informazioni. Ad esempio, la probabilità di un crollo finanziario può essere rivista se si dispone dell'informazione aggiuntiva che si è entrati in una pesante recessione, esprimendo tale probabilità come probabilità condizionata.

Vedremo di definire matematicamente i concetti di informazione, di struttura informativa e di aspettativa condizionata.

**Definizione 3.37.** *Se  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  è uno spazio di probabilità, allora un'informazione è un evento  $I$  (ossia un sottoinsieme di  $\Omega$  che sta in  $\mathcal{A}$ ).*

*Una struttura informativa è una sotto  $\sigma$ -algebra di  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{I}$ , contenente gli eventi informativi.*

Ricordiamo la definizione di **probabilità condizionata elementare**.

**Definizione 3.38.** *La probabilità condizionata elementare di un evento  $A \in \mathcal{A}$ , sotto la condizione  $I \in \mathcal{A}$ , ossia dato un evento  $I$ , con  $P(I) > 0$  è:*

$$P(A|I) = \frac{P(A \cap I)}{P(I)}. \quad (3.8.1)$$

Facciamo degli esempi ricorrendo agli esempi 1 e 2 visti nel paragrafo 2.

### Esempio 3.15.

Si consideri il lancio in successione per due volte di una moneta.

Sia dato l'evento "è uscita almeno una testa", rappresentato matematicamente dall'insieme

$$A = \{TT, TC, CT\}.$$

Se non abbiamo alcuna informazione:

$$P(A) = \frac{3}{4}.$$

Ma supponiamo di aver ricevuto la seguente informazione: "è uscita almeno una croce". Tale informazione è rappresentata matematicamente dall'insieme

$$I = \{TC, CT, CC\}.$$

Allora, in base alla (3.8.1), la probabilità dell'evento  $A$  sotto la condizione  $I$  è data da

$$P(A|I) = \frac{P(A \cap I)}{P(I)} = \frac{P(\{TC, CT, \})}{P(\{TC, CT, CC\})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

Questo perché l'informazione ricevuta ha in un certo senso ridotto lo spazio campione  $\Omega = \{TT, TC, CT, CC\}$  ad uno più piccolo  $\Omega' = \{TC, CT, CC\} = I$  in cui non compare più  $TT$  ed inoltre all'evento  $A$  dobbiamo in realtà sostituire l'evento  $A \cap I = \{TC, CT\}$ . Se si tiene presente che il nuovo spazio campione è formato da tre stati e che gli eventi costituiti da un singolo stato sono tutti ugualmente probabili, avremo che la probabilità di ciascuno di tali eventi è  $\frac{1}{3}$  e poiché  $A \cap I$  contiene due stati si ottiene che  $P(A|I) = \frac{2}{3}$ .

**Esempio 3.16.**

Si deve colpire con una freccia un bersaglio rappresentato da un insieme piano  $\Omega$ , misurabile secondo Lebesgue.

Supponiamo di sapere che verrà colpito un punto della regione  $I$  (evento informativo). Allora la probabilità condizionata dell'evento  $A$ , (cioè che venga colpito un punto dell'insieme  $A$ ) dato l'evento  $I$  è:

$$P(A|I) = \frac{P(A \cap I)}{P(I)} = \frac{\text{mis}(A \cap I)}{\text{mis}I}.$$

Dimostriamo la seguente

**Proposizione 3.22.** *Se gli eventi  $A$  e  $I$  sono indipendenti, allora*

$$P(A|I) = P(A).$$

Dimostrazione

La dimostrazione è immediata se si tiene presente la definizione elementare di eventi indipendenti.

Infatti

$$P(A|I) = \frac{P(A \cap I)}{P(I)} = \frac{P(A) \cdot P(I)}{P(I)} = P(A).$$

Introduciamo ora la seguente definizione:

**Definizione 3.39.** *L'aspettativa condizionata elementare della variabile casuale  $X \in L^1(\Omega)$  sotto la condizione  $I$  è data da*

$$E[X|I] = \frac{E[X \chi_I]}{P(I)}. \quad (3.8.2)$$

Vediamo quale forma assume la (3.8.2) se la variabile casuale è discreta con  $n$  valori:  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ .

In primo luogo osserviamo che

$$E[X \chi_I] = \int_{\Omega} X \chi_I dP = \int_I X dP.$$

Allora, essendo  $X$  variabile discreta, dalla (3.8.2) otteniamo:

$$\begin{aligned} E[X | I] &= \frac{E[X \chi_I]}{P(I)} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i P(\{X = x_i\} \cap I)}{P(I)} = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \frac{P(\{X = x_i\} \cap I)}{P(I)} = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i | I). \end{aligned}$$

Vogliamo ora definire l'aspettativa condizionata di una variabile casuale, data una struttura informativa, ossia data una sotto  $\sigma$ -algebra di  $\mathcal{A}$ . Questa, come vedremo, è una variabile casuale.

**Definizione 3.40.** *Sia  $X$  una variabile casuale definita sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  tale che  $X \in L^1(\Omega)$ , e sia  $\mathcal{I}$  una sotto  $\sigma$ -algebra di  $\mathcal{A}$ . Definiamo aspettativa condizionata di  $X$ , data la struttura informativa  $\mathcal{I}$ , la variabile casuale  $Y \in L^1(\Omega)$ , misurabile rispetto ad  $\mathcal{I}$  tale che  $\forall I \in \mathcal{I}$  si abbia*

$$\int_I Y dP = \int_I X dP.$$

La variabile casuale  $Y$  viene denotata nel modo seguente:

$$Y = E[X | \mathcal{I}].$$

L'esistenza e l'"unicità" dell'aspettativa condizionata sono provate nel seguente

**Teorema 3.6.** *Sia  $X$  una variabile casuale definita sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  tale che  $X \in L^1(\Omega)$ , e sia  $\mathcal{I}$  una sotto  $\sigma$ -algebra di  $\mathcal{A}$ . Allora esiste una variabile casuale  $Y$  soddisfacente alle proprietà richieste dalla definizione 3.40. Inoltre tali proprietà caratterizzano  $Y$  nel senso che se esiste un'altra variabile casuale  $Y^*$  con le stesse proprietà di  $Y$  allora  $Y$  e  $Y^*$  sono uguali quasi sicuramente.*

#### Dimostrazione

Supponiamo dapprima che la variabile casuale  $X \in L^1(\Omega)$  sia non negativa e consideriamo l'applicazione  $N : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^+$  così definita:

$$N(I) = \int_I X dP \quad \forall I \in \mathcal{I}.$$

È evidente che  $N$  è una misura su  $(\Omega, \mathcal{I})$  poiché  $N(\emptyset) = \int_{\emptyset} X dP = 0$  e se

$I = \bigcup_{i=1}^{+\infty} I_i$  con  $I_i \in \mathcal{I}$  per  $i = 1, 2, \dots$  e  $I_i \cap I_j = \emptyset$  per  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2, \dots$ , allora

per la proprietà 6) della proposizione 3.14 si ha:

$$N(I) = \int_I X dP = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{I_i} X dP = \sum_{i=1}^{+\infty} N(I_i).$$

Inoltre,  $P$  è una misura finita e quindi  $\sigma$ -finita, mentre, essendo  $X \in L^1(\Omega)$ ,  $N$  è una misura finita ed anche assolutamente continua rispetto a  $P$  considerata sullo spazio misurabile  $(\Omega, \mathcal{I})$  poiché  $\forall I \in \mathcal{I}$  tale che  $P(I) = 0$  si ha

$$N(I) = \int_I X dP = 0.$$

Allora per il teorema di Radon-Nikodym esiste ed è unica quasi sicuramente una variabile casuale  $Y \in L^1(\Omega)$ , misurabile rispetto ad  $\mathcal{I}$  tale che  $\forall I \in \mathcal{I}$  si abbia

$$\int_I Y dP = N(I) = \int_I X dP.$$

Precisamente  $Y$  è la densità della misura  $N$  rispetto alla misura di probabilità. Se la variabile casuale assume anche valori negativi, il teorema si dimostra mediante la decomposizione  $X = X^+ - X^-$ .

Diamo anche la definizione di **probabilità condizionata**  $P(A|\mathcal{I})$  di un evento  $A$ , data la struttura informativa  $\mathcal{I}$ :

$$P(A|\mathcal{I}) = E[\chi_A|\mathcal{I}],$$

dove  $\chi_A$  è la funzione caratteristica dell'evento  $A$ .

L'aspettativa condizionata gode di numerose proprietà che valgono tutte quasi sicuramente, ossia con probabilità 1.

Nella proposizione scritta sotto ne sono elencate le più importanti.

**Proposizione 3.23.** *Date una variabile casuale  $X \in L^1(\Omega)$  e una sotto  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{I}$  di  $\mathcal{A}$ , sussistono le seguenti proprietà:*

1) se  $\mathcal{I} = \{\emptyset, \Omega\}$ , cioè non si ha alcuna informazione allora

$$E[X|\mathcal{I}] = E[X];$$

2) linearità:

$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \forall Y \in L^1(\Omega)$  si ha

$$E[c_1 X + c_2 Y|\mathcal{I}] = c_1 E[X|\mathcal{I}] + c_2 E[Y|\mathcal{I}];$$

3)  $|E[X|\mathcal{I}]| \leq E[|X|\mathcal{I}]$ ;

4) se  $X$  è  $\mathcal{I}$ -misurabile, allora

$$E[X|\mathcal{I}] = X;$$

5) se  $\sigma(X)$  è indipendente da  $\mathcal{I}$ , allora

$$E[X | \mathcal{I}] = E[X];$$

6) se la variabile casuale  $M$  è  $\mathcal{I}$ -misurabile e limitata, allora

$$E[MX | \mathcal{I}] = M E[X | \mathcal{I}];$$

7) se  $Y \in L^1(\Omega)$  è indipendente da  $X$  e  $\sigma(Y)$  è indipendente da  $\mathcal{I}$ , allora:

$$E[XY | \mathcal{I}] = E[X | \mathcal{I}] E[Y];$$

8) Proprietà a torre:

se  $\mathcal{I}^*$  è una sotto  $\sigma$ -algebra di  $\mathcal{I}$ , allora:

$$E[E[X | \mathcal{I}] | \mathcal{I}^*] = E[X | \mathcal{I}^*];$$

9)  $E[E[X | \mathcal{I}]] = E[X]$ .

Dimostriamo solo alcune delle proprietà elencate sopra.

Dimostriamo la proprietà 1)

Sia  $Y = E[X | \mathcal{I}]$  con  $\mathcal{I} = \{\emptyset, \Omega\}$ .

Poiché  $Y$  è misurabile rispetto ad  $\mathcal{I}$ , avremo che

$$\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq x\} \in \mathcal{I} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ma per come è definita  $\mathcal{I}$ , risulta

$$\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq x\} = \emptyset \quad \text{o} \quad = \Omega.$$

Perciò  $Y$  assume un solo valore su tutto  $\Omega$  ed è quindi costante.

D'altra parte, per il teorema 3.6,  $Y$  gode della proprietà

$$\int_I Y dP = \int_I X dP \quad \forall I \in \mathcal{I}.$$

In particolare avremo

$$\int_{\Omega} Y dP = \int_{\Omega} X dP,$$

ossia

$$E[Y] = E[X].$$

Ma, essendo  $Y$  costante, si ha

$$E[Y] = Y$$

e dunque la proprietà è dimostrata.

Dimostriamo ora la proprietà 4)

Se  $X$  è  $\mathcal{I}$ -misurabile, gode di tutte le proprietà di cui gode  $Y = E[X | \mathcal{I}]$ . Ma per l'unicità stabilita dal teorema 3.6  $X = Y$  quasi sicuramente.

Per la dimostrazione delle proprietà 5) e 8) rimandiamo all'Appendice 2 dell'ultimo capitolo.

Infine proviamo la 9) che è conseguenza delle 1) e 8).

Infatti, poniamo  $\mathcal{I}^* = \{\emptyset, \Omega\}$ . Tenendo presente la proprietà 1), possiamo scrivere

$$E[E[X | \mathcal{I}]] = E[E[X | \mathcal{I}] | \mathcal{I}^*] = E[X | \mathcal{I}^*] = E[X],$$

dove abbiamo anche sfruttato la proprietà a torre e ancora la proprietà 1).

In particolare, data la variabile casuale  $X$ , si può assumere come struttura informativa la  $\sigma$ -algebra generata da un'altra variabile casuale  $Z$  definita sullo stesso spazio di probabilità. In tal caso si usa spesso la notazione  $E[X | Z]$  in luogo di  $E[X | \sigma(Z)]$ .

Ovviamente se  $X$  e  $Z$  sono indipendenti, per la proprietà 5) si ha:

$$E[X | Z] = E[X].$$

# Capitolo 4

## Processi stocastici

### 4.1 Introduzione ai processi stocastici.

Prima di dare la definizione formale di processo stocastico ci proponiamo di evidenziare la differenza concettuale tra processo deterministico e processo stocastico e di mostrare la necessità di ricorrere al calcolo stocastico per introdurre modelli matematici per la valutazione di titoli finanziari rischiosi come azioni e opzioni.

L'evoluzione temporale di moltissimi fenomeni che intervengono in fisica, ingegneria, chimica, biologia, nelle scienze sociali e in altri campi è governata da un'equazione differenziale ordinaria o da un sistema di equazioni di tale tipo.

Com'è noto, un'equazione differenziale ordinaria è una relazione tra una variabile indipendente  $t$  (che nel nostro caso assume il significato fisico di variabile temporale), una funzione incognita di questa variabile,  $x(t)$ , ed alcune sue derivate.

Si definisce poi ordine dell'equazione l'ordine della derivata di ordine massimo della funzione incognita che compare nell'equazione stessa.

Un'equazione differenziale ordinaria di ordine  $m$  si presenta perciò nella forma:

$$F(t, x, x', \dots, x^{(m)}) = 0, \quad (4.1.1)$$

dove  $F$  è una funzione reale di  $m + 2$  variabili reali, assegnata in un aperto  $D \subset \mathbb{R}^{m+2}$ .

**Definizione 4.1.** *Una funzione reale definita su un intervallo  $I \subset \mathbb{R}$  è detta soluzione dell'equazione (4.1.1) in  $I$  se è derivabile sino a  $m$  volte in tale intervallo,  $(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m)}(t)) \in D \quad \forall t \in I$  ed inoltre*

$$F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m)}(t)) = 0 \quad \forall t \in I.$$

**Definizione 4.2.** Un'equazione differenziale ordinaria di ordine  $m$  si dice di forma normale, quando è scritta nel modo seguente:

$$x^{(m)} = f(t, x, x', \dots, x^{(m-1)}) \quad (4.1.2)$$

dove  $f$  è una funzione in  $m + 1$  variabili, assegnata in un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{R}^{m+1}$ , in genere supposto aperto.

**Definizione 4.3.** Data l'equazione differenziale (4.1.2), se  $(t_0, x_0, x'_0, \dots, x_0^{(m-1)})$  è un punto dell'aperto  $A$  su cui è definita la funzione  $f$ , si definisce problema di Cauchy per l'equazione (4.1.2) relativo a  $(t_0, x_0, x'_0, \dots, x_0^{(m-1)})$  il problema che consiste nel trovare una soluzione dell'equazione, definita in un intorno  $I$  di  $t_0$ , che verifichi le condizioni, dette iniziali o di Cauchy:

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x'_0, \quad \dots, \quad x^{(m-1)}(t_0) = x_0^{(m-1)}.$$

In particolare, diciamo che il problema di Cauchy viene risolto localmente o in piccolo se non è fissato a priori l'intorno  $I$ , mentre diciamo che il problema di Cauchy viene risolto globalmente o in grande se  $f$  è definita in  $[a, b] \times \mathbb{R}^m$  e  $I = [a, b]$ .

Se la funzione  $f$  soddisfa ad opportune ipotesi di regolarità, sussistono teoremi che ci assicurano l'esistenza e l'unicità locale o globale della soluzione del problema di Cauchy.

Più in generale possiamo avere un sistema di  $n$  equazioni differenziali ordinarie di vario ordine in cui l'incognita è una ennupla di funzioni  $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ . Ma possiamo osservare che un sistema di equazioni differenziali ordinarie di ordine anche maggiore di 1, come anche una singola equazione differenziale ordinaria di ordine  $m > 1$ , è sempre equivalente ad un sistema di equazioni differenziali del I ordine ancora in forma normale se lo sono l'equazione o il sistema di partenza. Un sistema del I ordine in forma normale si presenta nel modo seguente:

$$x'_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.1.3)$$

con  $f_1, f_2, \dots, f_n$  funzioni reali in  $n + 1$  variabili reali, assegnate in  $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , generalmente aperto. Se usiamo le seguenti notazioni compatte:

$$x := (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x' := (x'_1, x'_2, \dots, x'_n), \quad f := (f_1, f_2, \dots, f_n),$$

il sistema (4.1.3) si può scrivere nella forma:

$$x' = f(t, x). \quad (4.1.4)$$

Possiamo formulare anche il problema di Cauchy per il sistema (4.1.4) scritto in forma compatta, associando al sistema le condizioni iniziali o di Cauchy anch'esse scritte in forma compatta:

$$x(t_0) = x_0$$

dove

$$(t_0, x_0) \in A, \quad x(t_0) = (x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)), \quad x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}).$$

Anche per i sistemi differenziali ordinari del I ordine sussistono teoremi di esistenza ed unicità locale o globale della soluzione del problema di Cauchy.

Se allora abbiamo un fenomeno che dipende dal tempo, individuato dalla funzione  $x(t)$  soddisfacente l'equazione differenziale ordinaria (4.1.2) o da una ennupla di funzioni soddisfacente il sistema differenziale (4.1.4), sotto opportune ipotesi, note le condizioni iniziali, siamo in grado di prevedere con esattezza come evolve al trascorrere del tempo. Diciamo allora che un fenomeno siffatto è descritto mediante un **processo deterministico**.

Consideriamo un esempio di fenomeno fisico descritto mediante un processo deterministico.

Vogliamo stabilire quale posizione occuperà all'istante  $t$  il punto materiale libero  $(P, m)$ , di massa  $m$ , in moto rispetto ad un dato osservatore, note la forza totale agente sul punto e la posizione e la velocità del punto stesso all'istante iniziale. Il moto del punto, com'è noto, è governato dall'equazione fondamentale della dinamica:

$$m \vec{a} = \vec{F}(t, P, \vec{v}) \quad (4.1.5)$$

dove  $\vec{a}$  è l'accelerazione del punto,  $(P, \vec{F})$  è la forza totale agente sul punto della quale è nota la dipendenza dal tempo  $t$ , dalla posizione  $P$  del punto e dalla sua velocità  $\vec{v}$ .

A tale equazione associamo le condizioni iniziali

$$P(t_0) = P_0, \quad \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0,$$

essendo  $t_0$  l'istante iniziale.

Sia  $Ox_1x_2x_3$  il riferimento cartesiano ortonormale associato all'osservatore ed indichiamo con  $(x_1, x_2, x_3)$  la terna delle coordinate cartesiane del punto e con  $(F_1, F_2, F_3)$  la terna delle componenti di  $\vec{F}$  rispetto alla base che individua il riferimento. Allora l'equazione vettoriale (4.1.5) è equivalente al seguente sistema di tre equazioni differenziali del secondo ordine nella terna di funzioni incognite  $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ :

$$m x_i'' = F_i(t, x_1, x_2, x_3, x_1', x_2', x_3') \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.1.6)$$

Il sistema (4.1.6) si può scrivere in forma normale dividendo entrambi i membri delle tre equazioni per  $m$ :

$$x_i'' = \frac{F_i(t, x_1, x_2, x_3, x_1', x_2', x_3')}{m} \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.1.7)$$

Al sistema (4.1.7) associamo le condizioni iniziali scritte nella forma

$$x_i(t_0) = x_{0i}, \quad x_i'(t_0) = v_{0i} \quad i = 1, 2, 3,$$

dove  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$  è la terna delle coordinate cartesiane della posizione  $P_0$  occupata dal punto all'istante  $t_0$  e  $(v_{01}, v_{02}, v_{03})$  è la terna delle componenti della velocità iniziale  $\vec{v}_0$  del punto lungo gli assi del riferimento.

Otteniamo così un problema di Cauchy per un sistema in forma normale di tre equazioni differenziali ordinarie del II ordine in tre funzioni incognite.

Se le funzioni  $F_i(t, x_1, x_2, x_3, x_1', x_2', x_3')$ , per  $i = 1, 2, 3$  sono sufficientemente regolari, il problema ammette una ed una sola soluzione per  $t \geq t_0$ .

Perciò note la posizione e la velocità iniziale del punto materiale, siamo in grado di stabilire esattamente la posizione che questo occupa ad ogni istante successivo a quello iniziale.

Il moto del punto materiale è dunque descritto mediante un **processo deterministico**, poichè, note le condizioni iniziali, siamo in grado di prevederne l'evoluzione.

Vediamo ora un esempio che interviene in biologia o nelle scienze sociali.

Se indichiamo con  $x(t)$  la popolazione di una data specie all'istante  $t$ , nell'ipotesi che questa sia isolata, cioè che non ci siano immigrazioni ed emigrazioni, e che l'ambiente in cui vive sia molto popolato, il più semplicistico modello di crescita di tale popolazione è il seguente:

$$x' = ax$$

con  $a$  costante positiva (modello di Malthus).

Se allora assumiamo che all'istante iniziale  $t_0$  la popolazione sia  $x_0$ , per sapere quale valore avrà raggiunto la popolazione al tempo  $t$ , dovremo risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{aligned} x' &= ax \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

L'equazione differenziale che interviene nel nostro problema è un'equazione differenziale ordinaria del I ordine, lineare, omogenea, a coefficienti costanti.

Com'è noto, la sua soluzione generale (cioè l'insieme di tutte le sue soluzioni) è data da

$$x(t) = C_1 e^{at}$$

con  $C_1$  costante arbitraria da determinarsi tramite la condizione iniziale.

La soluzione del problema di Cauchy considerato, come si può verificare facilmente, è la seguente:

$$x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)}.$$

Dunque, se una popolazione segue il modello di Malthus, la sua crescita è esponenziale ed è descritta mediante un processo deterministico.

E' da rilevare che se si considera la specie umana e si pone  $a = 0,02$ , il modello di Malthus è in accordo con i dati reali relativi alla crescita della popolazione umana sulla terra nel periodo tra il 1700 e il 1961. Non è invece realistico per gli anni successivi perché prevede una crescita eccessivamente elevata (nel 2510 la popolazione sulla terra dovrebbe essere di 200.000 bilioni).

Dunque tutti quei fenomeni evolutivi che sono governati da un'equazione differenziale ordinaria o da un sistema di equazioni differenziali ordinarie (per i quali sussistono teoremi di esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy) sono descritti mediante processi deterministici, perché associando le condizioni iniziali possiamo prevederne con esattezza l'evoluzione.

Ma possiamo avere molti altri fenomeni la cui evoluzione non è prevedibile, perché viene influenzata da eventi casuali. Ad esempio, la crescita di una popolazione, per la quale prima abbiamo considerato il modello di Malthus, può essere influenzata da numerosissimi eventi casuali come siccità, abbondanza, catastrofi naturali, guerre e così via.

In particolare nel settore finanziario, non è possibile prevedere con esattezza il prezzo futuro di un dato titolo rischioso, ad esempio un'azione, conoscendone la storia passata, perché questo presenta un'influenza del caso. Infatti un evento del tutto imprevedibile, come il fallimento di una società, lo scoppio improvviso di un conflitto, la caduta di un governo, un atto terroristico di notevole violenza possono produrre delle notevoli oscillazioni nel prezzo dei titoli quotati in Borsa. Ne è un esempio il terremoto prodotto su tutte le Borse mondiali dall'attentato alle Torri Gemelle di New York.

A causa delle frequenti ed intense variazioni dovute ad eventi casuali la funzione che alla variabile temporale  $t$  associa il valore di un'azione non risulta derivabile e dunque non può essere soluzione di un'equazione differenziale ordinaria.

Per descrivere quei fenomeni la cui evoluzione è influenzata da eventi casuali non è più adeguata l'analisi matematica classica ed occorre introdurre i **processi stocastici** studiati nell'ambito del calcolo stocastico che, come già abbiamo osservato, è basato sulla teoria della probabilità. Per un fenomeno descritto mediante un processo stocastico non è possibile prevederne l'evoluzione con esat-

tezza, ma ci si limita solo a fare delle previsioni sulle sue possibili evoluzioni a seconda degli stati che si possono presentare.

## 4.2 Processi stocastici: generalità.

Sia  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  uno spazio di probabilità e sia  $\Lambda$  un insieme non vuoto, i cui elementi sono gli istanti che vengono presi in considerazione ai fini dello studio del fenomeno evolutivo.

In genere  $\Lambda$  è l'intervallo seminfinito  $[0, +\infty)$  o l'intervallo chiuso e limitato  $[0, T]$  o un sottoinsieme numerabile di  $\mathbb{R}$  o anche  $\mathbb{N}$ .

**Definizione 4.4.** *Un processo stocastico è un'applicazione*

$$X : \Lambda \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{R}^n \text{)}$$

*tale che  $\forall t$  fissato  $\in \Lambda$*

$$X(t, \cdot) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{R}^n \text{)}$$

*è una variabile casuale sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .*

**Definizione 4.5.** *Definiamo realizzazione o traiettoria o funzione campione del processo stocastico relativa allo stato  $\omega$  fissato in  $\Omega$  la funzione del tempo*

$$X(\cdot, \omega) : \Lambda \longrightarrow \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{R}^n \text{)}.$$

Dunque un processo stocastico si può vedere come una famiglia di variabili casuali dipendente dal parametro reale  $t$  che varia in  $\Lambda$  o come l'insieme di tutte le traiettorie (o realizzazioni o funzioni campione) relative agli stati, che sono funzioni del tempo definite in  $\Lambda$ .

Se  $\Lambda$  è un'infinità numerabile di istanti  $\{t_i\}_{i=1,2,\dots}$  o se  $\Lambda = \mathbb{N}$  si parla di **processo stocastico discreto** o di **successione di variabili casuali**.

Nel seguito useremo la notazione  $X_t(\cdot)$  in luogo di  $X(t, \cdot)$  e dunque scriveremo  $X_t(\omega)$  in luogo di  $X(t, \omega)$ .

Se riguardiamo un processo stocastico come una famiglia di variabili casuali dipendente dal parametro  $t$ , lo dovremmo denotare nel modo seguente:  $\{X_t\}_{t \in \Lambda}$ , ma noi spesso per brevità scriveremo semplicemente  $X_t$ .

Nel seguito ci limiteremo a considerare processi stocastici a valori reali e spesso per noi  $\Lambda$  sarà dato da  $[0, T]$  o da  $[0, +\infty)$ .

Per poter fare delle previsioni future in un dato istante  $t$  su un processo stocastico, si deve disporre di un certo insieme di informazioni  $\mathcal{I}_t$  al tempo  $t$ . Dal

punto di vista matematico, per quanto abbiamo visto nel Capitolo 3, le strutture informative  $\mathcal{I}_t$  sono sotto  $\sigma$ -algebre di  $\mathcal{A}$ .

Dunque, se si vogliono determinare i valori attesi futuri di un processo stocastico al fine di prendere una decisione, si devono specificare le informazioni correnti di cui si dispone. Nei modelli finanziari si assume che i prezzi delle azioni, passati e correnti, siano noti agli investitori e che questi non posseggano informazioni future.

In generale, quando si studiano processi stocastici, si suppone di avere a disposizione una struttura informativa che varia a trascorrere del tempo:  $\{\mathcal{I}_t\}_{t \in \Lambda}$ , ossia una famiglia di strutture informative dipendente dal parametro  $t$ .

Col passare del tempo, le informazioni utilizzate per fare previsioni su un processo stocastico aumentano, se si assume che le informazioni passate non vadano perdute. Per  $t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots$  si ha perciò una successione crescente di  $\sigma$ -algebre  $\mathcal{I}_{t_0} \subset \mathcal{I}_{t_1} \subset \dots \subset \mathcal{I}_{t_i} \subset \mathcal{I}_{t_{i+1}} \subset \dots$ .

**Definizione 4.6.** *Definiamo filtrazione su  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  una famiglia crescente  $\{\mathcal{I}_t\}_{t \geq 0}$  di sotto  $\sigma$ -algebre di  $\mathcal{A}$ , cioè tale che  $\mathcal{I}_s \subset \mathcal{I}_t$  se  $s < t$ .*

Sia dato il processo stocastico  $X_t$  con  $t \geq 0$  cui è associata la filtrazione  $\{\mathcal{I}_t\}_{t \geq 0}$  che fornisce le informazioni relative al processo istante per istante. Se siamo al tempo  $t$  e se, in base alle informazioni che abbiamo al tempo  $t$ , vogliamo fare delle previsioni future sul processo stocastico, ad esempio relative al tempo  $T > t$ , ricorreremo all'aspettativa condizionata di  $X_T$  data la struttura informativa  $\mathcal{I}_t$ , ossia

$$E[X_T | \mathcal{I}_t], \quad t < T$$

e potremo sfruttarne, se necessario, le proprietà viste nel capitolo precedente.

**Definizione 4.7.** *Si dice che il processo stocastico  $X_t$  è adattato alla filtrazione  $\{\mathcal{I}_t\}_{t \in \Lambda}$  se per ogni  $t \in \Lambda$  la variabile casuale  $X_t$  è misurabile rispetto a  $\mathcal{I}_t$ .*

Ricordiamo che la variabile casuale  $X_t$  è misurabile rispetto a  $\mathcal{I}_t$  se tutti gli insiemi  $\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \leq x\}$  con  $x \in \mathbb{R}$  sono in  $\mathcal{I}_t$ .

Spesso, dato il processo stocastico  $X_t$ , la scelta più semplice di filtrazione, rispetto alla quale  $X_t$  è adattato, è la filtrazione  $\{\mathcal{I}_t\}_{t \in \Lambda}$  tale che:

$$\mathcal{I}_t = \sigma(\{X_s; 0 \leq s \leq t\}), \quad t \in \Lambda,$$

ossia  $\mathcal{I}_t$  è la più piccola  $\sigma$ -algebra rispetto alla quale tutti gli  $X_s$ , con  $0 \leq s \leq t$ , sono misurabili. Dunque è la più piccola  $\sigma$ -algebra contenente tutti gli insiemi  $\{\omega \in \Omega : X_s(\omega) \leq x\}$  al variare di  $x$  in  $\mathbb{R}$  ed al variare di  $s$  in  $[0, t]$ . In tal caso si parla di **filtrazione naturale**.

Disporre di questi insiemi informativi significa che tutte le informazioni che si hanno al tempo  $t$  su ogni stato  $\omega$  sono quelle che si ottengono dai valori  $X_s(\omega)$  con  $s \leq t$ .

Se  $X_t$  è il prezzo di un'azione, significa assumere che il prezzo al tempo  $t$  si forma sulla base dell'andamento che si osserva sul mercato fino al tempo  $t$ .

**Definizione 4.8.** *Dato lo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , sia  $\Lambda$  un intervallo reale del tipo  $[0, T]$  o  $[0, +\infty]$ . Il processo stocastico  $X : \Lambda \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (o  $\mathbb{R}^n$ ) si dice misurabile se è misurabile rispetto alla  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}(\Lambda) \otimes \mathcal{A}$  dove  $\mathcal{B}(\Lambda)$  è la  $\sigma$ -algebra di Borel dell'intervallo  $\Lambda$ .*

Dunque la definizione di processo stocastico misurabile richiede non solo che  $X_t$  sia variabile casuale per ogni  $t \in \Lambda$ , ma la condizione più forte di misurabilità nella coppia di variabili  $(t, \omega)$ .

**Definizione 4.9.** *Un processo stocastico  $X_t$  si dice continuo a destra o a sinistra se quasi tutte le sue traiettorie sono funzioni continue del tempo a destra o a sinistra. Diciamo poi che  $X_t$  è continuo se lo sono quasi tutte le sue traiettorie.*

**Definizione 4.10.** *Siano  $X_t, Y_t$  due processi stocastici definiti sullo stesso spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  e per ogni  $t \in \Lambda$ .*

*Diciamo che  $X_t$  è una modificazione o versione di  $Y_t$  se per ogni fissato  $t \in \Lambda$  si ha:*

$$X_t = Y_t \quad \text{quasi sicuramente.}$$

*Diciamo che  $X_t, Y_t$  sono indistinguibili se per quasi tutti gli  $\omega \in \Omega$  si ha:*

$$X_t(\omega) = Y_t(\omega) \quad \forall t \in \Lambda.$$

Dalle definizioni date discende che per due processi indistinguibili quasi tutte le traiettorie coincidono, mentre se due processi sono l'uno la modificazione dell'altro possono avere traiettorie molto diverse.

E' chiaro che se  $X_t, Y_t$  sono indistinguibili allora sono modificazioni uno dell'altro, ma non è detto il viceversa. Tuttavia nel caso di processi stocastici continui si può provare che le due nozioni coincidono.

Facciamo un esempio di due processi stocastici che sono modificazioni uno dell'altro, ma non sono indistinguibili.

Consideriamo lo spazio di probabilità  $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), m)$  con  $m$  misura di Lebesgue ed i due processi stocastici  $X_t, Y_t$  così definiti  $\forall t \in [0, 1]$ :

$$X_t(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in [0, 1], \quad Y_t(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in [0, 1] \neq t, \quad Y_t(\omega) = 1 \quad \text{se } \omega = t.$$

E' evidente che i due processi sono modificazioni uno dell'altro, ma non sono indistinguibili poiché l'insieme

$$\{\omega \in [0, 1] : X_t(\omega) = Y_t(\omega) \quad \forall t \in [0, 1]\}$$

è vuoto. Notiamo comunque che tutte le traiettorie di  $Y_t$  non sono continue e che dunque  $Y_t$  non è un processo stocastico continuo.

**Definizione 4.11.** *Un processo stocastico  $X_t$  definito per  $t \in \Lambda = [0, T]$  o  $[0, +\infty)$  si dice progressivamente misurabile rispetto alla filtrazione  $\{\mathcal{I}_t\}_{t \in \Lambda}$  se per ogni  $t > 0$  si ha che  $X|_{[0, t] \times \Omega}$  è misurabile rispetto alla  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{I}_t$ , ossia se*

$$\{(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega : X_s(\omega) \leq x\} \in \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{I}_t \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chiaramente ogni processo progressivamente misurabile rispetto ad una filtrazione è anche misurabile e, per il teorema di Fubini e Tonelli, è anche adattato alla filtrazione.

Si può poi provare la seguente

**Proposizione 4.1.** *Ogni processo continuo a destra (o a sinistra) ed adattato ad una filtrazione è progressivamente misurabile rispetto alla filtrazione.*

**Definizione 4.12.** *Un processo stocastico  $X_t$  ( $t \geq 0$ ) è detto processo con incrementi indipendenti se  $\forall n \in \mathbb{N}$  e  $\forall (t_1, t_2, \dots, t_n)$  con  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$  le variabili casuali  $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  sono indipendenti.*

**Definizione 4.13.** *Un processo stocastico  $X_t$  ( $t \geq 0$ ) è detto processo stocastico stazionario se le variabili casuali  $X_t$  e  $X_{t+s}$  hanno la stessa distribuzione per ogni  $t \geq 0$  e  $s > 0$ .*

Nei paragrafi successivi esamineremo alcuni importanti esempi di processi stocastici.

## 4.3 Martingale.

La teoria delle martingale gioca un ruolo importante nella moderna teoria dei mercati finanziari. Intuitivamente, un processo stocastico si comporta come una martingala se le sue traiettorie non mostrano, in media, un particolare "trend" (cioè andamento), si comporta come una submartingala se, in media, il "trend" è crescente, come una supermartingala se, in media, il "trend" è decrescente.

**Definizione 4.14.** *Dato il processo stocastico  $X_t$ ,  $t \geq 0$ , si dice che è una martingala rispetto alla filtrazione  $\{\mathcal{I}_t\}_{t \geq 0}$  se:*

- 1) è adattato alla filtrazione  $\{\mathcal{I}_t\}_{t \geq 0}$ ;
- 2)  $X_t \in L^1(\Omega) \quad \forall t \geq 0$ ;
- 3)  $E[X_T | \mathcal{I}_t] = X_t$  quasi sicuramente  $\forall t, T$  con  $0 \leq t < T$ .

In particolare la proprietà 3) ci dice che se al tempo  $t$  vogliamo fare una previsione di un valore futuro di una martingala disponendo delle informazioni presenti al tempo attuale, allora la miglior previsione del valore futuro è il valore corrente stesso.

**Definizione 4.15.** Dato il processo stocastico  $X_t$ , si dice che è una *supermartingala* (submartingala) rispetto alla filtrazione  $\{\mathcal{I}_t\}_{t \geq 0}$  se:

- 1) è adattato alla filtrazione  $\{\mathcal{I}_t\}_{t \geq 0}$ ;
- 2)  $X_t \in L^1(\Omega) \quad \forall t \geq 0$ ;
- 3)  $E[X_T | \mathcal{I}_t] \leq X_t$  ( $E[X_T | \mathcal{I}_t] \geq X_t$ ) quasi sicuramente  $\forall t, T$  con  $0 \leq t < T$ .

**Osservazione 4.1.** Data una martingala, vediamo di calcolare l'aspettativa condizionata per l'incremento  $X_{t+\delta} - X_t$  con  $\delta > 0$  data la struttura informativa  $\mathcal{I}_t$ :

$$E[X_{t+\delta} - X_t | \mathcal{I}_t] = E[X_{t+\delta} | \mathcal{I}_t] - E[X_t | \mathcal{I}_t]$$

dove abbiamo fatto uso della linearità dell'aspettativa condizionata.

D'altra parte, per la proprietà 3) della definizione di martingala abbiamo

$$E[X_{t+\delta} | \mathcal{I}_t] = X_t.$$

Inoltre, poiché  $X_t$  è adattato alla filtrazione  $\{\mathcal{I}_t\}_{t \in \Lambda}$  grazie alla proprietà 1), si ha che  $X_t$  è misurabile rispetto alla  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{I}_t$  e quindi e per una proprietà dell'aspettativa condizionata (proprietà 4)):

$$E[X_t | \mathcal{I}_t] = X_t.$$

Perciò:

$$E[X_{t+\delta} - X_t | \mathcal{I}_t] = 0.$$

Dunque per le martingale i valori attesi condizionati per gli incrementi futuri sono nulli, ossia gli incrementi futuri sono imprevedibili. Per le martingale non ci si possono aspettare "tendenze" per il futuro.

Nel caso delle supermartingale e delle submartingale, si ha rispettivamente:

$$E[X_{t+\delta} - X_t | \mathcal{I}_t] \leq 0, \quad E[X_{t+\delta} - X_t | \mathcal{I}_t] \geq 0$$

ossia ci si può aspettare un "trend" decrescente e crescente rispettivamente.

Nella figura 4.1 sono rappresentate alcune traiettorie per una supermartingala e per una submartingala. Queste sono definite tramite un processo che introdurremo nel paragrafo successivo, cioè il processo di Wiener  $W_t$ .

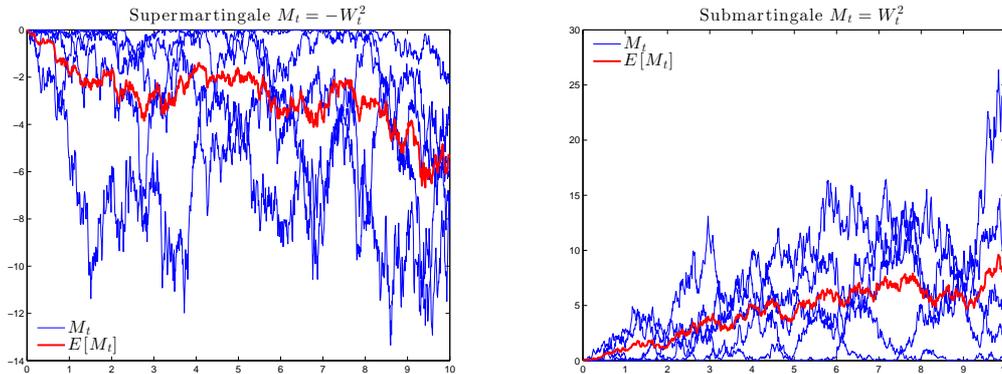


Figura 4.1: Esempio di una supermartingala e di una submartingala

#### Esempio 4.1.

Siano  $X$  una variabile casuale in  $L^1(\Omega)$  e  $\{\mathcal{I}_t\}_{t \geq 0}$  una filtrazione.

Poniamo  $M_t = E[X|\mathcal{I}_t]$ . Allora  $M_t$  è una martingala rispetto a  $\{\mathcal{I}_t\}_{t \geq 0}$ .

Infatti  $M_t$  gode delle tre proprietà che definiscono una martingala rispetto alla filtrazione  $\{\mathcal{I}_t\}_{t \geq 0}$ .

- 1) E' vera per la definizione di aspettativa condizionata;
- 2) E' vera sempre per la definizione di aspettativa condizionata;
- 3) Se  $t < T$  per la proprietà a torre si ha:

$$E[M_T|\mathcal{I}_t] = E[E[X|\mathcal{I}_T]|\mathcal{I}_t] = E[X|\mathcal{I}_t] = M_t.$$

Abbiamo visto che se  $X_t$  è una martingala, le sue variazioni future, data l'informazione corrente, sono imprevedibili. Ma in generale i prezzi dei titoli finanziari non sono completamente imprevedibili e l'investitore razionale si attende che, in media, crescano.

Per esempio, se  $B_t$  è il processo stocastico che rappresenta il prezzo al tempo attuale  $t$  di un'obbligazione che scade al tempo  $T$  con  $T > t$  e  $\mathcal{I}_t$  è l'insieme delle informazioni disponibili al tempo  $t$ , si ha

$$B_t < E[B_\tau|\mathcal{I}_t], \quad t < \tau < T,$$

ovvero  $B_t$  non segue una martingala, bensì una submartingala.

Un discorso analogo vale per i titoli rischiosi che abbiano rendimento atteso positivo, come, per esempio le azioni.

Le opzioni hanno invece un comportamento diverso; come abbiamo visto nel Capitolo 2 e come vedremo più in dettaglio nel Capitolo 7, il valore di un'opzione call europea diminuisce man mano che ci si avvicina alla scadenza, ossia si comporta come una supermartingala.

Nonostante che i prezzi delle attività finanziarie siano più frequentemente supero sub-martingale, questi con opportuni metodi possono essere trasformati in martingale per cui le martingale hanno acquistato notevole interesse nella moderna finanza. Comunque noi non insistiamo su tale questione.

## 4.4 Processi di Wiener e Moti Browniani.

I processi di Wiener giocano un ruolo importante nella descrizione, in tempo continuo, dell'andamento "normale" dei prezzi dei titoli di un mercato finanziario. Con l'aggettivo "normale" intendiamo escludere eventi rari, come un crollo finanziario.

Tali processi traggono il loro nome dal matematico Norbert Wiener che nel 1923 fornì una rappresentazione del moto Browniano, cioè del moto in un fluido di particelle molto piccole, come ad esempio particelle di polline. A causa delle infinite collisioni con atomi è impossibile osservarne le traiettorie esatte. Mediante un microscopio è solo possibile avere la conferma che il loro moto è totalmente caotico. Il termine "Browniano" deriva dal nome del botanico Robert Brown che scoprì questo tipo di moto nel 1827. Albert Einstein nel 1905 osservò che per fornire un modello matematico del moto Browniano occorre ricorrere al calcolo delle probabilità, ma la definitiva formalizzazione matematica di tale moto fu data da Wiener nel 1923. Tuttavia già nel 1900 L. Bachelier aveva utilizzato il moto Browniano per descrivere il movimento dei prezzi azionari e degli altri indici finanziari sul mercato azionario di Parigi anche in assenza totale di un modello matematico.

Vediamo la definizione formale di processo di Wiener standard.

**Definizione 4.16.** *Un processo di Wiener standard è un processo stocastico  $W_t$  con  $t \geq 0$  tale che:*

- $W_0 = 0$  quasi sicuramente;
- $W_t$  ha incrementi indipendenti;

- ogni incremento  $W_t - W_s$  con  $0 \leq s < t$  ha distribuzione normale con media nulla e varianza  $t - s$ , ossia  $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$ .

Nella definizione di processo di Wiener non standard va modificata soltanto l'ultima proprietà nel modo seguente:

$$W_t - W_s \sim N(0, \sigma^2(t - s)) \quad \forall 0 \leq s < t$$

con  $\sigma$  costante positiva.

Per semplicità nel seguito ci limiteremo a prendere in considerazione solo processi di Wiener standard.

Stabiliamo alcune proprietà di un processo di Wiener.

- 1)  $E[W_t] = 0 \quad \forall t \geq 0$ ,  
cioè il valore atteso di un processo di Wiener è nullo.  
Infatti, essendo  $W_0 = 0$ , abbiamo  $W_t = W_t - W_0$  da cui

$$E[W_t] = E[W_t - W_0] = 0$$

poiché ogni incremento  $W_t - W_s$  con  $0 \leq s < t$  ha valore atteso nullo per definizione;

- 2) un processo di Wiener ha incrementi stazionari.  
E' un'immediata conseguenza della terza proprietà che interviene nella definizione di processo di Wiener;
- 3) un processo di Wiener è una martingala rispetto alla filtrazione naturale.

Dimostrazione

In primo luogo ricordiamo che la filtrazione naturale per  $W_t$  è la famiglia di  $\sigma$ -algebre  $\{\mathcal{I}_t\}_{t \geq 0}$  tale che:

$$\mathcal{I}_t = \sigma(\{W_s : 0 \leq s \leq t\}).$$

Per dimostrare che  $W_t$  rispetto alla filtrazione naturale è una martingala, dobbiamo far vedere che sono soddisfatte le tre proprietà che definiscono una martingala. La prima è soddisfatta automaticamente per la scelta della filtrazione.

Per provare la seconda, ossia che  $W_t \in L^1(\Omega) \quad \forall t \geq 0$ , basta osservare che, essendo  $W_0 = 0$ , tale condizione è certamente verificata per  $t = 0$ , mentre  $\forall t > 0$   $W_t$  ha una distribuzione gaussiana con media nulla e varianza  $t$  per cui

$$\int_{\Omega} |W_t| dP = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\} dx < +\infty.$$

Dimostriamo la terza proprietà, ossia che

$$E[W_t | \mathcal{I}_s] = W_s \quad \text{per } 0 \leq s < t.$$

Grazie alla definizione di filtrazione naturale, è sufficiente mostrare che

$$E[W_t | W_s] = W_s \quad \text{per } 0 \leq s < t. \quad (4.4.1)$$

D'altra parte, per  $0 \leq s < t$  il primo membro della (4.4.1) si può scrivere nella forma:

$$E[W_t | W_s] = E[W_t - W_s + W_s | W_s] = E[W_t - W_s | W_s] + E[W_s | W_s], \quad (4.4.2)$$

avendo sfruttato la linearità dell'aspettativa condizionata.

Se poi teniamo presente che, per definizione di processo di Wiener, gli incrementi  $W_t - W_s$  e  $W_s = W_s - W_0$  con  $s < t$  sono indipendenti, grazie ad una proprietà dell'aspettativa condizionata, otteniamo:

$$E[W_t - W_s | W_s] = E[W_t - W_s] = 0. \quad (4.4.3)$$

Dunque, per le (4.4.2), (4.4.3), deduciamo

$$E[W_t | W_s] = E[W_s | W_s] = W_s \quad \text{per } 0 \leq s < t,$$

che è il risultato che ci proponevamo di ottenere. Nell'ultimo passaggio poiché  $W_s$  è misurabile rispetto alla  $\sigma$ -algebra da esso generata abbiamo applicato la proprietà 3) dell'aspettativa condizionata.

- 4) Se  $W_t$  è un processo di Wiener, allora  $W_t^2 - t$  per  $t \geq 0$  è una martingala rispetto alla filtrazione  $\{\mathcal{I}_t\}_{t \geq 0}$ .

Per la dimostrazione rimandiamo all'Appendice 2 dell'ultimo capitolo.

Osserviamo che da tale proprietà di un processo di Wiener discende che i due processi stocastici  $W_t^2$  e  $-W_t^2$  sono rispettivamente una submartingala e una supermartingala (vedi Figura 4.1).

- 5) Poiché  $\sigma_{W_t}^2 = t$ , la varianza di  $W_t$  cresce illimitatamente per  $t \rightarrow +\infty$ , mentre la media è nulla ad ogni  $t$ . Di conseguenza, le tipiche traiettorie assumono valori sempre più grandi, in valore assoluto, al trascorrere del tempo.

Studiamo ora le proprietà di regolarità delle traiettorie di un processo di Wiener. A tal fine enunciamo il seguente

**Teorema 4.1. Teorema di continuità di Kolmogorov.** *Sia  $X_t$  con  $t \in [0, T]$  un processo stocastico a valori reali sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  per il quale esistano tre costanti  $C, \alpha, \beta > 0$  in modo tale che per ogni  $s, t \in [0, T]$  si abbia:*

$$E[|X_t - X_s|^\beta] \leq C |t - s|^{1+\alpha}. \quad (4.4.4)$$

Allora  $X_t$  ha quasi tutte le traiettorie continue in  $t$ .

Conseguenza di tale teorema è il seguente

**Teorema 4.2.** *Un processo di Wiener  $W_t$  con  $t \geq 0$  ha traiettorie continue quasi sicuramente.*

Dimostrazione

La dimostrazione sfrutta la terza delle tre proprietà che definiscono un processo di Wiener, ossia la proprietà che gli incrementi  $W_t - W_s$  con  $s < t$  hanno distribuzione gaussiana con media nulla e varianza  $t - s$ . Ricordando l'espressione dei momenti di ordine pari della differenza tra una variabile casuale con distribuzione gaussiana e la sua media (vedi pag. 121, Cap. 3), si ha che, preso l'intervallo  $[0, T]$  con  $T$  arbitrario, per ogni  $s, t \in [0, T]$  con  $s < t$  sussiste la seguente relazione

$$E[(W_t - W_s)^{2k}] = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k - 1)(t - s)^k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Se prendiamo  $k = 2$ , la relazione precedente assume la forma

$$E[(W_t - W_s)^4] = 3(t - s)^2. \quad (4.4.5)$$

Ovviamente, dalla (4.4.5), segue che  $\forall s, t \in [0, T]$

$$E[|W_t - W_s|^4] = 3|t - s|^2. \quad (4.4.6)$$

E' allora possibile applicare il teorema di continuità di Kolmogorov prendendo  $\beta = 4$ ,  $C = 3$ ,  $\alpha = 1$ . Dunque concludiamo che quasi tutte le traiettorie di un processo di Wiener sono continue  $\forall t \in [0, +\infty)$ , ossia un processo di Wiener è continuo.

Poichè per il teorema precedente abbiamo ottenuto che  $W_t$  è un processo stocastico continuo, per la proposizione 4.1 concludiamo che ogni processo di Wiener risulta progressivamente misurabile rispetto alla filtrazione naturale  $\{\mathcal{I}_t\}_{t \geq 0}$  e quindi misurabile, cioè misurabile rispetto alla  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}([0, +\infty)) \otimes \mathcal{A}$ .

Vediamo infine, senza dimostrazione, due altri risultati relativi alla regolarità delle traiettorie di un processo di Wiener.

**Teorema 4.3.** *Un processo di Wiener ha quasi tutte le traiettorie non derivabili rispetto al tempo  $\forall t \in [0, +\infty)$ .*

La non derivabilità delle traiettorie di un processo di Wiener corrisponde alla loro estrema irregolarità.

**Corollario 4.1. Corollario del teorema 4.3.** *Quasi ogni traiettoria di un processo di Wiener ha variazione illimitata su ogni intervallo di tempo finito.*

Per completezza richiamiamo la definizione di funzione (di una sola variabile reale) a variazione limitata.

Dato un intervallo reale  $[a, b]$ , consideriamo una funzione  $g$  a valori in  $\mathbb{R}$  definita in  $[a, b]$  ed una partizione  $\Pi$  dell'intervallo  $[a, b]$  ottenuta mediante i punti:

$$t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b.$$

La variazione di  $g$  relativa a  $\Pi$  è definita da

$$V_{[a,b]}(g, \Pi) = \sum_{j=1}^n |g(t_j) - g(t_{j-1})|.$$

**Definizione 4.17.** *La funzione  $g$  ha variazione limitata su  $[a, b]$  se l'estremo superiore di  $V_{[a,b]}(g, \Pi)$  al variare di tutte le partizioni  $\Pi$  dell'intervallo  $[a, b]$  è finito, ossia se*

$$V_{[a,b]}(g) = \sup_{\Pi} V_{[a,b]}(g, \Pi) < +\infty.$$

$V_{[a,b]}(g)$  è detta *variazione (prima) di  $g$  su  $[a, b]$ .*

La classe delle funzioni a variazione limitata sull'intervallo  $[a, b]$  è denotata con  $BV([a, b])$ .

Esempi di funzioni appartenenti alla classe  $BV([a, b])$  sono le funzioni monotone e le funzioni lipschitziane.

Il seguente teorema fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione sia a variazione limitata.

**Teorema 4.4.** *Una funzione reale ha variazione limitata se e solo se è differenza di due funzioni monotone non decrescenti.*

Una ulteriore proprietà delle funzioni a variazione limitata è espressa dal seguente

**Teorema 4.5.** *Una funzione reale a variazione limitata è derivabile quasi ovunque.*

In figura 4.2 sono rappresentate alcune traiettorie di un processo di Wiener.

Concludiamo il capitolo osservando che ci siamo limitati a dare la definizione di processo di Wiener a valori in  $\mathbb{R}$ , ma ovviamente si può dare anche la definizione di processo di Wiener a valori in  $\mathbb{R}^n$ .

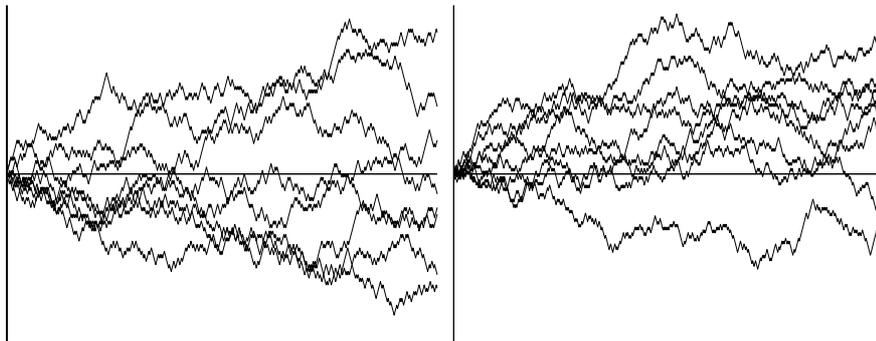


Figura 4.2: Traiettorie di un processo di Wiener



# Capitolo 5

## Integrale stocastico di Itô

### 5.1 Premesse.

Nella moderna teoria dei mercati finanziari, come già osservato più volte, svolgono un ruolo fondamentale i processi stocastici e in particolari i processi di Wiener.

Nel Capitolo precedente abbiamo visto che quasi tutte le traiettorie dei processi di Wiener non sono derivabili rispetto al tempo e che ogni loro porzione non è a variazione limitata. Ciò comporta che i tradizionali strumenti dell'Analisi Matematica classica risultano insufficienti. In particolare risultano inadeguati la nozione di integrale di Riemann-Stieltjes, che è una generalizzazione dell'integrale di Riemann, e il concetto di differenziale classico. Occorre utilizzare un nuovo calcolo, il calcolo stocastico.

Il calcolo stocastico è nato con lo scopo di dare significato alle equazioni differenziali che descrivono i processi stocastici. Esso ha origine dai lavori pionieristici di **N. Wiener** (1923), i cui risultati furono generalizzati da **K. Itô** (1944) ed esposti da **J. L. Doob** (1953), **I. Gikhman** e **A. V. Skorokhod** (1969), **L. Arnold** (1974).

Nel 1966 **R. L. Stratonovich** diede una definizione di integrale stocastico diversa da quella data da Itô, ma noi tratteremo solo di quest'ultima perché la letteratura di teoria economica e finanziaria si basa principalmente sul calcolo di Itô.

E' comunque importante rilevare che il calcolo stocastico trova applicazione, non solo in ambito finanziario, ma in moltissimi altri campi.

Citiamone alcuni:

- Ingegneria aerospaziale: determinazione dell'orbita di satelliti, stima di posizione e velocità di veicoli spaziali, stima di traiettorie di rientro di capsule

spaziali, come nelle Missioni Ranger, Mariner e Apollo della NASA, incluso Apollo 11 (primo sbarco sulla luna);

- Navigazione automatica di veicoli aerei, subacquei, terrestri, ecc.;
- Studio dei circuiti elettrici, Predizione delle maree, Biomedicina, Armi, Scienze sociali, ecc..

Il calcolo stocastico di Itô ha gli stessi scopi del calcolo classico dell'Analisi Matematica, ma le formule che si ottengono sono diverse da quelle classiche.

Il calcolo stocastico, come quello classico, si divide in calcolo differenziale e calcolo integrale.

In questo capitolo esporremo la teoria dell'integrazione di Itô e nel capitolo successivo il calcolo differenziale poiché il differenziale stocastico assume significato solo in virtù del concetto di integrale.

## 5.2 Richiami sull'integrale di Riemann. Integrale di Riemann-Stieltjes.

Richiamiamo dapprima la definizione di **integrale di Riemann** dell'Analisi Matematica classica.

Sia  $G(t)$  una funzione a valori reali limitata, definita sull'intervallo  $[t_0, T]$ , e consideriamo una partizione  $\Pi$  dell'intervallo  $[t_0, T]$  ottenuta mediante i punti:

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n = T.$$

**Definizione 5.1.** *Chiamiamo somma di Riemann della funzione  $G$  relativa alla partizione  $\Pi$  la seguente somma:*

$$\sum(G, \Pi) = \sum_{j=1}^n G(\tau_j) (t_j - t_{j-1})$$

dove  $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$  per  $j = 1, 2, \dots, n$ .

**Definizione 5.2.** *Se esiste un numero  $I$  tale che  $\forall \epsilon > 0$  è possibile trovare una partizione  $\Pi_\epsilon$  dell'intervallo  $[t_0, T]$  mediante i punti:  $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  che goda della proprietà che per ogni scelta di  $\tau_j$  in  $[t_{j-1}, t_j]$  risulti*

$$\left| \sum(G, \Pi_\epsilon) - I \right| < \epsilon,$$

allora la funzione  $G$  è detta integrabile secondo Riemann in  $[t_0, T]$  e  $I$ , denotato

con  $\int_{t_0}^T G(t) dt$ , è detto integrale di Riemann di  $G$  da  $t_0$  a  $T$ .

È ben noto che ogni funzione continua nell'intervallo  $[t_0, T]$  è integrabile secondo Riemann su tale intervallo.

Vediamo ora una generalizzazione, sempre in ambito classico, dell'integrale di Riemann: l'**integrale di Riemann-Stieltjes**.

Diamo la seguente definizione.

**Definizione 5.3.** *Date le due funzioni  $G(t)$ ,  $S(t)$ , con  $G(t)$  limitata e  $S(t)$  a variazione limitata, definite sullo stesso intervallo  $[t_0, T]$ , e, considerata la partizione  $\Pi$  dell'intervallo  $[t_0, T]$  ottenuta mediante i punti:  $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ , definiamo somma di Riemann-Stieltjes della funzione  $G$  rispetto alla funzione  $S$  relativa alla partizione  $\Pi$  la somma seguente:*

$$\sum(G, S, \Pi) = \sum_{j=1}^n G(\tau_j) [S(t_j) - S(t_{j-1})]$$

dove  $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$  per  $j = 1, 2, \dots, n$ .

**Definizione 5.4.** *Se esiste un numero  $I$  tale che  $\forall \epsilon > 0$  è possibile trovare una partizione  $\Pi_\epsilon$  dell'intervallo  $[t_0, T]$  mediante i punti:  $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  che goda della proprietà che per ogni scelta di  $\tau_j$  in  $[t_{j-1}, t_j]$  risulti*

$$\left| \sum(G, S, \Pi_\epsilon) - I \right| < \epsilon,$$

allora la funzione  $G$  è detta integrabile rispetto a  $S$  secondo Riemann-Stieltjes in  $[t_0, T]$  e  $I$ , denotato con  $\int_{t_0}^T G(t) dS(t)$ , è detto integrale di Riemann-Stieltjes di  $G$  rispetto a  $S$  da  $t_0$  a  $T$ .

$G$  prende il nome di funzione integranda e  $S$  di integratore.

Una condizione sufficiente affinché una funzione  $G$  sia integrabile rispetto ad  $S$  secondo Riemann-Stieltjes è che sia continua.

Si osservi che l'integrale di Riemann è un caso particolare dell'integrale di Riemann-Stieltjes con integratore  $S(t) = t$ .

Si può anche provare la seguente proposizione:

**Proposizione 5.1.** *Se  $G$  è integrabile secondo Riemann sull'intervallo  $[t_0, T]$  e  $S$  è derivabile con derivata integrabile secondo Riemann sull'intervallo  $[t_0, T]$ , allora  $G$  è integrabile secondo Riemann-Stieltjes rispetto a  $S$  in  $[t_0, T]$  e si ha:*

$$\int_{t_0}^T G(t) dS(t) = \int_{t_0}^T G(t) S'(t) dt,$$

dove l'integrale al secondo membro è un integrale di Riemann.

Come abbiamo visto, nella definizione di integrale di Riemann-Stieltjes si richiede che l'integratore sia a variazione limitata. Ora, nel calcolo stocastico intervengono integrali in cui la funzione integranda può anche essere un processo stocastico  $G_t$  e l'integratore è un processo di Wiener,  $W_t$ , cioè integrali della forma

$$\int_{t_0}^T G_t dW_t.$$

Ovviamente in tal caso l'integrale non è un numero, ma una funzione a valori reali definita su  $\Omega$ , essendo  $G_t$  e  $W_t$  variabili casuali per cui:

$$\forall \omega \in \Omega \quad \left( \int_{t_0}^T G_t dW_t \right) (\omega) = \int_{t_0}^T G(t, \omega) dW(t, \omega).$$

Dunque nell'integrale sopra scritto compaiono le traiettorie di  $W_t$  relative ai vari stati  $\omega$ , che, come sappiamo, sono funzioni a variazione illimitata su ogni intervallo di tempo finito. E' evidente che allora non possiamo utilizzare la definizione classica di integrale di Riemann-Stieltjes.

Non risolveremmo il problema neppure se ricorressimo all'integrale di Lebesgue-Stieltjes, che è una generalizzazione dell'integrale di Lebesgue, poichè anche in tal caso si richiede che l'integratore sia una funzione a variazione limitata.

In calcolo stocastico occorre dunque dare una nuova definizione di integrale.

Nel paragrafo 4 definiremo l'integrale stocastico di Itô.

### 5.3 Nozioni preliminari.

Prima di definire l'integrale stocastico di Itô, enunciamo ora alcune proprietà delle successioni di variabili casuali su uno spazio di probabilità.

Anche per le successioni di variabili casuali sussiste il teorema della convergenza dominata che si dimostra seguendo lo stesso metodo che si utilizza nella teoria dell'integrazione secondo Lebesgue.

**Teorema 5.1. Teorema della convergenza dominata.** *Siano  $Y$  una variabile casuale non negativa sommabile sull'evento  $A$  e  $X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , una successione di variabili casuali tali che*

$$i) \quad |X_n(\omega)| \leq Y(\omega) \quad \forall \omega \in A, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

$$ii) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X \quad \text{q. s. in } A.$$

Allora  $X$  è sommabile su  $A$  e risulta:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A X_n dP = \int_A X dP.$$

Ovviamente se  $A = \Omega$  l'ultima parte della tesi del teorema si può scrivere nella forma

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E[X_n] = E[X].$$

Il teorema ammette il seguente corollario.

**Corollario 5.1.** *Siano  $A$  un evento e  $X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , una successione di variabili casuali tale che*

$$i) |X_n(\omega)| \leq M \quad \forall \omega \in A, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{con } M = \text{costante} > 0;$$

$$ii) \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X \quad \text{q. s. in } A.$$

Allora  $X$  è sommabile su  $A$  e risulta:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A X_n dP = \int_A X dP.$$

Il corollario che abbiamo enunciato sopra è anche noto come **Teorema della convergenza limitata**.

Introduciamo ora la seguente definizione.

**Definizione 5.5.** *Diciamo che la successione di variabili casuali  $X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , è una successione di Cauchy in media quadratica se  $X_n \in L^2(\Omega) \forall n \in \mathbb{N}$  ed inoltre*

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \text{ tale che } \forall n, m > n_\epsilon$$

*risulta*

$$E[|X_n - X_m|^2] < \epsilon.$$

E' facile verificare che se una successione  $X_n$  converge in media quadratica alla variabile casuale  $X$  è una successione di Cauchy in media quadratica. Ma è possibile provare anche il viceversa:

**Proposizione 5.2.** *Se  $X_n$  è una successione di Cauchy in media quadratica, allora esiste una variabile casuale  $X \in L^2(\Omega)$  tale che*

$$mq - \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X, \quad \text{ossia} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} E[|X_n - X|^2] = 0.$$

La proposizione 5.2 ci dice che lo spazio vettoriale normato  $L^2(\Omega)$ , con norma  $\|X\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{E[|X|^2]}$ , è completo. Dunque  $L^2(\Omega)$  è uno spazio di Banach. Questo risultato si può in effetti estendere ad ogni spazio  $L^p(\Omega)$  con  $p \geq 1$ .

## 5.4 Definizione di integrale di Itô.

Siano  $G(t, \omega)$  una funzione a valori reali definita in  $[t_0, T] \times \Omega$  e  $W_t$  un processo di Wiener.

Consideriamo dapprima il caso molto semplice in cui la funzione  $G$  è **costante**, ossia

$$G(t, \omega) = g = \text{costante} \quad \forall (t, \omega) \in [t_0, T] \times \Omega.$$

Allora definiamo l'integrale stocastico di Itô di  $G$  rispetto a  $W_t$  da  $t_0$  a  $T$  nel modo seguente:

$$I_G = \int_{t_0}^T G dW_t = g(W_T - W_{t_0}).$$

Ovviamente, essendo  $W_T$  e  $W_{t_0}$  variabili casuali, l'integrale  $I_G$  così definito è a sua volta una variabile casuale e dunque

$$\forall \omega \in \Omega \quad I_G(\omega) = g(W_T(\omega) - W_{t_0}(\omega)).$$

Nel caso di una generica funzione  $G(t, \omega)$  assumiamo che siano soddisfatte da  $G$  le ipotesi seguenti:

a) la funzione  $G$  è  $\mathcal{B}([t_0, T]) \otimes \mathcal{A}$ -misurabile.

Per la parte *i*) del teorema di Fubini e Tonelli si ha che  $\forall \omega$  fissato  $\in \Omega$  la funzione  $G(\cdot, \omega)$  definita in  $[t_0, T]$ , è  $\mathcal{B}([t_0, T])$ -misurabile e  $\forall t$  fissato  $\in [t_0, T]$  la funzione  $G(t, \cdot)$ , definita in  $\Omega$ , è  $\mathcal{A}$ -misurabile (cioè una variabile casuale). Dunque  $G$  è un processo stocastico misurabile definito per  $t \in [t_0, T]$ .

Inoltre, se si applica la prima parte della *ii*) del teorema di Fubini e Tonelli alla funzione  $G^2$ , considerando i tre spazi misura  $([t_0, T], \mathcal{B}([t_0, T]), m)$ ,  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ,  $([t_0, T] \times \Omega, \mathcal{B}([t_0, T]) \otimes \mathcal{A}, m \otimes P)$  dove  $m$  è la misura di Lebesgue, si deduce che la funzione che ad ogni  $\omega \in \Omega$  associa l'integrale di

Lebesgue  $\int_{t_0}^T |G(t, \omega)|^2 dt$  è  $\mathcal{A}$ -misurabile (cioè è una variabile casuale);

b)  $G(t, \omega)$  è non anticipante;

c) la variabile casuale  $\int_{t_0}^T |G(t, \cdot)|^2 dt \in L^1(\Omega)$  e dunque possiamo considerarne il valore atteso

$$E \left[ \int_{t_0}^T |G(t, \omega)|^2 dt \right].$$

Le condizioni *a*) e *c*) sono essenzialmente di carattere tecnico, mentre la *b*), che ora definiremo, detta **condizione di non anticipazione (NA)**, è la più significativa.

**Definizione 5.6.** Diciamo che la funzione stocastica  $G : [t_0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  soddisfa alla condizione di non anticipazione se  $\forall t \in [t_0, T]$   $G(t, \cdot)$  è misurabile rispetto alla  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{I}_{[t_0, t]} = \sigma(\{W_\tau : t_0 \leq \tau \leq t\})$ , ossia rispetto alla  $\sigma$ -algebra generata dai  $W_\tau$  con  $\tau \in [t_0, t]$ .

Facciamo qualche esempio di funzioni non anticipanti definite in  $[t_0, T] \times \Omega$ :

- $G(t, \omega) = G(t)$ , cioè  $G$  non dipende da  $\omega$ ;
- $G(t, \omega) = W_t(\omega)$ ;
- $G(t, \omega) = \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} |W_\tau(\omega)|$ .

Un esempio di funzione anticipante è

$$H(t, \omega) = \sup_{t_0 \leq \tau \leq 2t} |W_\tau(\omega)|.$$

**Osservazione 5.1.** Richiedere che la funzione  $G(t, \cdot)$  sia non anticipante equivale a richiedere che la variabile casuale  $G(t, \cdot)$  dipenda soltanto dai valori passati e correnti del processo di Wiener e non dai suoi valori futuri. Se teniamo presente la definizione di processo di Wiener per cui l'incremento  $W_s - W_t$  è indipendente da  $W_t = W_t - W_0$  se  $s > t$ , deduciamo che, grazie alla condizione di non anticipazione,  $G(t, \cdot)$  è indipendente da  $W_s - W_t$  con  $s > t$ .

Facciamo altre osservazioni conseguenza delle ipotesi *a*) e *c*).

**Osservazione 5.2.** Se la funzione  $G(t, \omega)$  ha traiettorie continue o continue a tratti con probabilità 1, allora l'integrale di Lebesgue  $\int_{t_0}^T |G(t, \omega)|^2 dt$  si riduce ad un integrale di Riemann con probabilità 1.

**Osservazione 5.3.** Dall'ipotesi *c*), che è conseguenza del fatto che definiremo l'integrale di Itô come limite in media quadratica, discende:

$$\int_{t_0}^T |G(t, \omega)|^2 dt < +\infty \quad \text{con probabilità 1,}$$

ossia la funzione  $G(\cdot, \omega) \in L^2([t_0, T])$  con probabilità 1.

Si potrebbe infatti provare la seguente proposizione:

**Proposizione 5.3.** *Sia  $X$  una variabile casuale non negativa sommabile sull'evento  $A$ , cioè tale che*

$$\int_A X dP < +\infty.$$

Allora

$$X < +\infty \text{ quasi sicuramente in } A.$$

Denotiamo con  $\mathcal{V}([t_0, T])$  la classe delle funzioni stocastiche soddisfacenti alle condizioni a), b), c).

Noi definiremo l'integrale di Itô per funzioni appartenenti alla classe  $\mathcal{V}([t_0, T])$ .

Consideriamo in primo luogo il caso particolare in cui la funzione stocastica  $G \in \mathcal{V}([t_0, T])$  sia **semplice elementare rispetto a  $t$** , ossia esista una partizione  $\Pi$  dell'intervallo  $[t_0, T]$  mediante i punti  $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  tale che:

$$\forall \omega \in \Omega \quad G(t, \omega) = g_j(\omega) \quad \text{se } t_{j-1} \leq t < t_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (5.4.1)$$

dove le variabili casuali  $g_j$  si suppongono limitate ed anche misurabili rispetto alla  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{I}_{[t_0, t_{j-1}]}$  per  $j = 1, 2, \dots, n$ , dovendo essere  $G$  non anticipante. Inoltre assumiamo:

$$\forall \omega \in \Omega \quad G(T, \omega) = g_n(\omega).$$

La (5.4.1) si può anche scrivere come

$$G(t, \omega) = \sum_{j=1}^n g_j(\omega) \chi_{[t_{j-1}, t_j)}(t) \quad \forall (t, \omega) \in [t_0, T) \times \Omega \quad \text{e} \quad G(T, \omega) = g_n(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega. \quad (5.4.2)$$

Con  $\chi_{[t_{j-1}, t_j)}$  denotiamo la funzione caratteristica dell'intervallo  $[t_{j-1}, t_j)$ .

**Osservazione 5.4.** Poiché supponiamo che le variabili casuali  $g_j$  siano limitate per  $j = 1, 2, \dots, n$ , la proprietà c) è soddisfatta automaticamente.

Infatti  $\forall \omega \in \Omega$  l'integrale di Lebesgue  $\int_{t_0}^T |G(t, \omega)|^2 dt$  coincide con l'integrale di Riemann dato da:

$$\int_{t_0}^T |G(t, \omega)|^2 dt = \sum_{j=1}^n g_j^2(\omega) (t_j - t_{j-1})$$

e per la limitatezza delle  $g_j$  deduciamo che

$$\exists M > 0 \quad \text{tale che} \quad \int_{t_0}^T |G(t, \omega)|^2 dt \leq M \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Ciò implica per le proprietà relative all'integrazione rispetto alla misura di probabilità  $P$  delle variabili casuali non negative

$$\int_{\Omega} \left( \int_{t_0}^T |G(t, \omega)|^2 dt \right) dP(\omega) \leq \int_{\Omega} M dP(\omega) = M < +\infty,$$

cosicché

$$\int_{t_0}^T |G(t, \cdot)|^2 dt \in L^1(\Omega).$$

**Definizione 5.7.** *Definiamo integrale di Itô della funzione stocastica semplice elementare  $G \in \mathcal{V}([t_0, T])$ , soddisfacente la (5.4.1), rispetto a  $W_t$  da  $t_0$  a  $T$  nel modo seguente:*

$$I_G(\omega) = \int_{t_0}^T G(t, \omega) dW_t(\omega) = \sum_{j=1}^n g_j(\omega) (W_{t_j}(\omega) - W_{t_{j-1}}(\omega)) \text{ con probabilità } 1. \quad (5.4.3)$$

E' evidente che l'integrale così definito è una variabile casuale. Nel seguito potremo anche omettere la dipendenza da  $\omega$ .

Vediamo di stabilire alcune proprietà dell'integrale di Itô per funzioni stocastiche semplici elementari in  $\mathcal{V}([t_0, T])$ .

I) *Linearità*

$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \forall G_1, G_2$ , *funzioni stocastiche semplici elementari in  $\mathcal{V}([t_0, T])$*

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^T [c_1 G_1(t, \omega) + c_2 G_2(t, \omega)] dW_t(\omega) = \\ & = c_1 \int_{t_0}^T G_1(t, \omega) dW_t(\omega) + c_2 \int_{t_0}^T G_2(t, \omega) dW_t(\omega) \text{ con probabilità } 1. \end{aligned}$$

La dimostrazione è immediata per la linearità della somma.

II) *Formula del valore atteso*

$\forall G$  *funzione stocastica semplice elementare  $\in \mathcal{V}([t_0, T])$*

$$E[I_G] = 0.$$

Dimostrazione

Per la definizione (5.4.3) e la linearità del valore atteso, abbiamo:

$$E[I_G] = E \left[ \sum_{j=1}^n g_j (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) \right] = \sum_{j=1}^n E[g_j (W_{t_j} - W_{t_{j-1}})]. \quad (5.4.4)$$

Ma per l'ipotesi di non anticipazione le variabili casuali  $g_j$  e  $W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$  risultano indipendenti per  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Dalla (5.4.4) otteniamo allora

$$E[I_G] = \sum_{j=1}^n E[g_j] E[W_{t_j} - W_{t_{j-1}}] = 0,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che il valore atteso degli incrementi di un processo di Wiener è nullo.

### III) *Formula della media quadratica o Isometria di Itô*

$\forall G$  funzione stocastica semplice elementare  $\in \mathcal{V}([t_0, T])$

$$E[I_G^2] = E \left[ \int_{t_0}^T |G(t, \omega)|^2 dt \right].$$

#### Dimostrazione

In primo luogo proviamo che  $I_G \in L^2(\Omega)$ .

Infatti per definizione

$$I_G = \int_{t_0}^T G dW_t = \sum_{j=1}^n g_j (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) \text{ con probabilità } 1$$

e d'altra parte gli incrementi del processo di Wiener  $W_{t_j} - W_{t_{j-1}} \in L^2(\Omega)$  per  $j = 1, 2, \dots, n$ , avendo distribuzione gaussiana, mentre le variabili casuali  $g_j$  sono per ipotesi limitate. Dunque le variabili casuali  $g_j [W_{t_j} - W_{t_{j-1}}] \in L^2(\Omega)$  per  $j = 1, 2, \dots, n$  e anche  $I_G \in L^2(\Omega)$  essendo la somma di  $n$  variabili casuali appartenenti allo spazio  $L^2(\Omega)$ .

Ora proviamo l'isometria di Itô.

Per la definizione (5.4.3)

$$\begin{aligned} E[I_G^2] &= E \left[ \left\{ \sum_{j=1}^n g_j (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) \right\}^2 \right] = \\ &= E \left[ \sum_{j=1}^n g_j^2 (W_{t_j} - W_{t_{j-1}})^2 + 2 \sum_{i < j=1}^n g_i g_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) \right]. \end{aligned}$$

Ora teniamo presente la linearità del valore atteso, l'indipendenza delle variabili casuali  $g_j$  e  $W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$  e l'indipendenza di  $g_i g_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$

da  $W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$  per  $i < j$ . Perciò otteniamo:

$$\begin{aligned} E[I_G^2] &= \sum_{j=1}^n E[g_j^2] E[(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})^2] + \\ &+ 2 \sum_{i < j=1}^n E[g_i g_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})] E[W_{t_j} - W_{t_{j-1}}]. \end{aligned}$$

D'altra parte

$$E[(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})^2] = t_j - t_{j-1}, \quad E[W_{t_j} - W_{t_{j-1}}] = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

per la definizione di processo di Wiener e quindi

$$\begin{aligned} E[I_G^2] &= \sum_{j=1}^n E[g_j^2(\omega)](t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=1}^n E[g_j^2(\omega)(t_j - t_{j-1})] = \\ &= E \left[ \sum_{j=1}^n g_j^2(\omega)(t_j - t_{j-1}) \right] = E \left[ \int_{t_0}^T |G(t, \omega)|^2 dt \right]. \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo tenuto presente che la funzione  $G^2(\cdot, \omega)$  è una funzione semplice elementare rispetto al tempo per ogni  $\omega$  fissato in  $\Omega$  e dunque

$$\sum_{j=1}^n g_j^2(\omega)(t_j - t_{j-1})$$

è il suo integrale di Riemann sull'intervallo  $[t_0, T]$  che, come osservato in precedenza, risulta finito  $\forall \omega \in \Omega$ , essendo le variabili casuali  $g_j$  limitate.

La relazione III) risulta così dimostrata.

Prima di dare la definizione generale di integrale stocastico di Itô, enunciamo il seguente

**Lemma 5.1.** *Sia  $G(t, \omega) \in \mathcal{V}([t_0, T])$ . Allora esiste una successione  $G_n(t, \omega)$  di funzioni stocastiche semplici elementari appartenenti alla classe  $\mathcal{V}([t_0, T])$  tale che*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E \left[ \int_{t_0}^T |G_n(t, \omega) - G(t, \omega)|^2 dt \right] = 0. \quad (5.4.5)$$

#### Dimostrazione

La dimostrazione si effettua mediante tre passi successivi.

#### **Passo 1.**

Supponiamo che  $F \in \mathcal{V}([t_0, T])$  sia limitata e tale che  $F(\cdot, \omega)$  sia continua in

$[t_0, T]$  per ogni  $\omega \in \Omega$ . Proviamo che esiste una successione  $G_n(t, \omega)$  di funzioni stocastiche semplici elementari appartenenti alla classe  $\mathcal{V}([t_0, T])$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E \left[ \int_{t_0}^T |G_n(t, \omega) - F(t, \omega)|^2 dt \right] = 0. \quad (5.4.6)$$

A tal fine per ogni intero positivo  $n$  consideriamo una partizione dell'intervallo  $[t_0, T]$  mediante i punti equidistanti  $t_0 < t_1^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} = T$  per cui

$$t_j^{(n)} = t_0 + \frac{j}{n} (T - t_0) \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Ora approssimiamo  $F$  con la successione di funzioni semplici elementari così definite:

$$\forall \omega \in \Omega \quad G_n(t, \omega) = F(t_{j-1}^{(n)}, \omega) \quad \text{se } t_{j-1}^{(n)} \leq t < t_j^{(n)} \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\forall \omega \in \Omega \quad G_n(T, \omega) = F(t_{n-1}^{(n)}, \omega).$$

In Figura 5.1 sono rappresentati i grafici in funzione del tempo di una funzione  $F(\cdot, \omega)$  (con  $\omega$  fissato in  $\Omega$ ) limitata e continua rispetto a  $t$  e del termine con  $n = 7$  della successione  $G_n(\cdot, \omega)$  (con  $\omega$  fissato in  $\Omega$ ) ottenuta nel modo detto sopra.

E' immediato verificare che, fissato arbitrariamente  $\omega$  in  $\Omega$ , grazie alla continuità di  $F$  rispetto a  $t$ , per  $n \rightarrow +\infty$  la successione  $G_n(\cdot, \omega)$  converge uniformemente a  $F(\cdot, \omega)$ , ossia

$$\forall \omega \text{ fissato in } \Omega \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{[t_0, T]} |G_n(t, \omega) - F(t, \omega)| = 0.$$

D'altra parte, come è noto dalla teoria dell'integrazione secondo Lebesgue, la convergenza uniforme implica la convergenza in  $L^2([t_0, T])$  e quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^T |G_n(t, \omega) - F(t, \omega)|^2 dt = 0 \quad \forall \omega \in \Omega. \quad (5.4.7)$$

Ma, essendo  $F$  limitata e quindi anche  $G_n$ , si ha che

$$\exists M > 0 \quad \text{tale che } \int_{t_0}^T |G_n(t, \omega) - F(t, \omega)|^2 dt \leq M \quad \forall \omega \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Allora, per il corollario del teorema della convergenza dominata si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \left( \int_{t_0}^T |G_n(t, \omega) - F(t, \omega)|^2 dt \right) dP = 0,$$

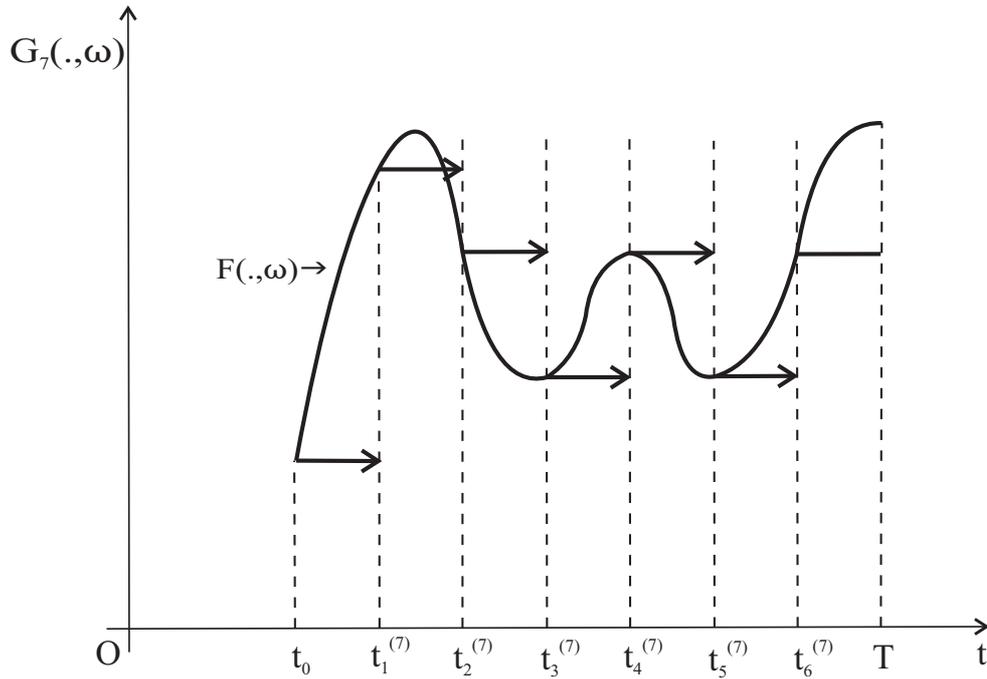


Figura 5.1: Grafici in funzione di  $t$  di  $F$  e  $G_7$  con  $\omega$  fissato

ossia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E \left[ \int_{t_0}^T |G_n(t, \omega) - F(t, \omega)|^2 dt \right] = 0,$$

come ci proponevamo di dimostrare.

**Passo 2.**

Sia  $H \in \mathcal{V}([t_0, T])$  limitata. Allora si può provare che esiste una successione di funzioni limitate  $F_n \in \mathcal{V}([t_0, T])$  con  $F_n(\cdot, \omega)$  continua in  $[t_0, T]$  per ogni  $\omega \in \Omega$  e per ogni  $n \in \mathbb{N}$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E \left[ \int_{t_0}^T |F_n(t, \omega) - H(t, \omega)|^2 dt \right] = 0. \quad (5.4.8)$$

Noi non svolgiamo la dimostrazione.

**Passo 3.**

Sia  $G \in \mathcal{V}([t_0, T])$ . Si potrebbe dimostrare, ma noi non lo faremo, che esiste una successione di funzioni limitate  $H_n \in \mathcal{V}([t_0, T])$  tali che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E \left[ \int_{t_0}^T |H_n(t, \omega) - G(t, \omega)|^2 dt \right] = 0. \quad (5.4.9)$$

Il lemma risulta così provato in maniera completa, poichè, presa  $G \in \mathcal{V}([t_0, T])$ , utilizzando i tre passi sopra illustrati, possiamo sempre trovare una successio-

ne  $G_n(t, \omega)$  di funzioni stocastiche semplici elementari appartenenti alla classe  $\mathcal{V}([t_0, T])$  tale che valga la (5.4.5).

**Osservazione 5.5.** Vediamo di dare una interpretazione della condizione (5.4.5) che ci sarà molto utile nel seguito.

A tal fine consideriamo i tre spazi misura  $([t_0, T], \mathcal{B}([t_0, T]), m)$ ,  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ,  $([t_0, T] \times \Omega, \mathcal{B}([t_0, T]) \otimes \mathcal{A}, M)$  dove  $M = m \otimes P$ , essendo  $m$  la misura di Lebesgue e teniamo presente che per definizione di valore atteso si ha:

$$E \left[ \int_{t_0}^T |G_n(t, \omega) - G(t, \omega)|^2 dt \right] = \int_{\Omega} \left( \int_{t_0}^T |G_n(t, \omega) - G(t, \omega)|^2 dt \right) dP(\omega). \quad (5.4.10)$$

Se applichiamo l'ultima parte del teorema di Fubini e Tonelli ed utilizziamo notazioni analoghe a quelle di tale teorema, otteniamo:

$$E \left[ \int_{t_0}^T |G_n(t, \omega) - G(t, \omega)|^2 dt \right] = \int_{[t_0, T] \times \Omega} |G_n(t, \omega) - G(t, \omega)|^2 dM(t, \omega). \quad (5.4.11)$$

L'integrale a secondo membro della (5.4.11) si potrebbe anche scrivere nella forma

$$\int_{[t_0, T] \times \Omega} |G_n(t, \omega) - G(t, \omega)|^2 dM(t, \omega) = \int_{[t_0, T]} \int_{\Omega} |G_n(t, \omega) - G(t, \omega)|^2 dt dP(\omega). \quad (5.4.12)$$

Grazie alla (5.4.11), vediamo che la relazione (5.4.5) equivale a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[t_0, T] \times \Omega} |G_n(t, \omega) - G(t, \omega)|^2 dM(t, \omega) = 0 \quad (5.4.13)$$

da cui segue che la successione  $G_n$  converge a  $G$  nello spazio  $L^2([t_0, T] \times \Omega)$  dotato della misura  $M = m \otimes P$ .

Diamo ora la definizione di integrale di Itô nel caso generale.

**Definizione 5.8.** Se  $G(t, \omega) \in \mathcal{V}([t_0, T])$ , si definisce l'integrale stocastico di Itô di  $G$  rispetto a  $W_t$  da  $t_0$  a  $T$  nel modo seguente:

$$I_G := \int_{t_0}^T G(t, \cdot) dW_t = m \int_{t_0}^T G(t, \cdot) dW_t - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^T G_n(t, \cdot) dW_t, \quad (5.4.14)$$

dove  $G_n$  è una successione di funzioni stocastiche semplici elementari appartenenti alla classe  $\mathcal{V}([t_0, T])$  tale che sia soddisfatta la condizione (5.4.5).

**Osservazione 5.6.** La definizione data è ben posta. Infatti è facile provare che il limite che compare nella (5.4.14) esiste grazie al lemma 5.1, alla proprietà III) dell'integrale di Itô delle funzioni stocastiche semplici elementari ed alla completezza di  $L^2(\Omega)$ .

Vediamo di verificarlo.

Il lemma 5.1 assicura l'esistenza di una successione  $G_n$  di funzioni stocastiche semplici elementari in  $\mathcal{V}([t_0, T])$  che soddisfa alla condizione (5.4.5) e quindi anche alla (5.4.13).

Mostriamo che la successione

$$\int_{t_0}^T G_n dW_t$$

è di Cauchy in media quadratica.

In primo luogo notiamo che  $\int_{t_0}^T G_n dW_t \in L^2(\Omega) \quad \forall n \in \mathbb{N}$  per la proprietà III) dell'integrale di Itô delle funzioni stocastiche semplici.

In secondo luogo facciamo vedere che

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \text{ tale che } \forall n, m > n_\epsilon$$

risulta

$$E \left[ \left| \int_{t_0}^T G_n dW_t - \int_{t_0}^T G_m dW_t \right|^2 \right] < \epsilon.$$

A tal fine osserviamo che

$$\begin{aligned} E \left[ \left| \int_{t_0}^T G_n dW_t - \int_{t_0}^T G_m dW_t \right|^2 \right] &= E \left[ \left\{ \int_{t_0}^T (G_n - G_m) dW_t \right\}^2 \right] = \\ &= E \left[ \int_{t_0}^T |G_n - G_m|^2 dt \right], \end{aligned} \quad (5.4.15)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato la proprietà III).

Con argomentazioni analoghe a quelle dell'osservazione 5.5, grazie al teorema di Fubini e Tonelli, possiamo scrivere:

$$E \left[ \int_{t_0}^T |G_n(t, \omega) - G_m(t, \omega)|^2 dt \right] = \int_{[t_0, T] \times \Omega} |G_n(t, \omega) - G_m(t, \omega)|^2 dM(t, \omega). \quad (5.4.16)$$

Ma, per l'osservazione 5.5 sappiamo che la successione  $G_n$  converge a  $G$  in  $L^2([t_0, T] \times \Omega)$  e dunque  $G_n$  è anche una successione di Cauchy in tale spazio. Perciò

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \text{ tale che } \forall n, m > n_\epsilon$$

risulta

$$\int_{[t_0, T] \times \Omega} |G_n(t, \omega) - G_m(t, \omega)|^2 dM(t, \omega) < \epsilon. \quad (5.4.17)$$

Tenendo conto delle (5.4.15), (5.4.16), la (5.4.17) ci consente di asserire che:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \text{ tale che } \forall n, m > n_\epsilon$$

si ha

$$E \left[ \left| \int_{t_0}^T G_n dW_t - \int_{t_0}^T G_m dW_t \right|^2 \right] < \epsilon,$$

per cui concludiamo che la successione

$$\int_{t_0}^T G_n dW_t$$

è di Cauchy in media quadratica. Ma allora per la proposizione 5.2 esiste una variabile casuale  $X \in L^2(\Omega)$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^T G_n(t, \cdot) dW_t = X.$$

$X$  è appunto l'integrale stocastico di Itô di  $G$ .

Si potrebbe anche mostrare che la definizione data è indipendente dalla scelta della successione  $G_n$ .

**Osservazione 5.7.** Da quanto provato in precedenza si ha che l'integrale stocastico di Itô è una variabile casuale appartenente a  $L^2(\Omega)$ . Dunque  $I_G$  è unico quasi sicuramente.

## 5.5 Proprietà dell'integrale stocastico di Itô.

**Proposizione 5.4.** Per l'integrale stocastico di Itô valgono le seguenti proprietà:

- *Linearità:*

$$\begin{aligned} & \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad \forall G_1, G_2 \in \mathcal{V}([t_0, T]) \\ & \int_{t_0}^T (c_1 G_1 + c_2 G_2) dW_t = c_1 \int_{t_0}^T G_1 dW_t + c_2 \int_{t_0}^T G_2 dW_t \quad q.s.; \end{aligned}$$

- *Additività rispetto all'intervallo di integrazione*

$$\begin{aligned} & \forall G \in \mathcal{V}([t_0, T]) \\ & \forall s : t_0 \leq s \leq T \quad \int_{t_0}^T G dW_t = \int_{t_0}^s G dW_t + \int_s^T G dW_t \quad q.s.; \end{aligned}$$

- *Formula del valore atteso:*

$$\forall G \in \mathcal{V}([t_0, T]) \quad E \left[ \int_{t_0}^T G dW_t \right] = 0;$$

- *Formula di correlazione:*

$$\forall G_1, G_2 \in \mathcal{V}([t_0, T]) \quad E \left[ \int_{t_0}^T G_1 dW_t \cdot \int_{t_0}^T G_2 dW_t \right] = E \left[ \int_{t_0}^T G_1 \cdot G_2 dt \right],$$

dove gli integrali al primo membro sono integrali stocastici, mentre l'integrale al secondo membro è un integrale di Riemann o di Lebesgue.

Dalla formula di correlazione, ponendo  $G_1 = G_2 = G$ , si ottiene la

- *Formula della media quadratica o isometria di Itô:*

$$\forall G \in \mathcal{V}([t_0, T]) \quad E \left[ \left( \int_{t_0}^T G dW_t \right)^2 \right] = E \left[ \int_{t_0}^T |G|^2 dt \right].$$

Per quanto riguarda la dimostrazione della proposizione, osserviamo che le proprietà di linearità, del valor medio e della media quadratica le abbiamo già stabilite per funzioni stocastiche semplici elementari. Sempre per funzioni semplici elementari si potrebbe ottenere con facilità la proprietà di additività rispetto all'intervallo di integrazione così come anche la formula di correlazione con argomentazioni analoghe a quelle fatte per provare la formula della media quadratica. Nel caso di una funzione stocastica generale le proprietà si ottengono da quelle per le funzioni semplici elementari con un passaggio al limite.

**Osservazione 5.8.** La proprietà di isometria di Itô, grazie al teorema di Fubini e Tonelli, si può scrivere anche nella forma seguente:

$$\forall G \in \mathcal{V}([t_0, T]) \quad E \left[ \left( \int_{t_0}^T G dW_t \right)^2 \right] = \int_{t_0}^T E[|G|^2] dt.$$

Per una data funzione  $G(t, \omega) \in \mathcal{V}([t_0, T])$  introduciamo il seguente processo stocastico:

$$X_t(\omega) = \int_{t_0}^t G(\tau, \omega) dW_\tau(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega \quad \forall t \in [t_0, T].$$

Si può dimostrare il seguente teorema

**Teorema 5.2.** *Il processo stocastico  $X_t$  è una martingala rispetto alla filtrazione  $\{\mathcal{I}_{[t_0, t]}\}_{t \in [t_0, T]}$ . Inoltre  $X_t$  ha traiettorie continue con probabilità 1.*

Dimostrazione

Diamo la dimostrazione solo della prima parte del teorema e limitatamente al caso di funzioni semplici elementari.

Supponiamo dunque che  $G(t, \omega)$  sia una funzione stocastica semplice elementare in  $\mathcal{V}([t_0, T])$ , per cui esiste una partizione  $\Pi$  dell'intervallo  $[t_0, T]$  mediante i punti  $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  tale che:

$$\forall \omega \in \Omega \quad G(t, \omega) = g_j(\omega) \quad \text{per } t_{j-1} \leq t < t_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad G(T, \omega) = g_n(\omega).$$

Per dimostrare che  $X_t$  è una martingala dobbiamo far vedere che:

- 1)  $X_t$  è adattato alla filtrazione  $\{\mathcal{I}_{[t_0, t]}\}_{t \in [t_0, T]}$ ;
- 2)  $X_t \in L^1(\Omega) \quad \forall t \in [t_0, T]$ ;
- 3)  $E[X_t | \mathcal{I}_{[t_0, s]}] = X_s \quad \text{q.s.} \quad \forall s, t \in [t_0, T] \quad \text{con } s < t.$

Proviamo 1).

Osserviamo che, considerata la partizione  $\Pi$ , si possono avere due casi: o  $t$  è un punto della partizione oppure non lo è, cioè  $\exists \bar{j} \in \{1, 2, \dots, n\}$  tale che  $t = t_{\bar{j}}$  oppure  $t_{\bar{j}-1} < t < t_{\bar{j}}$ .

Nel primo caso avremo

$$X_t(\omega) = \sum_{j=1}^{\bar{j}} g_j(\omega) (W_{t_j}(\omega) - W_{t_{j-1}}(\omega)).$$

Nel secondo caso aggiungiamo  $t$  come punto in più nella partizione e lo denotiamo  $t_{\bar{j}}$ . Dunque ora la partizione è ottenuta mediante i punti:

$$t_0 < t_1 < \dots < t_{\bar{j}} = t < \dots < t_{n+1} = T.$$

Con questo artificio otteniamo ancora

$$X_t(\omega) = \sum_{j=1}^{\bar{j}} g_j(\omega) (W_{t_j}(\omega) - W_{t_{j-1}}(\omega)).$$

Poiché  $\mathcal{I}_{[t_0, t]} = \sigma\{W_\tau : t_0 \leq \tau \leq t\}$  e  $t_j \leq t$  per  $j = 1, 2, \dots, \bar{j}$ , abbiamo che  $W_{t_j}$  e  $W_{t_{j-1}}$  sono misurabili rispetto a  $\mathcal{I}_{[t_0, t]}$  e quindi è misurabile anche la loro differenza. Ma anche  $g_j$  per  $j = 1, 2, \dots, \bar{j}$ , grazie alla condizione di non anticipazione è misurabile, rispetto a  $\mathcal{I}_{[t_0, t]}$ . Allora qualunque sia  $t \in [t_0, T]$ ,  $X_t$

è misurabile rispetto a  $\mathcal{I}_{[t_0, t]}$  perché è la somma di prodotti di variabili casuali misurabili rispetto a tale  $\sigma$ -algebra. Dunque  $X_t$  è adattato alla filtrazione  $\{\mathcal{I}_{[t_0, t]}\}_{t \in [t_0, T]}$ .

Dimostriamo la 2).

Per quanto visto nel punto precedente, possiamo scrivere che, preso  $t \in [t_0, T]$ ,

$$X_t(\omega) = \sum_{j=1}^{\bar{j}} g_j(\omega) (W_{t_j}(\omega) - W_{t_{j-1}}(\omega)).$$

Grazie alla ipotesi di limitatezza delle variabili casuali  $g_j$  ed al fatto che, avendo distribuzione normale, gli incrementi  $W_{t_j} - W_{t_{j-1}} \in L^1(\Omega)$ , deduciamo  $g_j[W_{t_j} - W_{t_{j-1}}] \in L^1(\Omega) \forall j = 1, 2, \dots, \bar{j}$ . Perciò

$$X_t \in L^1(\Omega) \quad \forall t \in [t_0, T].$$

Infine proviamo la 3) o meglio proviamo la proprietà equivalente:

$$E[X_t - X_s | \mathcal{I}_{[t_0, s]}] = 0 \quad q.s. \quad \forall s, t \in [t_0, T] \quad \text{con } s < t.$$

Tale proprietà è equivalente alla 3) perché, essendo  $X_t$  adattato alla filtrazione  $\{\mathcal{I}_{[t_0, t]}\}_{t \in [t_0, T]}$ , si ha che  $X_s$  è misurabile rispetto a  $\mathcal{I}_{[t_0, s]}$  e quindi

$$E[X_s | \mathcal{I}_{[t_0, s]}] = X_s.$$

Se consideriamo ancora, come nel punto 1) la partizione  $\Pi$ , può avvenire che  $s$  e  $t$  siano punti della partizione oppure che non lo siano. In quest'ultimo caso possiamo sempre aggiungerli alla partizione.

Allora assumiamo che  $s = t_{n_1}$ ,  $t = t_{n_2}$  con  $n_2 > n_1$ . Otteniamo perciò

$$\begin{aligned} X_t - X_s &= \sum_{j=1}^{n_2} g_j (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) - \sum_{j=1}^{n_1} g_j (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) = \\ &= \sum_{j=n_1+1}^{n_2} g_j (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}). \end{aligned}$$

Grazie alla linearità dell'aspettativa condizionata deduciamo

$$E[X_t - X_s | \mathcal{I}_{[t_0, s]}] = \sum_{j=n_1+1}^{n_2} E[g_j (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) | \mathcal{I}_{[t_0, s]}].$$

Ma poiché l'indice  $j$  nella somma scritta sopra va da  $n_1 + 1$  a  $n_2$ , abbiamo che  $t_{j-1} \geq s$  e  $t_j > s$  per cui, a causa dell'indipendenza degli incrementi del

processo di Wiener, gli incrementi  $(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})$  per  $j = (n_1 + 1), \dots, n_2$  sono indipendenti dagli incrementi  $W_\tau = W_\tau - W_0$  per  $t_0 \leq \tau \leq s$ . Essendo  $\mathcal{I}_{[t_0, s]} = \sigma(\{W_\tau : t_0 \leq \tau \leq s\})$ , la  $\sigma$ -algebra generata da ogni incremento  $W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$  per  $j = (n_1 + 1), \dots, n_2$  è indipendente da  $\mathcal{I}_{[t_0, s]}$ . D'altra parte, come sappiamo, per la condizione di non anticipazione,  $W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$  è indipendente dal corrispondente  $g_j$ . A questo punto, se applichiamo la proprietà 7) della proposizione 3.23, possiamo scrivere

$$\sum_{j=n_1+1}^{n_2} E[g_j(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) | \mathcal{I}_{[t_0, s]}] = \sum_{j=n_1+1}^{n_2} E[g_j | \mathcal{I}_{[t_0, s]}] E[W_{t_j} - W_{t_{j-1}}] = 0,$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che il valore atteso degli incrementi di un processo di Wiener è nullo.

Abbiamo perciò dimostrato che, nel caso di funzioni semplici elementari,  $X_t$  è una martingala.

Il risultato ottenuto si può estendere a funzioni stocastiche generali mediante un passaggio al limite.

Concludiamo il paragrafo osservando che la definizione di integrale stocastico di Itô che abbiamo dato per funzioni stocastiche a valori in  $\mathbb{R}$  si può estendere a funzioni stocastiche a valori in  $\mathbb{R}^n$ .

## 5.6 Esempio di calcolo di un integrale stocastico.

Ci proponiamo ora, come esempio, di calcolare il seguente integrale stocastico:

$$\int_0^T W_t dW_t \tag{5.6.1}$$

dove dunque  $G(t, \omega) = W_t(\omega) \quad \forall (t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$ .

Dobbiamo in primo luogo provare che  $W_t \in \mathcal{V}([0, T])$ .

Poiché  $W_t$  è un processo stocastico continuo  $\forall t \geq 0$ , come abbiamo osservato nel Capitolo 4, è progressivamente misurabile rispetto alla filtrazione naturale e quindi misurabile per cui  $W_t$  è  $\mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{A}$ -misurabile. Perciò  $W_t$  soddisfa alla condizione a). Tra l'altro, poiché le traiettorie sono continue rispetto al

tempo con probabilità 1, l'integrale di Lebesgue  $\int_0^T |W_t(\omega)|^2 dt$  è un integrale di Riemann con probabilità 1.

Inoltre  $W_t$  è ovviamente misurabile rispetto a  $\mathcal{I}_{[0, t]} \quad \forall t \in [0, T]$  e perciò soddisfa anche alla proprietà di non anticipazione.

Infine è soddisfatta anche la condizione:

$$\int_0^T |W_t(\omega)|^2 dt \in L^1(\Omega) \quad \text{ossia} \quad \int_{\Omega} \left( \int_0^T |W_t(\omega)|^2 dt \right) dP < +\infty$$

poiché per il teorema di Fubini e Tonelli (parte *iii*) applicata a  $W_t^2$ , è possibile scambiare l'integrale su  $\Omega$  rispetto alla misura di probabilità  $P$  con l'integrale rispetto al tempo per cui:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \int_0^T |W_t(\omega)|^2 dt \right) dP &= \int_0^T \left( \int_{\Omega} |W_t(\omega)|^2 dP \right) dt \\ &= \int_0^T E(W_t^2) dt = \int_0^T t dt = \frac{1}{2} T^2 < +\infty. \end{aligned}$$

Allora possiamo calcolare l'integrale stocastico di  $W_t$  rispetto a  $W_t$  da 0 a  $T$ . Tenendo presente la definizione 5.8, in primo luogo dobbiamo determinare una successione  $W_n$  con  $n \in \mathbb{N}$  di funzioni stocastiche semplici elementari appartenenti alla classe  $\mathcal{V}([0, T])$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E \left[ \int_0^T |W_n(t, \omega) - W_t(\omega)|^2 dt \right] = 0. \quad (5.6.2)$$

Conformemente a quanto avevamo visto nel paragrafo 3 nel caso di una funzione stocastica continua rispetto a  $t$ , suddividiamo l'intervallo  $[0, T]$  in  $n$  intervalli di uguale ampiezza mediante la partizione  $\Pi$  ottenuta mediante i punti  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  per cui

$$t_j = \frac{j}{n} T \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Per semplicità di scrittura abbiamo indicato con  $t_j$  ciò che prima avevamo denotato con  $t_j^{(n)}$ .

Consideriamo poi la successione  $W_n(t, \omega)$  con  $n \in \mathbb{N}$  tale che

$$\forall \omega \in \Omega \quad W_n(t, \omega) = W_{t_{j-1}}(\omega), \quad \text{se} \quad t_{j-1} \leq t < t_j, \quad W_n(T, \omega) = W_{t_{n-1}}(\omega).$$

Verifichiamo che tale successione di funzioni stocastiche semplici elementari appartenenti alla classe  $\mathcal{V}([0, T])$  soddisfa alla (6.1.3).

Infatti

$$E \left[ \int_0^T |W_n(t, \omega) - W_t(\omega)|^2 dt \right] = \int_{\Omega} \left( \int_0^T |W_n(t, \omega) - W_t(\omega)|^2 dt \right) dP.$$

Ma

$$\int_0^T |W_n(t, \omega) - W_t(\omega)|^2 dt = \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} |W_{t_{j-1}}(\omega) - W_t(\omega)|^2 dt$$

per cui

$$E \left[ \int_0^T |W_n(t, \omega) - W_t(\omega)|^2 dt \right] = \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left( \int_{t_{j-1}}^{t_j} |W_{t_{j-1}}(\omega) - W_t(\omega)|^2 dt \right) dP.$$

Se scambiamo l'integrale su  $\Omega$  rispetto alla misura di probabilità  $P$  con gli integrali rispetto al tempo otteniamo:

$$E \left[ \int_0^T |W_n(t, \omega) - W_t(\omega)|^2 dt \right] = \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} E[(W_t - W_{t_{j-1}})^2] dt.$$

Per una proprietà degli incrementi di un processo di Wiener che abbiamo già sfruttato numerose altre volte otteniamo:

$$\begin{aligned} E \left[ \int_0^T |W_n(t, \omega) - W_t(\omega)|^2 dt \right] &= \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t - t_{j-1}) dt = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{(t_j - t_{j-1})^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{T^2}{n^2} = \frac{T^2}{2n}. \end{aligned}$$

Perciò

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E \left[ \int_0^T |W_n(t, \omega) - W_t(\omega)|^2 dt \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{T^2}{2n} = 0,$$

come ci proponevamo di dimostrare.

A questo punto applichiamo la definizione di integrale stocastico di Itô:

$$\int_0^T W_t dW_t = mq - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T W_n dW_t.$$

Ma, essendo  $W_n$  funzioni stocastiche semplici elementari,

$$\int_0^T W_n dW_t = \sum_{j=1}^n W_{t_{j-1}} (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}).$$

Posto per semplicità

$$S_n = \sum_{j=1}^n W_{t_{j-1}} (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}),$$

in base alla definizione di integrale stocastico di Ito, dobbiamo calcolare il limite in media quadratica di  $S_n$ , ossia  $mq - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .

A tal fine poniamo:

$$W_{t_j} - W_{t_{j-1}} = \Delta W_j \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Tenendo presente che:

$$ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2} \quad \forall a, b \in \mathbb{R},$$

possiamo scrivere:

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[ (W_{t_{j-1}} + \Delta W_j)^2 - W_{t_{j-1}}^2 - (\Delta W_j)^2 \right].$$

Ma, essendo  $W_{t_{j-1}} + \Delta W_j = W_{t_j}$  deduciamo:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[ W_{t_j}^2 - W_{t_{j-1}}^2 - (\Delta W_j)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} (W_{t_1}^2 - W_{t_0}^2 + W_{t_2}^2 - W_{t_1}^2 + \dots + W_{t_n}^2 - W_{t_{n-1}}^2) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\Delta W_j)^2 = \\ &= \frac{1}{2} W_T^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\Delta W_j)^2, \end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto presente che  $t_0 = 0$  e che  $W_0 = 0$ .

A questo punto otteniamo che

$$\int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2} W_T^2 - \frac{1}{2} \left[ mq - \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n (\Delta W_j)^2 \right].$$

Per determinare  $mq - \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n (\Delta W_j)^2$ , calcoliamo

$$E \left[ \sum_{j=1}^n (\Delta W_j)^2 \right] = \sum_{j=1}^n E [(\Delta W_j)^2] = \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) = t_n - t_0 = T.$$

Questo risultato ci suggerisce che potrebbe essere

$$mq - \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n (\Delta W_j)^2 = T,$$

ossia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E \left[ \left( \sum_{j=1}^n (\Delta W_j)^2 - T \right)^2 \right] = 0.$$

Verifichiamolo.

$$\begin{aligned}
& E \left[ \left( \sum_{j=1}^n (\Delta W_j)^2 - T \right)^2 \right] = \\
& = E \left[ \sum_{j=1}^n (\Delta W_j)^4 + 2 \sum_{i<j=1}^n (\Delta W_i)^2 (\Delta W_j)^2 + T^2 - 2T \sum_{j=1}^n (\Delta W_j)^2 \right] = \quad (5.6.3) \\
& = \sum_{j=1}^n E [(\Delta W_j)^4] + 2 \sum_{i<j=1}^n E [(\Delta W_i)^2] E [(\Delta W_j)^2] + T^2 - 2T \sum_{j=1}^n E [(\Delta W_j)^2],
\end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato la linearità del valore atteso e l'indipendenza degli incrementi.

D'altra parte, se teniamo presente che gli incrementi di un processo di Wiener hanno distribuzione gaussiana con media nulla, grazie ad una proprietà dei momenti di ordine pari di una variabile causale avente una distribuzione gaussiana, si ha

$$E[(\Delta W_j)^{2k}] = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k - 1) \sigma^{2k} \quad \text{con } \sigma \text{ deviazione standard.}$$

Allora  $E[(\Delta W_j)^4]$  si ottiene dalla formula scritta sopra ponendo  $k = 2$  e tenendo presente che  $\sigma^2 = t_j - t_{j-1} = \frac{T}{n}$ . Dunque

$$E[(\Delta W_j)^4] = 3 \frac{T^2}{n^2}.$$

Andando a sostituire nella (5.6.3) e svolgendo i calcoli si ottiene:

$$\begin{aligned}
& E \left[ \left( \sum_{j=1}^n (\Delta W_j)^2 - T \right)^2 \right] = \\
& = 3 \sum_{j=1}^n \frac{T^2}{n^2} + 2 \sum_{i<j=1}^n (t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1}) + T^2 - 2T \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) = \\
& = 3 \sum_{j=1}^n \frac{T^2}{n^2} + 2 \sum_{i<j=1}^n \frac{T}{n} \cdot \frac{T}{n} + T^2 - 2T \sum_{j=1}^n \frac{T}{n} = \\
& = 3n \frac{T^2}{n^2} + 2 \frac{n(n-1)}{2} \frac{T^2}{n^2} + T^2 - 2Tn \frac{T}{n} = \\
& = 3 \frac{T^2}{n} + T^2 - \frac{T^2}{n} + T^2 - 2T^2 = 2 \frac{T^2}{n},
\end{aligned}$$

per cui

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E \left[ \left( \sum_{j=1}^n (\Delta W_j)^2 - T \right)^2 \right] = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{T^2}{n} = 0.$$

In conclusione otteniamo:

$$\int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2} W_T^2 - \frac{1}{2} T.$$

Più in generale si ha:

$$\int_{t_0}^T W_t dW_t = \frac{1}{2} (W_T^2 - W_{t_0}^2) - \frac{1}{2} (T - t_0). \quad (5.6.4)$$

La formula ottenuta è differente dal calcolo integrale classico.

Infatti andiamo a considerare un analogo integrale di Riemann-Stieltjes.

Sia  $x(t)$  una funzione reale, definita sull'intervallo  $[t_0, T]$ , a variazione limitata, derivabile e con derivata integrabile secondo Riemann sull'intervallo di definizione. Grazie alla derivabilità, la funzione risulta continua e quindi integrabile secondo Riemann su  $[t_0, T]$ .

Sotto tali ipotesi esiste l'integrale di Riemann-Stieltjes :

$$\int_{t_0}^T x(t) dx(t)$$

ed è esprimibile come l'integrale di Riemann

$$\int_{t_0}^T x(t)x'(t) dt = \frac{1}{2} (x_T^2 - x_{t_0}^2) \quad (5.6.5)$$

con  $x_T = x(T)$ ,  $x_{t_0} = x(t_0)$ . Se confrontiamo tale risultato con quello ottenuto per l'integrale stocastico di Itô dato dalla (5.6.4), vediamo che in quest'ultimo abbiamo in più il termine:  $-\frac{1}{2} (T - t_0)$ .



# Capitolo 6

## Calcolo differenziale stocastico

### 6.1 Definizione di differenziale stocastico.

In ambiente stocastico non c'è una definizione formale di derivata. Il differenziale stocastico acquista significato solo in virtù dell'integrale stocastico di Itô.

**Definizione 6.1.** Sia  $X_t$  un **processo stocastico di Itô** (a valori in  $\mathbb{R}$ ) definito in  $[t_0, T]$ , ossia un processo stocastico soddisfacente  $\forall t \in [t_0, T]$  alla relazione seguente con probabilità 1:

$$X_t(\omega) = X_{t_0}(\omega) + \int_{t_0}^t F(\tau, \omega) d\tau + \int_{t_0}^t G(\tau, \omega) dW_\tau \quad (6.1.1)$$

dove  $F$  è una funzione reale misurabile rispetto alla  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}([t_0, T]) \otimes \mathcal{A}$ , non anticipante e tale che l'integrale di Lebesgue  $\int_{t_0}^t |F(\tau, \omega)| d\tau < +\infty$  quasi sicuramente  $\forall t \in [t_0, T]$ ,  $G$  è una funzione reale che appartiene alla classe  $\mathcal{V}([t_0, T])$  e  $X_{t_0}$  è una variabile casuale misurabile rispetto alla  $\sigma$ -algebra generata da  $W_{t_0}$ . Diremo allora che  $\forall t \in [t_0, T]$   $X_t$  ha differenziale stocastico dato da:

$$dX_t = F(t, \cdot) dt + G(t, \cdot) dW_t. \quad (6.1.2)$$

E' da rilevare che il differenziale stocastico è solo una scrittura simbolica per esprimere la relazione (6.1.1) in maniera più compatta.

Inoltre si può notare che, grazie alla sua definizione, il differenziale stocastico è lineare.

#### **Esempio 6.1.**

Riprendiamo l'esempio di calcolo di un integrale stocastico del Capitolo precedente:

$$\int_{t_0}^T W_t dW_t = \frac{1}{2}(W_T^2 - W_{t_0}^2) - \frac{1}{2}(T - t_0).$$

Indicato  $T$  con  $t$  e la variabile d'integrazione con  $\tau$ , possiamo scrivere:

$$W_t^2 = W_{t_0}^2 + \int_{t_0}^t d\tau + 2 \int_{t_0}^t W_\tau dW_\tau \quad \forall t \in [t_0, T].$$

Per la definizione di differenziale stocastico (6.1.2) si ha:

$$d(W_t^2) = dt + 2 W_t dW_t. \quad (6.1.3)$$

Si noti che nell'analisi classica manca il primo termine, mentre è presente un termine analogo al secondo. Infatti se  $x(t)$  è derivabile in  $[t_0, T]$ , in analisi classica abbiamo

$$d(x^2(t)) = 2x(t)x'(t)dt = 2x(t)dx.$$

Enunciamo ora per il calcolo differenziale stocastico l'analogo del teorema di derivazione delle funzioni composte del calcolo differenziale classico.

**Teorema 6.1.** *Sia  $X_t$  un processo stocastico definito in  $[t_0, T]$  avente il differenziale stocastico:*

$$dX_t = F(t, \cdot)dt + G(t, \cdot)dW_t.$$

*Inoltre sia  $U : [t_0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua con le derivate parziali  $\partial_t U, \partial_x U, \partial_{xx}^2 U$  continue. Allora sussiste la formula di Itô:*

$$\begin{aligned} U(t, X_t) &= U(t_0, X_{t_0}) + \\ &+ \int_{t_0}^t \left[ \partial_\tau U(\tau, X_\tau) + F(\tau, \cdot) \partial_x U(\tau, X_\tau) + \frac{1}{2} G^2(\tau, \cdot) \partial_{xx}^2 U(\tau, X_\tau) \right] d\tau + \\ &+ \int_{t_0}^t G(\tau, \cdot) \partial_x U(\tau, X_\tau) dW_\tau \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

con probabilità 1 e con  $t_0 \leq t \leq T$ .

In altri termini, se indichiamo con  $Y_t$  il processo stocastico  $Y_t := U(t, X_t)$ , questo ha differenziale stocastico dato da

$$\begin{aligned} dY_t &= \left[ \partial_t U(t, X_t) + F(t, \cdot) \partial_x U(t, X_t) + \frac{1}{2} G^2(t, \cdot) \partial_{xx}^2 U(t, X_t) \right] dt + \\ &+ G(t, \cdot) \partial_x U(t, X_t) dW_t. \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

La (6.1.5), utilizzando la (6.1.2), si può anche scrivere nella forma seguente:

$$dY_t = \partial_t U(t, X_t) dt + \partial_x U(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} G^2(t, \cdot) \partial_{xx}^2 U(t, X_t) dt. \quad (6.1.6)$$

Il caso analogo in Analisi Classica è tradotto dal seguente teorema:

**Teorema 6.2.** *Sia  $x(t)$  una funzione reale derivabile in  $[t_0, T]$ .*

*Inoltre sia  $U : [t_0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua con le derivate parziali  $\partial_t U, \partial_x U$  continue.*

*Posto  $y(t) = U(t, x(t)) \quad \forall t \in [t_0, T]$ , si ha che  $y$  è derivabile e quindi differenziabile in  $[t_0, T]$  e precisamente:*

$$dy(t) = \partial_t U(t, x(t)) dt + \partial_x U(t, x(t)) x'(t) dt. \quad (6.1.7)$$

La (6.1.7), tenendo presente che  $x'(t) dt = dx(t)$ , si può anche scrivere nella forma:

$$dy(t) = \partial_t U(t, x(t)) dt + \partial_x U(t, x(t)) dx(t). \quad (6.1.8)$$

Confrontando la (6.1.8) con la formula di Itô (6.1.6), vediamo che nel caso classico non compare l'ultimo termine  $\frac{1}{2} G^2(t, \cdot) \partial_{xx}^2 U(t, X_t) dt$ .

Se  $G \equiv 0$ , si ottiene dalla (6.1.6) la formula classica. In tale situazione si parla di **caso non stocastico**.

C'è un modo mnemonico per ricordare più rapidamente la formula (differenziale) di Itô.

La (6.1.6) si può infatti riscrivere in forma più compatta anche nella maniera seguente:

$$dY_t = \partial_t U(t, X_t) dt + \partial_x U(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 U(t, X_t) (dX_t)^2$$

dove  $(dX_t)^2 = G^2 dt$  e per calcolarlo si utilizzano le seguenti regole moltiplicative:

$\times$	$dW_t$	$dt$
$dW_t$	$dt$	0
$dt$	0	0

La formula di Itô ha la seguente generalizzazione al caso di più variabili

**Teorema 6.3.** *Siano  $X_t^{(i)}$ ,  $t \in [t_0, T]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , processi stocastici con il differenziale stocastico dato da:*

$$dX_t^{(i)} = F_i(t, \cdot) dt + G_i(t, \cdot) dW_t, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

*Inoltre sia  $U : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua con le derivate parziali  $\partial_t U, \partial_{x_i} U, \partial_{x_i x_j}^2 U$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) continue.*

Allora il processo stocastico  $Y_t = U(t, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)})$  ha differenziale stocastico dato da:

$$\begin{aligned} dY_t = & \left\{ \partial_t U(t, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)}) + \sum_{i=1}^n F_i(t, \cdot) \partial_{x_i} U(t, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n G_i(t, \cdot) G_j(t, \cdot) \partial_{x_i x_j}^2 U(t, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)}) \right\} dt + \\ & + \left\{ \sum_{i=1}^n G_i(t, \cdot) \partial_{x_i} U(t, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)}) \right\} dW_t. \end{aligned} \quad (6.1.9)$$

Il differenziale stocastico di  $Y_t$  si può anche scrivere nella forma compatta:

$$\begin{aligned} dY_t = & \partial_t U(t, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)}) dt + \\ & + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} U(t, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)}) dX_t^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i x_j}^2 U(t, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)}) dX_t^{(i)} dX_t^{(j)}, \end{aligned}$$

dove per il calcolo di  $dX_t^{(i)} dX_t^{(j)}$  si seguono le stesse regole moltiplicative della tabella mostrata sopra.

## 6.2 Applicazioni della formula di Itô.

### • Polinomi

Ci proponiamo di calcolare il seguente differenziale stocastico:

$$d(W_t^n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Applichiamo la formula di Itô ponendo:

$$U(t, x) = U(x) = x^n \quad \text{e} \quad X_t = W_t \quad \text{per cui} \quad U(t, X_t) = U(W_t) = W_t^n.$$

Inoltre

$$dX_t = dW_t \quad \text{e quindi} \quad F \equiv 0, \quad G \equiv 1.$$

Dalla formula di Itô (6.1.6) otteniamo:

$$\begin{aligned} d(W_t^n) = & \partial_t U(W_t) dt + \partial_x U(W_t) dW_t + \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 U(W_t) dt = \\ = & \partial_x U(W_t) dW_t + \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 U(W_t) dt, \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

dove abbiamo tenuto presente che  $U$  non dipende da  $t$ .

Poiché:

$$\partial_x U(x) = n x^{n-1}, \quad \partial_{xx}^2 U(x) = n(n-1) x^{n-2},$$

la (6.2.1) assume la forma:

$$d(W_t^n) = n W_t^{n-1} dW_t + \frac{1}{2} n(n-1) W_t^{n-2} dt. \quad (6.2.2)$$

Il primo termine compare anche nel calcolo classico, mentre il secondo è un termine aggiuntivo proprio del calcolo stocastico.

Infatti in ambito classico si ha

$$dx^n = n x^{n-1} dx.$$

A questo punto scriviamo l'espressione in forma integrale equivalente alla forma concisa ottenuta in precedenza prendendo come istante iniziale  $t_0$ .

$$W_t^n - W_{t_0}^n = \frac{1}{2} n(n-1) \int_{t_0}^t W_\tau^{n-2} d\tau + n \int_{t_0}^t W_\tau^{n-1} dW_\tau.$$

Ora poniamo  $n-1 = k$  e ricaviamo dalla relazione scritta sopra il secondo integrale a secondo membro:

$$\int_{t_0}^t W_\tau^k dW_\tau = \frac{1}{k+1} (W_t^{k+1} - W_{t_0}^{k+1}) - \frac{k}{2} \int_{t_0}^t W_\tau^{k-1} d\tau. \quad (6.2.3)$$

Dalla (6.2.3) possiamo dedurre un risultato che già avevamo ricavato.

Infatti se poniamo  $k = 1$  otteniamo:

$$\int_{t_0}^t W_\tau dW_\tau = \frac{1}{2} (W_t^2 - W_{t_0}^2) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t d\tau = \frac{1}{2} (W_t^2 - W_{t_0}^2) - \frac{1}{2} (t - t_0).$$

Se facciamo il confronto della (6.2.3) con il caso classico, operando come abbiamo fatto nel Capitolo 5 per l'integrale stocastico scritto sopra, vediamo che anche in tal caso abbiamo un termine analogo al caso classico (il primo) ed un termine aggiuntivo.

### • Funzione esponenziale

Vogliamo calcolare il seguente differenziale stocastico:  $d(e^{W_t})$ .

Applichiamo la formula di Itô ponendo:

$$U(t, x) = U(x) = e^x \quad \text{e} \quad X_t = W_t \quad \text{per cui} \quad U(t, X_t) = U(W_t) = e^{W_t}.$$

Inoltre

$$dX_t = dW_t \quad \text{e quindi} \quad F \equiv 0, \quad G \equiv 1.$$

Dalla formula di Itô (6.1.6) otteniamo:

$$\begin{aligned} d(e^{W_t}) &= \partial_t U(W_t) dt + \partial_x U(W_t) dW_t + \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 U(W_t) dt = \\ &= \partial_x U(W_t) dW_t + \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 U(W_t) dt, \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

dove abbiamo tenuto presente che  $U$  non dipende da  $t$ .

Esplicitando le derivate otteniamo:

$$d(e^{W_t}) = e^{W_t} dW_t + \frac{1}{2} e^{W_t} dt = e^{W_t} \left( dW_t + \frac{1}{2} dt \right). \quad (6.2.5)$$

Confrontando con il caso classico vediamo che è presente un termine aggiuntivo proprio del calcolo stocastico.

La corrispondente relazione integrale è la seguente:

$$e^{W_t} - e^{W_{t_0}} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t e^{W_\tau} d\tau + \int_{t_0}^t e^{W_\tau} dW_\tau$$

da cui deduciamo:

$$\int_{t_0}^t e^{W_\tau} dW_\tau = e^{W_t} - e^{W_{t_0}} - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t e^{W_\tau} d\tau. \quad (6.2.6)$$

Anche nella (6.2.6) è presente un termine aggiuntivo rispetto al caso classico, cioè il secondo.

### • Differenziale di un prodotto e formula di integrazione per parti

Ci proponiamo di calcolare il seguente differenziale stocastico:

$$d(X_t^{(1)} X_t^{(2)}),$$

dove  $X_t^{(1)}, X_t^{(2)}$  sono due processi stocastici aventi differenziali stocastici:

$$dX_t^{(i)} = F_i(t, \cdot) dt + G_i(t, \cdot) dW_t, \quad i = 1, 2.$$

Dobbiamo utilizzare la formula di Itô nel caso di due variabili ( $n = 2$ ).

Poniamo

$$U(t, x_1, x_2) = U(x_1, x_2) = x_1 x_2 \quad \text{per cui} \quad U(t, X_t^{(1)}, X_t^{(2)}) = X_t^{(1)} X_t^{(2)}.$$

Per la formula di Itô:

$$\begin{aligned} d(X_t^{(1)} X_t^{(2)}) &= \partial_t U(X_t^{(1)}, X_t^{(2)}) dt + \sum_{i=1}^2 \partial_{x_i} U(X_t^{(1)}, X_t^{(2)}) dX_t^{(i)} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 G_i(t, \cdot) G_j(t, \cdot) \partial_{x_i x_j}^2 U(X_t^{(1)}, X_t^{(2)}) dt. \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

Procuriamoci le derivate:

$$\begin{aligned} \partial_t U(X_t^{(1)}, X_t^{(2)}) &= 0, \quad \partial_{x_1} U(X_t^{(1)}, X_t^{(2)}) = X_t^{(2)}, \quad \partial_{x_2} U(X_t^{(1)}, X_t^{(2)}) = X_t^{(1)}, \\ \partial_{x_i x_i}^2 U(X_t^{(1)}, X_t^{(2)}) &= 0 \quad \text{per } i = 1, 2, \\ \partial_{x_1 x_2}^2 U(X_t^{(1)}, X_t^{(2)}) &= \partial_{x_2 x_1}^2 U(X_t^{(1)}, X_t^{(2)}) = 1. \end{aligned}$$

Sostituendo nell'espressione del differenziale (6.2.7) otteniamo:

$$d(X_t^{(1)} X_t^{(2)}) = X_t^{(2)} dX_t^{(1)} + X_t^{(1)} dX_t^{(2)} + G_1(t, \cdot) G_2(t, \cdot) dt. \quad (6.2.8)$$

Si osservi che l'ultimo termine a secondo membro rappresenta un termine aggiuntivo rispetto al caso classico.

Se per uno almeno dei due processi  $X_t^{(1)}$ ,  $X_t^{(2)}$  si verifica il caso non stocastico, ossia se  $G_1$  o  $G_2 \equiv 0$ , si ottiene la formula classica.

Utilizzando la formula del differenziale di un prodotto possiamo ottenere la formula di integrazione per parti.

Infatti se esplicitiamo il differenziale stocastico (6.2.8), deduciamo

$$X_t^{(1)} X_t^{(2)} - X_{t_0}^{(1)} X_{t_0}^{(2)} = \int_{t_0}^t X_\tau^{(2)} dX_\tau^{(1)} + \int_{t_0}^t X_\tau^{(1)} dX_\tau^{(2)} + \int_{t_0}^t G_1(\tau, \cdot) G_2(\tau, \cdot) d\tau,$$

da cui

$$\int_{t_0}^t X_\tau^{(1)} dX_\tau^{(2)} = X_t^{(1)} X_t^{(2)} - X_{t_0}^{(1)} X_{t_0}^{(2)} - \int_{t_0}^t X_\tau^{(2)} dX_\tau^{(1)} - \int_{t_0}^t G_1(\tau, \cdot) G_2(\tau, \cdot) d\tau. \quad (6.2.9)$$

Ovviamente

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t X_\tau^{(2)}(\omega) dX_\tau^{(1)}(\omega) &= \int_{t_0}^t X_\tau^{(2)}(\omega) F_1(\tau, \omega) d\tau + \int_{t_0}^t X_\tau^{(2)}(\omega) G_1(\tau, \omega) dW_\tau(\omega), \\ \int_{t_0}^t X_\tau^{(1)}(\omega) dX_\tau^{(2)}(\omega) &= \int_{t_0}^t X_\tau^{(1)}(\omega) F_2(\tau, \omega) d\tau + \int_{t_0}^t X_\tau^{(1)}(\omega) G_2(\tau, \omega) dW_\tau(\omega). \end{aligned}$$

Come applicazione di quanto ottenuto per il differenziale stocastico del prodotto di due processi stocastici nel caso in cui per uno dei due si verifica il caso non stocastico, non è difficile provare la proposizione

**Proposizione 6.1.** *Se  $f(t)$  è una funzione reale derivabile in  $[t_0, T]$  con  $f'(t) \in L^2([t_0, T])$ , allora  $\forall t \in [t_0, T]$  si ha con probabilità 1*

$$\int_{t_0}^t f(\tau) dW_\tau = f(t) W_t - f(t_0) W_{t_0} - \int_{t_0}^t f'(\tau) W_\tau d\tau. \quad (6.2.10)$$

Vediamo ora alcuni esempi di applicazione dei risultati precedentemente ottenuti.

**Esempio 6.2.**

Calcolare il seguente differenziale stocastico:

$$d(\cos(W_t)).$$

Applichiamo la formula di Itô ponendo:

$$U(t, x) = \cos x \quad \text{e} \quad X_t = W_t \quad \text{per cui} \quad U(t, X_t) = \cos(W_t).$$

Inoltre

$$dX_t = dW_t \quad \text{e quindi} \quad F \equiv 0, \quad G \equiv 1.$$

Dalla formula di Itô (6.1.6) otteniamo:

$$d(\cos(W_t)) = \partial_t U(W_t) dt + \partial_x U(W_t) dW_t + \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 U(W_t) dt.$$

Esplicitiamo le derivate della funzione  $U(t, x) = \cos x$ :

$$\partial_t U(t, x) = 0, \quad \partial_x U(t, x) = -\sin x, \quad \partial_{xx}^2 U(t, x) = -\cos x.$$

La formula di Itô ci dà perciò

$$d(\cos(W_t)) = -\sin(W_t) dW_t - \frac{1}{2} \cos(W_t) dt.$$

Vediamo che rispetto al caso classico compare un termine aggiuntivo.

Se scriviamo la corrispondente relazione integrale, abbiamo

$$\cos(W_t) - \cos(W_{t_0}) = -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \cos(W_\tau) d\tau - \int_{t_0}^t \sin(W_\tau) dW_\tau,$$

da cui deduciamo

$$\int_{t_0}^t \sin(W_\tau) dW_\tau = \cos(W_{t_0}) - \cos(W_t) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \cos(W_\tau) d\tau.$$

**Esempio 6.3.**

Calcolare il seguente differenziale stocastico:

$$d(e^{tW_t})$$

relativamente all'intervallo  $[0, T]$ .

Applichiamo la formula di Itô ponendo:

$$U(t, x) = e^{tx} \quad \text{e} \quad X_t = W_t \quad \text{per cui} \quad U(t, X_t) = e^{tW_t}.$$

Inoltre

$$dX_t = dW_t \quad \text{e quindi} \quad F \equiv 0, \quad G \equiv 1.$$

Dalla formula di Itô (6.1.6) otteniamo:

$$d(e^{tW_t}) = \partial_t U(t, W_t) dt + \partial_x U(t, W_t) dW_t + \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 U(t, W_t) dt.$$

Esplicitiamo le derivate della funzione  $U(t, x) = e^{tx}$ :

$$\partial_t U(t, x) = x e^{tx}, \quad \partial_x U(t, x) = t e^{tx}, \quad \partial_{xx}^2 U(t, x) = t^2 e^{tx}$$

cosicché la formula di Itô fornisce:

$$d(e^{tW_t}) = W_t e^{tW_t} dt + t e^{tW_t} dW_t + \frac{t^2}{2} e^{tW_t} dt = e^{tW_t} \left[ \left( W_t + \frac{t^2}{2} \right) dt + t dW_t \right].$$

Confrontando con il caso classico vediamo che è presente un termine aggiuntivo proprio del calcolo stocastico dato da  $e^{tW_t} \frac{t^2}{2} dt$ .

In forma integrale, tenendo presente che l'istante iniziale è  $t_0 = 0$ , deduciamo:

$$e^{tW_t} - 1 = \int_0^t \left( W_\tau + \frac{\tau^2}{2} \right) e^{\tau W_\tau} d\tau + \int_0^t \tau e^{\tau W_\tau} dW_\tau.$$

che possiamo scrivere anche nella forma:

$$\int_0^t \tau e^{\tau W_\tau} dW_\tau = e^{tW_t} - 1 - \int_0^t \left( W_\tau + \frac{\tau^2}{2} \right) e^{\tau W_\tau} d\tau.$$

**Esempio 6.4.**

Calcolare il seguente differenziale stocastico:

$$d(\sin t W_t^2).$$

Il processo stocastico di cui dobbiamo calcolare il differenziale è il prodotto della

funzione non stocastica  $\sin t$  e del processo stocastico  $W_t^2$ . Allora, tenendo presente l'osservazione fatta in precedenza nel caso in cui si presenta tale situazione, si può ricorrere alla formula classica per cui avremo:

$$d(\sin t W_t^2) = \cos t W_t^2 dt + \sin t d(W_t^2) \quad (6.2.11)$$

dove ovviamente  $\cos t dt$  rappresenta il differenziale classico della funzione  $\sin t$ , mentre per il differenziale stocastico di  $W_t^2$  sfruttiamo la (6.1.3):

$$d(W_t^2) = dt + 2 W_t dW_t.$$

La (6.2.11) assume perciò la forma:

$$d(\sin t W_t^2) = (\cos t W_t^2 + \sin t) dt + 2 \sin t W_t dW_t.$$

Confrontando con il caso classico vediamo che è presente il termine aggiuntivo  $\sin t dt$ , proprio del calcolo stocastico.

Scriviamo la corrispondente formula integrale prendendo  $t_0 = 0$  ed otteniamo:

$$\sin t W_t^2 = 2 \int_0^t \sin \tau W_\tau dW_\tau + \int_0^t (\cos \tau W_\tau^2 + \sin \tau) d\tau$$

che possiamo scrivere anche nella forma:

$$\int_0^t \sin \tau W_\tau dW_\tau = \frac{1}{2} \left[ \sin t W_t^2 - \int_0^t \cos \tau W_\tau^2 d\tau + \cos t - 1 \right],$$

avendo calcolato l'integrale di Riemann di  $\sin \tau$  da 0 a  $t$ .

### Esempio 6.5.

Calcolare il seguente integrale stocastico  $\forall t \in [0, T]$  con probabilità 1:

$$\int_0^t \tau^n dW_\tau, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sfruttiamo direttamente la (6.2.10) per cui otteniamo:

$$\int_0^t \tau^n dW_\tau = t^n W_t - \int_0^t n \tau^{n-1} W_\tau d\tau.$$

Nell'Appendice 3 sono proposti alcuni esercizi relativi alla definizione di differenziale stocastico.

### 6.3 Equazioni differenziali stocastiche.

Consideriamo ora in ambito stocastico il concetto analogo a quello di equazione differenziale ordinaria del I ordine in forma normale dell'Analisi Matematica classica.

Ricordiamo che un'equazione di tale tipo si presenta nel modo seguente:

$$x' = f(t, x)$$

dove la funzione incognita  $x(t)$  è a valori reali o a valori in  $\mathbb{R}^n$  e  $f$  è una funzione assegnata di due o  $n + 1$  variabili, a valori reali o a valori in  $\mathbb{R}^n$ .

Si noti che l'equazione differenziale si può scrivere nella forma:

$$dx = f(t, x) dt.$$

Come abbiamo osservato in precedenza, per questa equazione svolge un ruolo molto importante il problema di Cauchy che si ottiene associando all'equazione stessa la condizione iniziale o di Cauchy:

$$x(t_0) = x_0.$$

Volendo introdurre nel calcolo stocastico un concetto analogo a quello di equazione differenziale ordinaria del calcolo classico, bisogna tenere presente che nel calcolo stocastico non si dà la definizione di derivata, ma solo quella di differenziale stocastico.

**Definizione 6.2.** *Si definisce equazione differenziale stocastica di Itô un'equazione della forma:*

$$dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t, \quad (6.3.1)$$

per la quale l'incognita è rappresentata dal processo stocastico  $X_t$ .

Del processo stocastico  $X_t$  si devono determinare le traiettorie e le probabilità ad esse associate.

Per quanto riguarda le funzioni  $\mu$  e  $\sigma$ , il coefficiente  $\sigma$  è detto coefficiente di diffusione, mentre  $\mu$ , detto coefficiente di drift ossia di direzione, è un coefficiente che descrive l'andamento del processo. Si assume che  $\mu$  e  $\sigma$  siano funzioni deterministiche assegnate.

$W_t$  è un processo di Wiener ed il termine  $dW_t$  rappresenta gli eventi imprevedibili che si verificano durante l'intervallo temporale infinitesimo  $dt$  e che influenzano l'andamento del processo in tale intervallo.

All'equazione differenziale stocastica (6.3.1) si associa la condizione iniziale

$$X_{t_0} = \xi,$$

dove  $\xi$  è una variabile casuale nota che rappresenta il valore del processo stocastico all'istante iniziale  $t_0$ ; per tale ragione  $\xi$  è detta **valore iniziale**.

La (6.3.1) unita alla condizione iniziale è un modo simbolico per scrivere:

$$X_t = \xi + \int_{t_0}^t \mu(\tau, X_\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \sigma(\tau, X_\tau) dW_\tau. \quad (6.3.2)$$

Come si vede dalla (6.3.2), trovare la soluzione di un'equazione differenziale stocastica di Itô significa determinarne la dipendenza dai valori passati e contemporanei del processo di Wiener.

Si noti che se  $\sigma = 0$ , l'unica influenza stocastica su  $X_t$  è quella esercitata dalla variabile casuale  $\xi$ .

Il processo stocastico incognito  $X_t$  può essere a valori reali o a valori in  $\mathbb{R}^n$  ed anche il processo di Wiener può essere a valori reali o a valori in  $\mathbb{R}^m$ . Il coefficiente  $\mu$  è a valori reali o a valori in  $\mathbb{R}^n$  e il coefficiente  $\sigma$  è a valori reali o a valori in  $\mathbb{R}^{n \times m}$ .

Nel seguito ci limiteremo a considerare solo processi stocastici  $X_t$  e  $W_t$  a valori reali.

Per un'equazione stocastica di Itô si possono definire due tipi di soluzioni: **soluzioni forti** e **soluzioni deboli**.

- **soluzioni forti**

Il processo di Wiener è assegnato, cioè è **esogeno**;

- **soluzioni deboli**

Il processo di Wiener è incognito, cioè è **endogeno**, così come il processo stocastico  $X_t$ .

Noi ci occuperemo soltanto di soluzioni forti.

Per dare la definizione di soluzione forte, facciamo alcune premesse.

Indichiamo con  $\mathcal{I}_t$  la più piccola  $\sigma$ -algebra rispetto alla quale il valore iniziale  $\xi$  e le variabili casuali  $W_\tau$  con  $t_0 \leq \tau \leq t$  siano misurabili. Si ha dunque che  $\mathcal{I}_t$  è indipendente dalle  $\sigma$ -algebre generate dagli incrementi  $W_s - W_t$  con  $s > t$ .

Se  $\xi$  è costante con probabilità 1,  $\mathcal{I}_t$  coincide con la  $\sigma$ -algebra generata dai  $W_\tau$  con  $t_0 \leq \tau \leq t$ , denotata nel capitolo precedente con  $\mathcal{I}_{[t_0, t]}$ , a meno di eventi con probabilità nulla.

Chiameremo  $(\Omega, P, \{\mathcal{I}_t\}_{t \geq t_0}, W_t, \xi)$  **l'assetto canonico del problema**.

Al fine di dare la definizione di soluzione forte dell'equazione differenziale stocastica (6.3.1) nell'intervallo di tempo  $[t_0, T]$ , facciamo l'ipotesi che le due funzioni note a valori reali  $\mu(t, x)$ ,  $\sigma(t, x)$  che compaiono in (6.3.1) siano definite e misurabili secondo Lebesgue in  $[t_0, T] \times \mathbb{R}$ .

**Definizione 6.3. Soluzione forte.** Una soluzione forte della (6.3.1) rispetto al prefissato processo di Wiener  $W_t$  nell'intervallo di tempo  $[t_0, T]$  e con la condizione iniziale  $\xi$  è un processo stocastico  $X = \{X_t\}_{t \in [t_0, T]}$  continuo rispetto a  $t$  tale che:

- 1)  $X_t$  è misurabile rispetto a  $\mathcal{I}_t$ , ossia è non anticipante,  $\forall t \in [t_0, T]$ ;
- 2)  $X_{t_0} = \xi$  con probabilità 1;
- 3)  $\forall t \in [t_0, T] \int_{t_0}^t |\mu(\tau, X_\tau)| d\tau < +\infty, \int_{t_0}^t |\sigma(\tau, X_\tau)|^2 d\tau < +\infty$  con probabilità 1;
- 4)  $X_t$  verifica la (6.3.2)  $\forall t \in [t_0, T]$  con probabilità 1.

In altri termini, assegnate  $\mu$  e  $\sigma$ , solo  $\xi(\omega)$  e i valori di  $W_\tau(\omega)$  con  $t_0 \leq \tau \leq t$  determinano  $X_t(\omega)$  e ciò può avvenire in modo univoco, ai sensi della seguente

**Definizione 6.4. Unicità forte.** Se, ogni volta che  $X$  e  $\tilde{X}$  sono soluzioni forti nell'intervallo di tempo  $[t_0, T]$  della (6.3.1) rispetto allo stesso processo di Wiener e con la stessa condizione iniziale, si ha

$$P\left(\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = \tilde{X}_t(\omega)\}\right) = 1 \quad \forall t \in [t_0, T],$$

diremo che per la (6.3.1) vale l'unicità forte.

**Osservazione 6.1.** Osserviamo che dalla definizione precedente segue che si ha unicità forte se, prese due qualsiasi soluzioni forti della stessa equazione differenziale stocastica relative allo stesso processo di Wiener con la stessa condizione iniziale, queste sono processi stocastici modificazione l'uno dell'altro. Ma, poiché per definizione ogni soluzione forte è un processo continuo rispetto al tempo, se si ha unicità forte, due soluzioni dello stesso problema differenziale stocastico risultano anche indistinguibili.

**Teorema 6.4. Esistenza e unicità della soluzione forte.** Assumiamo che le funzioni misurabili  $\mu$  e  $\sigma$  verifichino le due seguenti condizioni:

- i) sono localmente Lipschitziane in  $x$  uniformemente rispetto a  $t$ , ossia per ogni compatto  $M$  in  $\mathbb{R}$  esiste una costante positiva  $L_M$  tale che

$$|\mu(t, x) - \mu(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq L_M |x - y| \quad \forall x, y \in M, \quad \forall t \in [t_0, T];$$

ii) hanno crescita al più lineare in  $x$ , ossia esiste una costante positiva  $K$  tale che

$$|\mu(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq K(1 + |x|^2) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [t_0, T].$$

Inoltre supponiamo che il dato iniziale  $\xi$  sia una variabile casuale indipendente dall'evoluzione futura del processo di Wiener ossia da ogni incremento  $W_t - W_{t_0}$  con  $t > t_0$  e che  $\xi \in L^2(\Omega)$ .

Allora esiste in  $[t_0, T]$  una soluzione forte della (6.3.1) con la condizione iniziale  $\xi$  e tale soluzione è unica in senso forte. Inoltre esiste una costante positiva  $C = C(K, T - t_0)$  tale che:

$$E[|X_t|^2] \leq C(1 + E[|\xi|^2]) e^{C(t-t_0)} \quad \forall t \in [t_0, T].$$

La condizione di locale Lipschitzianità può anche essere scritta nella forma:

i')  $\forall t \in [t_0, T], \forall x, y \in M$

$$|\mu(t, x) - \mu(t, y)| \leq L_M^\mu |x - y|, \quad |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq L_M^\sigma |x - y|,$$

con  $L_M^\mu, L_M^\sigma$  costanti positive, poiché dalla i') discende la i) con  $L_M = L_M^\mu + L_M^\sigma$ .

La dimostrazione del teorema di esistenza e unicità della soluzione forte è analoga a quella di Picard-Lindelöf per le equazioni differenziali ordinarie, in quanto si usa un metodo di approssimazioni successive per costruire una soluzione.

**Osservazione 6.2.** Si può dare la definizione di soluzione forte della (6.3.1) anche nell'intervallo  $[t_0, +\infty)$ . In tal caso si parla di **soluzione globale** (nel futuro) e si assume che le funzioni  $\mu, \sigma$  siano definite e misurabili in  $[t_0, +\infty) \times \mathbb{R}$ . Tale soluzione è il processo stocastico  $X = \{X_t\}_{t \geq t_0}$  continuo rispetto a  $t$  tale che:

- 1)  $X_t$  è misurabile rispetto a  $\mathcal{I}_t$ , ossia è non anticipante,  $\forall t \geq t_0$
- 2)  $X_{t_0} = \xi$  con probabilità 1;
- 3)  $\int_{t_0}^t |\mu(\tau, X_\tau)| d\tau, \int_{t_0}^t |\sigma(\tau, X_\tau)|^2 d\tau < +\infty$  con probabilità 1  $\forall t \geq t_0$ ;
- 4)  $X_t$  verifica la (6.3.2)  $\forall t \geq t_0$  con probabilità 1.

Nell'ipotesi che per ogni  $\tilde{T} > t_0$  le condizioni i) e ii) del teorema 6.4 siano soddisfatte su ogni intervallo  $[t_0, \tilde{T}]$ , unitamente all'ipotesi su  $\xi$ , la (6.3.1) ammette una soluzione definita su tutta la semiretta reale  $[t_0, +\infty)$ , ossia una soluzione

globale, unica in senso forte.

**Osservazione 6.3.** Le ipotesi del teorema 6.4 sono condizioni sufficienti, ma non necessarie.

Vediamo un esempio di equazione differenziale stocastica di cui è molto facile trovare la soluzione soddisfacente ad una data condizione iniziale.

**Esempio 6.6. Processo aritmetico**

Sia data l'equazione differenziale stocastica (6.3.1) con  $\mu(t, X_t) = \mu = \text{costante}$  e  $\sigma(t, X_t) = \sigma = \text{costante}$  cui associamo la condizione iniziale:

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu dt + \sigma dW_t \\ X_{t_0} &= \xi. \end{aligned} \tag{6.3.3}$$

Il problema (6.3.3) si risolve facilmente  $\forall t \geq t_0$  ricorrendo alla corrispondente equazione integrale, ossia

$$X_t = \xi + \int_{t_0}^t \mu d\tau + \int_{t_0}^t \sigma dW_\tau,$$

da cui deduciamo

$$X_t = \xi + \mu(t - t_0) + \sigma(W_t - W_{t_0}) \quad \forall t \geq t_0. \tag{6.3.4}$$

Il processo definito in (6.3.4) è detto **processo aritmetico**.

Nel caso non stocastico, quando  $\sigma = 0$ , si ha

$$X_t = \xi + \mu(t - t_0).$$

Essendo il valore iniziale  $\xi$  una variabile stocastica,  $X_t$  ha traiettorie diverse in corrispondenza di ogni stato  $\omega \in \Omega$ . Precisamente per la forma di  $X_t$  vediamo che ogni traiettoria di  $X_t$  è una semiretta uscente dal punto  $(t_0, \xi(\omega))$  ( $\omega \in \Omega$ ) con pendenza  $m = \mu$ . Dunque per  $\sigma = 0$  le traiettorie sono tutte semirette parallele tra loro (vedi Figura 6.1<sub>1</sub>)

Consideriamo un caso particolare, ponendo

$$\mu = 1, \quad \sigma = 0, \quad t_0 = 0, \quad \xi(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in \Omega.$$

In tal caso le traiettorie coincidono: abbiamo perciò un'unica traiettoria il cui grafico è una semiretta uscente dall'origine con pendenza 1 (vedi Figura 6.1<sub>2</sub>).  $X_t$  è dunque un processo deterministico.

Supponiamo ora inalterati gli altri dati del problema eccetto  $\sigma$  che prendiamo

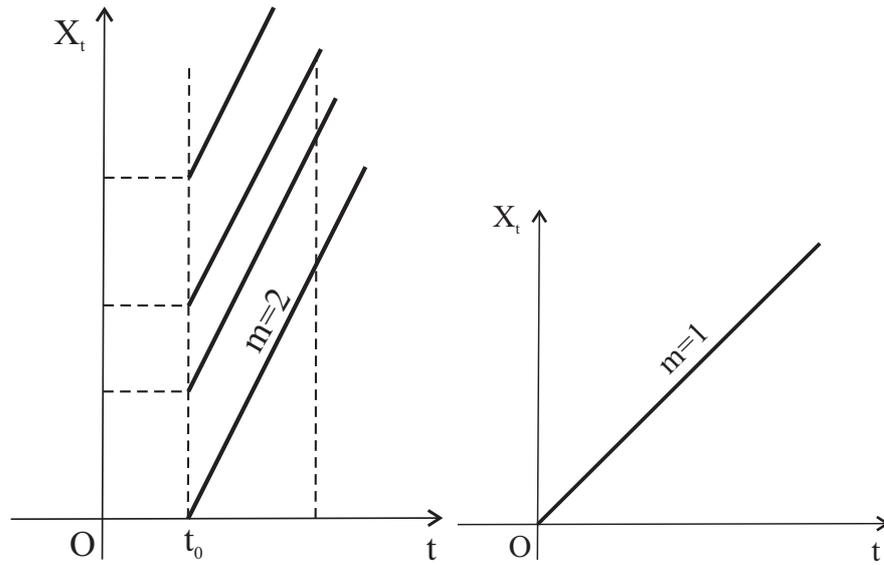


Figura 6.1:  $1_1: \mu = 2, \sigma = 0$ ;  $1_2: \mu = 1, \sigma = 0, t_0 = 0, \xi \equiv 0$

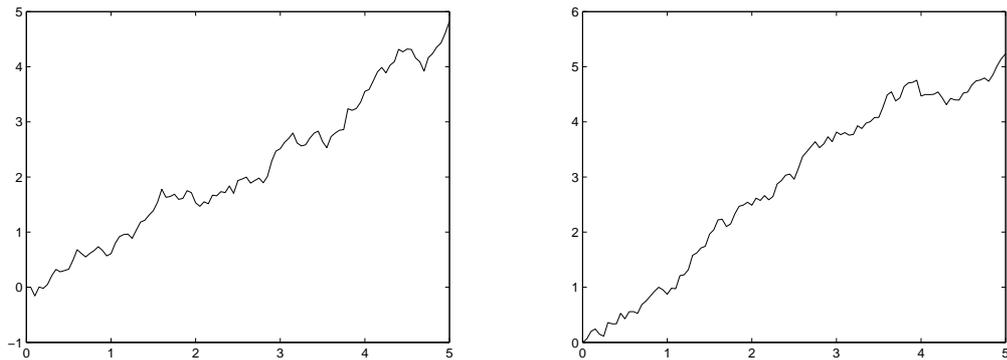


Figura 6.2: traiettorie relative a  $\sigma = 0,5$  e a due diverse traiettorie del processo di Wiener

pari a 0,5. Nelle Figure 6.2 e 6.3 sono rappresentate alcune traiettorie (approssimate) di  $X_t$  in corrispondenza di diverse traiettorie del processo di Wiener.

Le traiettorie si discostano dalla semiretta di pendenza 1 per una serie di oscillazioni casuali ed imprevedibili dovute al fatto che  $\sigma \neq 0$ .

**Osservazione 6.4.** Tanto maggiore è  $\sigma$  tanto maggiore è lo scostamento delle traiettorie dall'andamento che ci si aspetterebbe per un processo deterministico.

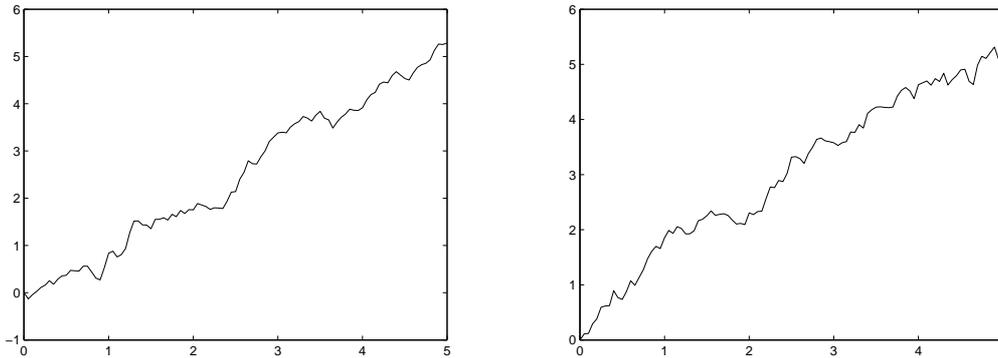


Figura 6.3: traiettorie relative a  $\sigma = 0,5$  e ad altre due diverse traiettorie del processo di Wiener

Calcoliamo il valore atteso del processo stocastico  $X_t$ :

$$\begin{aligned} E[X_t] &= E[\xi] + E[\mu(t - t_0)] + E[\sigma(W_t - W_{t_0})] = \\ &= E[\xi] + \mu(t - t_0) + \sigma E[W_t - W_{t_0}] = \\ &= E[\xi] + \mu(t - t_0). \end{aligned}$$

Se poi assumiamo che  $\xi$  sia costante, otteniamo

$$E[X_t] = \xi + \mu(t - t_0).$$

In media ci si aspetta che  $X_t$  segua l'andamento deterministico che si avrebbe in ambito classico.

Vediamo un altro esempio di equazione differenziale stocastica di cui è molto facile trovare la soluzione soddisfacente ad una data condizione iniziale.

### Esempio 6.7.

Sia data l'equazione differenziale stocastica (6.3.1) con  $\mu(t, X_t) = \mu(t)$  e  $\sigma(t, X_t) = \sigma(t)$  cui associamo la condizione iniziale:

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu(t) dt + \sigma(t) dW_t \\ X_{t_0} &= \xi. \end{aligned} \tag{6.3.5}$$

Assumiamo che le due funzioni  $\mu(t)$  e  $\sigma(t)$  siano definite e misurabili secondo Lebesgue in  $[t_0, T]$  e che inoltre  $\mu \in L^1([t_0, T])$ ,  $\sigma \in L^2([t_0, T])$ . Allora la soluzione della (6.3.5) in  $[t_0, T]$  con la condizione iniziale  $X_{t_0} = \xi$  si ottiene

immediatamente scrivendo la corrispondente relazione integrale:

$$X_t = \xi + \int_{t_0}^t \mu(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \sigma(\tau) dW_\tau \quad (6.3.6)$$

dove per le ipotesi su  $\mu$  e  $\sigma$  i due integrali a secondo membro sono ben definiti. Notiamo che l'integrale stocastico nella (6.3.6) si può esprimere mediante la relazione (6.2.10) se  $\sigma$  soddisfa alle ipotesi richieste alla funzione  $f$  per ottenere la (6.2.10).

Se andiamo ora a calcolare il valore atteso del processo stocastico  $X_t$ , come nell'esempio precedente, otteniamo:

$$\begin{aligned} E[X_t] &= E[\xi] + E\left[\int_{t_0}^t \mu(\tau) d\tau\right] + E\left[\int_{t_0}^t \sigma(\tau) dW_\tau\right] = \\ &= E[\xi] + \int_{t_0}^t \mu(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (6.3.7)$$

avendo sfruttato la proprietà del valore atteso di un integrale stocastico. Ad esempio, la soluzione del seguente problema differenziale stocastico:

$$\begin{aligned} dX_t &= t e^{t^2} dt + \cos t dW_t, \quad t \geq 0 \\ X_0 &= \xi \end{aligned}$$

è data da

$$X_t = \xi + \frac{1}{2}(e^{t^2} - 1) + \cos t W_t + \int_0^t \sin \tau W_\tau d\tau, \quad t \geq 0,$$

avendo utilizzato le relazioni (6.3.6) e (6.2.10).

Inoltre dalla (6.3.7) otteniamo

$$E[X_t] = E[\xi] + \frac{1}{2}(e^{t^2} - 1), \quad t \geq 0.$$

## 6.4 Equazioni differenziali stocastiche lineari.

**Definizione 6.5.** L'equazione differenziale stocastica (6.3.1) si dice *lineare* se  $\mu$  e  $\sigma$  si presentano nella forma:

$$\mu(t, X_t) = A_t X_t + a_t, \quad \sigma(t, X_t) = B_t X_t + b_t,$$

con  $A_t, B_t, a_t, b_t$  funzioni note del tempo.

Se  $a_t = b_t = 0$ , l'equazione si dice **lineare ed omogenea**, se  $B_t = 0$ , l'equazione si dice **lineare in senso stretto**.

**Osservazione 6.5.** Se le funzioni deterministiche  $A_t, B_t, a_t, b_t$  sono misurabili secondo Lebesgue e limitate in  $[t_0, T]$ , allora si può provare che siamo nelle condizioni di applicabilità del teorema di esistenza ed unicità della soluzione forte in  $[t_0, T]$ , purché ovviamente il valore iniziale  $\xi$  sia una variabile casuale appartenente a  $L^2(\Omega)$  e indipendente da ogni incremento  $W_t - W_{t_0}$  con  $t > t_0$ . Ad esempio mostriamo la condizione di lipschitzianità di  $\mu$  e  $\sigma$  rispetto a  $x$  (non solo locale).

$$\begin{aligned} & |\mu(t, x) - \mu(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \\ &= |A_t x + a_t - A_t y - a_t| + |B_t x + b_t - B_t y - b_t| \\ &= |A_t(x - y)| + |B_t(x - y)| \\ &\leq \left( \sup_{t \in [t_0, T]} |A_t| \right) |x - y| + \left( \sup_{t \in [t_0, T]} |B_t| \right) |x - y| \\ &= L |x - y|. \end{aligned}$$

Se poi le funzioni  $A_t, B_t, a_t, b_t$  sono misurabili secondo Lebesgue in  $[t_0, +\infty)$  e limitate in ogni intervallo  $[t_0, \tilde{T}]$  e  $\xi$  soddisfa la condizione detta sopra, allora l'equazione lineare ammette una soluzione forte globale nel futuro, unica in senso forte.

Nel seguito supporremo che  $A_t, B_t, a_t, b_t$  soddisfino insieme al valore iniziale  $\xi$  alle condizioni che assicurano l'esistenza e l'unicità in senso forte della soluzione forte globale nel futuro.

Dimostriamo la seguente

**Proposizione 6.2.** *Sia dato il seguente problema differenziale stocastico:*

$$\begin{aligned} dX_t &= (A_t X_t + a_t) dt + (B_t X_t + b_t) dW_t, \quad t \geq t_0, \\ X_{t_0} &= \xi \end{aligned} \tag{6.4.1}$$

con le funzioni  $A_t, a_t, B_t, b_t$  e  $\xi$  soddisfacenti alle ipotesi dette sopra. Se  $X_t$  è la soluzione forte di tale problema e  $m_t = E[X_t]$ , allora  $m_t$  è la soluzione del seguente problema (classico) di Cauchy:

$$\begin{aligned} m'_t &= A_t m_t + a_t, \quad t \geq t_0, \\ m_{t_0} &= E[\xi]. \end{aligned} \tag{6.4.2}$$

#### Dimostrazione

La condizione iniziale è ovviamente soddisfatta da  $m_t$ . Mostriamo che  $m_t$  è soluzione dell'equazione differenziale ordinaria lineare del primo ordine (6.4.2)<sub>1</sub>.

Se esplicitiamo  $X_t$ , tenendo presente che è soluzione dell'equazione (6.4.1)<sub>1</sub>, otteniamo:

$$X_t = \xi + \int_{t_0}^t (A_\tau X_\tau + a_\tau) d\tau + \int_{t_0}^t (B_\tau X_\tau + b_\tau) dW_\tau, \quad t \geq t_0$$

da cui

$$\begin{aligned} m_t &= E[\xi] + E \left[ \int_{t_0}^t (A_\tau X_\tau + a_\tau) d\tau \right] + E \left[ \int_{t_0}^t (B_\tau X_\tau + b_\tau) dW_\tau \right] = \\ &= E[\xi] + \int_{t_0}^t E[A_\tau X_\tau + a_\tau] d\tau, \quad t \geq t_0 \end{aligned} \quad (6.4.3)$$

dove abbiamo applicato il teorema di Fubini e Tonelli e la proprietà della media di un integrale stocastico.

Se ora deriviamo rispetto a  $t$  entrambi i membri della relazione (6.4.3) e sfruttiamo la linearità del valore atteso, otteniamo:

$$m'_t = E[A_t X_t + a_t] = A_t m_t + a_t.$$

La proposizione è dimostrata.

Si noti che l'equazione differenziale ordinaria cui soddisfa  $m_t$  si ottiene dall'equazione stocastica cui soddisfa  $X_t$  "togliendo" la parte stocastica.

Occupiamoci ora in particolare delle equazioni differenziali stocastiche lineari in senso stretto, cioè di equazioni nella forma:

$$dX_t = (A_t X_t + a_t) dt + b_t dW_t \quad (6.4.4)$$

cui associamo la condizione iniziale

$$X_{t_0} = \xi. \quad (6.4.5)$$

Di tale problema differenziale siamo in grado di scrivere esplicitamente la soluzione data da:

$$X_t = \Psi_{t,t_0} \left( \xi + \int_{t_0}^t \Psi_{\tau,t_0}^{-1} a_\tau d\tau + \int_{t_0}^t \Psi_{\tau,t_0}^{-1} b_\tau dW_\tau \right) \quad \forall t \geq t_0, \quad (6.4.6)$$

dove

$$\Psi_{t,t_0} = e^{\int_{t_0}^t A_\tau d\tau}.$$

Verifichiamo che il processo stocastico dato dalla (6.4.6) è la soluzione cercata. Posto

$$Y_t = \xi + \int_{t_0}^t \Psi_{\tau,t_0}^{-1} a_\tau d\tau + \int_{t_0}^t \Psi_{\tau,t_0}^{-1} b_\tau dW_\tau,$$

il processo  $X_t$ , dato dalla (6.4.4), si scrive come:

$$X_t = Y_t \Psi_{t,t_0}.$$

Calcoliamone il differenziale con la regola del prodotto e tenendo presente che la funzione  $\Psi_{t,t_0}$  non è stocastica. Otteniamo:

$$\begin{aligned} dX_t &= \Psi'_{t,t_0} Y_t dt + \Psi_{t,t_0} dY_t \\ &= e^{\int_{t_0}^t A_\tau d\tau} A_t Y_t dt + \Psi_{t,t_0} (\Psi_{t,t_0}^{-1} a_t dt + \Psi_{t,t_0}^{-1} b_t dW_t) \\ &= A_t Y_t \Psi_{t,t_0} dt + a_t dt + b_t dW_t \\ &= (A_t X_t + a_t) dt + b_t dW_t. \end{aligned}$$

Dunque  $X_t$  dato dalla (6.4.6) è soluzione dell'equazione.

Ci resta ancora da verificare la condizione iniziale:

$$X_{t_0} = \Psi_{t_0,t_0} \left( \xi + \int_{t_0}^{t_0} \Psi_{\tau,t_0}^{-1} a_\tau d\tau + \int_{t_0}^{t_0} \Psi_{\tau,t_0}^{-1} b_\tau dW_\tau \right) = \xi.$$

Perciò la soluzione del problema è data dalla (6.4.6).

**Osservazione 6.6.** Tenendo presente che la soluzione del problema (6.4.4), (6.4.5) è data dalla (6.4.6), si deduce che per determinare il valore atteso della soluzione  $m_t = E[X_t]$  non è necessario risolvere il problema di Cauchy (6.4.2), ma basta calcolarlo direttamente mediante l'espressione della soluzione. Procedendo in tal modo, grazie alla linearità del valore atteso e tenendo presente la proprietà della media dell'integrale stocastico, otteniamo:

$$\begin{aligned} m_t &= \Psi_{t,t_0} \left( E[\xi] + E \left[ \int_{t_0}^t \Psi_{\tau,t_0}^{-1} a_\tau d\tau \right] + E \left[ \int_{t_0}^t \Psi_{\tau,t_0}^{-1} b_\tau dW_\tau \right] \right) \\ &= \Psi_{t,t_0} \left( E[\xi] + \int_{t_0}^t \Psi_{\tau,t_0}^{-1} a_\tau d\tau \right). \end{aligned} \quad (6.4.7)$$

La relazione scritta sopra è quella che avremmo ottenuto risolvendo il problema di Cauchy (classico) (6.4.4), (6.4.5).

Vediamo alcuni esempi.

### Esempio 6.8.

Risolviamo l'equazione differenziale stocastica

$$dX_t = -\frac{X_t}{1+t} dt + \frac{1}{1+t} dW_t,$$

cui associamo la condizione iniziale

$$X_0 = \xi.$$

L'equazione stocastica è lineare in senso stretto con

$$A_t = -\frac{1}{1+t}, \quad a_t = 0, \quad B_t = 0, \quad b_t = \frac{1}{1+t}.$$

Notiamo che sono soddisfatte le condizioni che assicurano l'esistenza e l'unicità in senso forte della soluzione forte globale nel futuro cioè per  $t \geq 0$ .

La soluzione è data dalla formula risolutiva (6.4.6) e perciò dobbiamo dapprima determinare la funzione  $\Psi_{t,0}$ .

$$\Psi_{t,0} = e^{-\int_0^t \frac{1}{1+\tau} d\tau} = e^{-\log(1+t)} = \frac{1}{1+t}.$$

(Denotiamo con  $\log$  il logaritmo in base  $e$ .)

La soluzione cercata è dunque per  $t \geq 0$ :

$$X_t = \frac{1}{1+t} \left( \xi + \int_0^t \frac{1+\tau}{1+\tau} dW_\tau \right) = \frac{1}{1+t} (\xi + W_t). \quad (6.4.8) \quad (6.4.8)$$

Per quanto riguarda il valore atteso della soluzione, tenendo presente l'Osservazione 6.6, otteniamo:

$$m_t = E[X_t] = \frac{E[\xi]}{1+t}.$$

E' interessante osservare che se facciamo tendere  $t$  a  $+\infty$  il valore atteso tende a zero e quindi in media le traiettorie di un tale processo stocastico "tendono" a zero per  $t \rightarrow +\infty$ .

### Esempio 6.9 Equazione di Ornstein-Uhlenbeck

Ci proponiamo di risolvere l'equazione differenziale stocastica:

$$dX_t = -\lambda X_t dt + \sigma dW_t,$$

dove  $\lambda$  e  $\sigma$  sono costanti ed inoltre

$$\lambda > 0, \quad t_0 = 0 \quad \text{e} \quad X_0 = \xi.$$

Tale equazione è detta equazione di Ornstein-Uhlenbeck e trova applicazione nella fisica dei circuiti.

E' un'equazione stocastica lineare in senso stretto con

$$A_t = -\lambda, \quad a_t = 0, \quad b_t = \sigma.$$

Determiniamo

$$\Psi_{t,0} = e^{\int_0^t -\lambda d\tau} = e^{-\lambda t}.$$

La soluzione del problema è

$$X_t = e^{-\lambda t} \left( \xi + \int_0^t e^{\lambda\tau} \sigma dW_\tau \right) = \xi e^{-\lambda t} + \int_0^t \sigma e^{-\lambda(t-\tau)} dW_\tau, \quad t \geq 0.$$

Se esplicitiamo l'integrale stocastico che compare in  $X_t$  utilizzando la (6.2.10), possiamo scrivere la soluzione nella forma

$$X_t = \xi e^{-\lambda t} + \sigma \left[ W_t - \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} W_\tau d\tau \right].$$

Determiniamo ora  $m_t = E[X_t]$ .

Grazie all'Osservazione 6.6, otteniamo

$$\begin{aligned} m_t &= E[\xi] e^{-\lambda t} + E \left[ \int_0^t \sigma e^{-\lambda(t-\tau)} dW_\tau \right] \\ &= E[\xi] e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Il valore atteso di  $X_t$  tende a 0 per  $t \rightarrow +\infty$  come nell'esempio precedente.

Passiamo ora a considerare le **equazioni differenziali stocastiche lineari di tipo generale**:

$$dX_t = (A_t X_t + a_t) dt + (B_t X_t + b_t) dW_t$$

con la condizione iniziale

$$X_{t_0} = \xi.$$

Anche in questo caso si può ricavare la formula risolutiva data da:

$$X_t = \Psi_{t,t_0} \left( \xi + \int_{t_0}^t \Psi_{\tau,t_0}^{-1} (a_\tau - B_\tau b_\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \Psi_{\tau,t_0}^{-1} b_\tau dW_\tau \right), \quad (6.4.9)$$

dove  $\Psi_{t,t_0}$  è soluzione del problema

$$\begin{aligned} d\varphi_t &= A_t \varphi_t dt + B_t \varphi_t dW_t \\ \varphi_{t_0} &= 1. \end{aligned} \quad (6.4.10)$$

Si noti che l'equazione differenziale stocastica cui soddisfa  $\Psi_{t,t_0}$  è l'equazione omogenea associata a quella di partenza.

Tuttavia, la formula risolutiva scritta sopra non si può in genere esplicitare in forma completa perchè non si riesce a determinare  $\Psi_{t,t_0}$  esplicitamente. Ciò è

possibile se i coefficienti  $A_t$  e  $B_t$  sono costanti, ossia  $A_t = A$ ,  $B_t = B$  con  $A, B$  costanti. Infatti in tal caso si ha:

$$\Psi_{t,t_0} = e^{(A-B^2/2)(t-t_0) + B(W_t - W_{t_0})} = e^{(A-B^2/2)(t-t_0)} e^{B(W_t - W_{t_0})}. \quad (6.4.11)$$

Verifichiamo che la (6.4.11) è soluzione del problema (6.4.10). Utilizziamo la formula del differenziale di un prodotto tenendo presente che il fattore  $e^{(A-B^2/2)(t-t_0)}$  è non stocastico.

$$\begin{aligned} d\Psi_{t,t_0} &= d \left\{ e^{(A-B^2/2)(t-t_0)} e^{B(W_t - W_{t_0})} \right\} \\ &= e^{(A-B^2/2)(t-t_0)} e^{B(W_t - W_{t_0})} (A - B^2/2) dt + e^{(A-B^2/2)(t-t_0)} d(e^{B(W_t - W_{t_0})}). \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il secondo differenziale applichiamo la formula di Itô ponendo:

$$U(t, x) = e^{Bx}, \quad X_t = W_t - W_{t_0} = \int_{t_0}^t dW_\tau \quad \text{per cui } F \equiv 0, \quad G \equiv 1.$$

Deduciamo allora:

$$d(e^{B(W_t - W_{t_0})}) = B e^{B(W_t - W_{t_0})} dW_t + \frac{1}{2} B^2 e^{B(W_t - W_{t_0})} dt.$$

Sostituendo nel differenziale stocastico di  $\Psi_{t,t_0}$  deduciamo:

$$\begin{aligned} d\Psi_{t,t_0} &= e^{(A-B^2/2)(t-t_0)} \cdot \left[ e^{B(W_t - W_{t_0})} (A - B^2/2) dt + B e^{B(W_t - W_{t_0})} dW_t + \frac{1}{2} B^2 e^{B(W_t - W_{t_0})} dt \right] \\ &= A \Psi_{t,t_0} dt + B \Psi_{t,t_0} dW_t. \end{aligned}$$

Inoltre

$$\Psi_{t_0,t_0} = 1.$$

Dunque la funzione  $\Psi_{t,t_0}$  è la soluzione del problema (6.4.10).

Vediamo alcuni esempi.

**Esempio 6.10.** Cerchiamo la soluzione della seguente equazione differenziale stocastica lineare:

$$dX_t = \mu dt + \sigma X_t dW_t, \quad \mu, \sigma = \text{costanti}$$

con la condizione iniziale per  $t_0 = 0$ :

$$X_0 = \xi.$$

In tal caso si ha dunque:

$$A_t = 0, \quad a_t = \mu, \quad B_t = \sigma, \quad b_t = 0.$$

Grazie al risultato precedente deduciamo:

$$\Psi_{t,0} = e^{-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t}, \quad X_t = \Psi_{t,0} \left[ \xi + \mu \int_0^t e^{\frac{\sigma^2}{2}\tau - \sigma W_\tau} d\tau \right].$$

Se ora vogliamo determinare  $m_t$ , teniamo presente a quale problema differenziale soddisfa:

$$\begin{aligned} m_t' &= \mu, \\ m_0 &= E[\xi]. \end{aligned}$$

Dunque

$$m_t = \mu t + E[\xi].$$

### Esempio 6.11. Processo che ritorna alla media

Si definisce processo che ritorna alla media il processo stocastico soluzione della seguente equazione differenziale stocastica lineare:

$$dX_t = \lambda(\mu - X_t) dt + \sigma X_t dW_t, \quad \lambda, \mu, \sigma = \text{costanti}, \quad \lambda > 0$$

con la condizione iniziale per  $t_0 = 0$ :

$$X_0 = \xi.$$

In tal caso si ha dunque:

$$A_t = -\lambda, \quad a_t = \lambda\mu, \quad B_t = \sigma, \quad b_t = 0.$$

Grazie al risultato precedente deduciamo:

$$\Psi_{t,0} = e^{-(\lambda + \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}, \quad X_t = \Psi_{t,0} \left[ \xi + \lambda\mu \int_0^t e^{(\lambda + \frac{\sigma^2}{2})\tau - \sigma W_\tau} d\tau \right].$$

Determiniamo ora  $m_t$  tenendo presente a quale problema differenziale soddisfa:

$$\begin{aligned} m_t' &= -\lambda m_t + \lambda\mu, \\ m_0 &= E[\xi]. \end{aligned}$$

Poiché l'equazione differenziale ordinaria cui soddisfa  $m_t$  è un'equazione del I ordine lineare, a coefficienti costanti, non omogenea, come è noto, la soluzione del problema è data da

$$\begin{aligned} m_t &= e^{-\lambda t} \left[ (E[\xi] + \int_0^t e^{\lambda \tau} \lambda \mu d\tau) \right] \\ &= (E[\xi] - \mu) e^{-\lambda t} + \mu. \end{aligned}$$

Per  $t \rightarrow +\infty$  vediamo che la media di  $X_t$  tende a  $\mu$ .

Quindi nel processo che ritorna alla media il parametro  $\mu$  rappresenta quel valore cui tende il valore atteso del processo al trascorrere del tempo.

Le traiettorie del processo al trascorrere del tempo “tendono” in media al valore  $\mu$ .

### Esempio 6.12. Processo geometrico

Un processo geometrico è un processo stocastico che soddisfa l'equazione differenziale stocastica lineare omogenea:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$$

con  $\mu$  e  $\sigma$  costanti e la condizione iniziale

$$X_0 = \xi \quad (t_0 = 0).$$

Dunque in tal caso:

$$A_t = \mu, \quad a_t = 0, \quad B_t = \sigma, \quad b_t = 0.$$

Si ha perciò:

$$\Psi_{t,0} = e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}, \quad X_t = \xi \Psi_{t,0}. \quad (6.4.12)$$

Il processo geometrico ha notevole importanza in ambito finanziario poiché, come vedremo, secondo il modello di Samuelson, il prezzo delle azioni è descritto mediante un processo di tale tipo.

Stabiliamo due interessanti proprietà del processo geometrico.

- Se esplicitiamo la (6.4.12) e teniamo presente che  $X_0 = \xi$ , otteniamo:

$$X_t = X_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} \quad (6.4.13)$$

da cui

$$\log \frac{X_t}{X_0} = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t, \quad (6.4.14)$$

dove abbiamo assunto  $X_0 \neq 0$ .

D'altra parte,  $W_t$  segue una distribuzione gaussiana con media nulla e varianza uguale a  $t$ , mentre il termine  $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t$  è una variabile casuale costante. Osserviamo che si può provare che se  $X$  è una variabile casuale con distribuzione gaussiana ed  $\alpha$  e  $\beta$  sono costanti, allora anche la variabile casuale  $\alpha X + \beta$  ha distribuzione gaussiana. Dunque  $\log \frac{X_t}{X_0}$  segue una distribuzione gaussiana. Procuriamoci il valore medio e la varianza di tale variabile casuale utilizzando la (6.4.14).

Se ci procuriamo il valore medio e la varianza del II membro della (6.4.14), deduciamo:

$$E[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t] = E[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t] + E[\sigma W_t] = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t;$$

$$\begin{aligned} \text{Var}((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t) &= E[((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t)^2] \\ &= E[\sigma^2 W_t^2] = \sigma^2 E[W_t^2] = \sigma^2 t. \end{aligned}$$

Concludiamo pertanto che  $\log \frac{X_t}{X_0}$  segue una distribuzione gaussiana con media  $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t$  e varianza  $\sigma^2 t$ .

Tenendo presente la definizione di variabile casuale avente distribuzione log-normale, possiamo asserire che, se  $X_t$  è un processo geometrico, allora  $\frac{X_t}{X_0}$  ha una distribuzione log-normale.

- Se il valore iniziale è limitato, il processo geometrico ha la proprietà a martingala, ossia

$$E[X_T | \mathcal{I}_t] = X_t e^{\mu(T-t)} \quad \text{con } t < T. \quad (6.4.15)$$

La (6.4.15) ci dice che non  $X_t$ , bensì  $X_t e^{-\mu t}$  si comporta come una martingala. Infatti, supponiamo che valga la (6.4.15) e consideriamo:

$$E[X_T e^{-\mu T} | \mathcal{I}_t] = e^{-\mu T} E[X_T | \mathcal{I}_t] = e^{-\mu T} X_t e^{\mu(T-t)} = X_t e^{-\mu t}.$$

Vediamo di dimostrare la (6.4.15).

A tal fine premettiamo il seguente

**Lemma 6.1.** *Se  $W_t$  è un processo di Wiener e  $\sigma$  è una costante, allora:*

$$E[e^{\sigma W_T} | \mathcal{I}_t] = e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma W_t} \quad \text{con } t < T.$$

Per la dimostrazione del lemma 6.1 rimandiamo all'Appendice 3 dell'ultimo Capitolo delle dispense.

Proviamo ora la (6.4.15).

A tal fine richiamiamo una proprietà dell'aspettativa condizionata che abbiamo enunciato in precedenza.

Siano  $X$  e  $M$  due variabili casuali e  $\mathcal{I}$  una struttura informativa. Se  $M$  è limitata e misurabile rispetto a  $\mathcal{I}$ , allora si ha:

$$E[M X | \mathcal{I}] = M E[X | \mathcal{I}].$$

Consideriamo

$$\begin{aligned} E[X_T | \mathcal{I}_t] &= E[X_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T} | \mathcal{I}_t] \\ &= e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T} E[X_0 e^{\sigma W_T} | \mathcal{I}_t], \end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto presente la linearità dell'aspettativa condizionata.

Ma d'altra parte  $X_0$  è variabile casuale limitata ed anche misurabile rispetto a  $\mathcal{I}_t$  per cui, grazie alla proprietà dell'aspettativa condizionata ricordata prima, otteniamo:

$$E[X_T | \mathcal{I}_t] = X_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T} E[e^{\sigma W_T} | \mathcal{I}_t].$$

Se a questo punto applichiamo il lemma 9.1, concludiamo che:

$$\begin{aligned} E[X_T | \mathcal{I}_t] &= X_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T} e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma W_t} \\ &= X_0 e^{\mu(T-t)} e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} = X_t e^{\mu(T-t)}. \end{aligned}$$

# Capitolo 7

## Il modello di Black e Scholes per la valutazione delle opzioni call

### 7.1 Modelli matematici per i prezzi azionari.

Il primo modello per i prezzi azionari risale a **Louis Bachelier** (1900) che, prendendo in considerazione i dati della borsa di Parigi, propose di ricorrere al moto Browniano per descrivere l'andamento dei prezzi delle azioni.

Il lavoro di Bachelier fu pionieristico e all'avanguardia poichè la prima formulazione matematica del moto Browniano risale agli studi di Einstein del 1905 e solo nel 1923 Wiener formalizzò il moto Browniano mediante il processo da lui ideato.

Il modello di Bachelier si può formulare nel modo seguente.

Se  $S_t$  è il prezzo di un'azione al tempo  $t$ , allora

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t,$$

dove  $S_0$  rappresenta il prezzo dell'azione al tempo  $t = 0$ ,  $\mu$  e  $\sigma$  sono costanti e  $W_t$  è un moto Browniano, ossia un processo di Wiener.

Il difetto di tale formulazione sta nel fatto che  $S_t$  può diventare negativo anche se  $S_0$  è positivo. I prezzi azionari non sono mai negativi e quindi tale modello non è adeguato ai dati empirici.

Comunque, nonostante l'inadeguatezza del suo modello, Bachelier può essere considerato il fondatore della matematica finanziaria moderna.

Nel 1965 **Paul Samuelson** propose un modello nel quale le fluttuazioni del prezzo azionario sono descritte mediante un processo geometrico.

Samuelson studiò i **rendimenti dei prezzi azionari**.

**Definizione 7.1.** Si definisce rendimento del prezzo di un'azione relativo all'intervallo di tempo  $(t, t + \Delta t)$  il seguente rapporto:

$$(\Delta S + \text{eventuali dividendi})/S,$$

dove  $\Delta S$  rappresenta la variazione del prezzo azionario nell'intervallo di tempo  $(t, t + \Delta t)$  e  $S$  è il prezzo dell'azione al tempo  $t$ .

Nel caso in cui non compaiano dividendi, il rendimento è dato da

$$\frac{\Delta S}{S}.$$

Supponiamo di determinare un insieme di rendimenti del prezzo di un'azione relativi ad intervalli di tempo successivi tutti di uguale ampiezza  $\Delta t$  (ad esempio  $\Delta t$  può essere 1 giorno).

Sia  $S_i$  il prezzo dell'azione al tempo  $t_i$  con  $i = 1, \dots, m$ .

Allora il rendimento relativo all'intervallo  $(t_i, t_{i+1})$  è dato da:

$$\rho_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} \quad \text{con} \quad i = 1, \dots, m - 1.$$

Empiricamente Samuelson ha osservato che la distribuzione dei rendimenti di un dato prezzo azionario può essere approssimata con una distribuzione gaussiana. Inoltre, sempre da studi empirici, è emerso che, se  $\Delta t$  è l'ampiezza dell'intervallo tra due rilevamenti successivi, la distribuzione gaussiana dei rendimenti ha **valore atteso** proporzionale a  $\Delta t$  ed è quindi esprimibile nella forma  $\mu\Delta t$  con  $\mu$  costante ed analogamente la **varianza** risulta proporzionale a  $\Delta t$  ed è quindi della forma  $\sigma^2\Delta t$  con  $\sigma$  costante.

In base a tali osservazioni, Samuelson propose che il prezzo azionario  $S_t$  seguisse un processo geometrico e quindi soddisfacesse ad un'equazione differenziale stocastica della forma

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

dove  $\mu$  e  $\sigma$  sono costanti ( $\sigma > 0$ ).

Verifichiamo che, se  $S_t$  è un processo geometrico, si trovano risultati in accordo con le osservazioni empiriche. Procediamo in maniera più intuitiva che rigorosa. Dividiamo entrambi i membri dell'equazione stocastica scritta sopra per  $S_t$  ottenendo così:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t,$$

dove il primo membro può essere interpretato come il rendimento del prezzo azionario nell'intervallo di tempo infinitesimo  $dt$ .

Se calcoliamo il valore atteso di tale rendimento deduciamo:

$$E \left[ \frac{dS_t}{S_t} \right] = E[\mu dt] + E[\sigma dW_t] = \mu dt + \sigma E[dW_t] = \mu dt,$$

dove abbiamo tenuto presente che il valore atteso dell'incremento di un processo di Wiener è nullo.

Analogamente calcoliamone la varianza:

$$E \left[ \left( \frac{dS_t}{S_t} - \mu dt \right)^2 \right] = E[(\sigma dW_t)^2] = \sigma^2 E[(dW_t)^2] = \sigma^2 dt.$$

Allora vediamo che se l'andamento dei prezzi azionari segue un processo geometrico si trovano, per valore atteso e varianza, risultati in accordo con i dati empirici.

Dunque nel modello di Samuelson il prezzo di ogni azione segue un processo geometrico con parametri  $\mu$  e  $\sigma$ , dove:

$\mu$  = **tasso di rendimento atteso**

$\sigma^2$  = **tasso di varianza dei rendimenti.**

Nella pratica si stima  $\mu$  considerando il **rendimento medio**, ossia la media aritmetica di un dato numero di rendimenti rilevati ad intervalli di tempo pari a  $\Delta t$ :  $\rho_i$  con  $i = 1, \dots, m - 1$  per cui

$$\mu \Delta t = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} \rho_i.$$

L'investitore si aspetta che  $\mu$  sia maggiore di  $r$ , tasso di interesse del mercato, e dunque deve sostenere un rischio.

In finanza  $\sigma$  viene chiamata **volatilità del prezzo azionario**.

Una volatilità alta comporta rendimenti effettivi distanti dal rendimento atteso, mentre se  $\sigma$  è piccolo i rendimenti sono più vicini al valore atteso e quindi l'investimento è più sicuro.

La volatilità è perciò una misura del rischio del titolo, misurando lo scostamento dal rendimento atteso.

Se  $\sigma$  fosse nullo il prezzo azionario sarebbe sicuro, ossia non stocastico.

La volatilità di un prezzo azionario si calcola con metodi statistici in base all'andamento storico dell'azione.

Se teniamo presente quanto stabilito nel capitolo precedente sui processi geometrici, in base al modello di Samuelson deduciamo che al tempo  $t$  il prezzo  $S_t$  di un'azione che ha prezzo  $S_0$  al tempo  $t_0 = 0$  è dato da:

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$$

per cui

$$\log \frac{S_t}{S_0} = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t.$$

A differenza del modello proposto da Bachelier per il quale  $S_t - S_0$  aveva dipendenza lineare da  $t$  e da  $W_t$ , nel modello di Samuelson è il logaritmo di  $\frac{S_t}{S_0}$  ad avere dipendenza lineare da  $t$  e da  $W_t$ .

Inoltre, avendo  $W_t$  distribuzione gaussiana, ne discende che gode di questa proprietà anche  $\log \frac{S_t}{S_0}$  e quindi  $\frac{S_t}{S_0}$  ha distribuzione log-normale.

In più per la **proprietà a martingala** del processo geometrico si ha

$$E(S_T | \mathcal{I}_t) = S_t e^{\mu(T-t)} \quad \text{con} \quad T > t,$$

da cui deriva che

$$S_t = e^{-\mu(T-t)} E(S_T | \mathcal{I}_t),$$

ossia il prezzo corrente di un'azione corrisponde al valore atteso di un prezzo futuro scontato ad un tasso d'interesse pari a  $\mu$  all'interno di un regime di capitalizzazione istantanea.

Sono comunque stati formulati altri modelli, oltre a quello di Samuelson, per descrivere il prezzo delle azioni.

Nel 1976 **Robert C. Merton** ha criticato l'ipotesi di Samuelson secondo la quale i prezzi azionari seguono un processo continuo nel tempo ed ha proposto un modello misto in cui, oltre al processo geometrico, si fa intervenire un processo di Poisson, che è un processo stocastico le cui traiettorie non sono continue, ma presentano delle discontinuità di tipo salto.

In effetti il modello di Merton si considera atto a descrivere il prezzo delle azioni in un mercato finanziario in condizioni patologiche in cui, a causa di eventi improvvisi ed eccezionali, il prezzo delle azioni subisce delle fluttuazioni molto frequenti ed accentuate.

Nel 1995 **E. Eberlein** e **U. Keller** esaminando i prezzi della borsa di Francoforte hanno avanzato critiche al modello di Samuelson. I due autori sostengono

che i rendimenti azionari non seguono una distribuzione gaussiana, bensì una distribuzione a "code più spesse" (o fat-tail).

Nella Figura 7.1 sono rappresentate la funzione di densità di probabilità per una distribuzione gaussiana standard (tratteggiata) e la funzione di densità di probabilità per una distribuzione a code più spesse (tratto continuo).

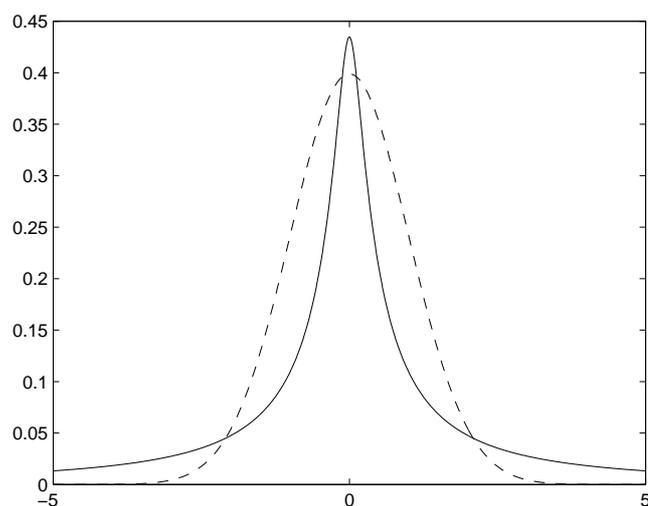


Figura 7.1:

Secondo la distribuzione gaussiana è altamente improbabile che la variabile casuale con questa distribuzione assuma i suoi valori in un intervallo molto distante dalla media, mentre nella distribuzione fat-tail tale probabilità è maggiore.

La distribuzione utilizzata da Eberlein e Keller è detta iperbolica perché il grafico del logaritmo della corrispondente funzione di densità è un'iperbole, mentre il grafico di quello della funzione di densità di una distribuzione gaussiana è una parabola.

## 7.2 Determinazione del prezzo delle opzioni call europee: equazione di Black e Scholes.

La formula di Black e Scholes fu ottenuta da Fisher Black e Myron Scholes nel 1973 e R.C.Merton nello stesso anno ne diede varie generalizzazioni.

Essa consente di trovare una soluzione al problema della valutazione del prezzo delle opzioni call europee prima della data di esercizio.

Il modello poggia su alcune ipotesi, valide sia nel mercato delle opzioni sia in quello del titolo sottostante, che in questo caso è un'azione.

Le ipotesi sono le seguenti:

- Il tasso d'interesse  $r$  a breve termine è noto e costante nel tempo ed è possibile indebitarsi a tale tasso;
- il prezzo di esercizio  $X$  dell'opzione è noto e costante nel tempo;
- il prezzo del titolo sottostante segue un processo geometrico per cui

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

con  $\mu$  tasso di rendimento atteso,  $\sigma$  volatilità dell'azione e  $W_t$  processo di Wiener;

- il titolo sottostante non paga dividendi;
- il mercato è perfettamente competitivo, ossia gli operatori non sono in grado di influenzare il prezzo dei titoli con le loro operazioni e si può acquistare e/o vendere in quantità arbitrarie ed infinitamente divisibili;
- c'è assenza di possibilità di arbitraggio;
- il mercato è privo di costi di transazione e non ci sono tasse;
- non ci sono limitazioni alle vendite allo scoperto, ossia ci si può indebitare indefinitamente.

Notiamo che per descrivere l'andamento del prezzo dell'azione, titolo sottostante dell'opzione, si segue il modello di Samuelson.

Consideriamo il caso di un'opzione call europea.

In base alle ipotesi formulate, il valore dell'opzione dipende dal prezzo dell'azione sottostante e dal tempo, nonché da altre variabili, come il prezzo di esercizio, il tasso d'interesse, il tasso di rendimento atteso e la volatilità dell'azione, che però nell'analisi sono supposte note e costanti. Allora possiamo riguardare in prima istanza il valore di un'opzione dipendente solo dal prezzo del sottostante e dal tempo  $t$ .

Scriveremo dunque  $c = c(t, S)$  dove  $S$  è il prezzo azionario e  $t$  indica il tempo. Supporremo  $t \in (0, T]$ , essendo  $T$  la data di scadenza della call.

Teniamo poi presente che al tempo  $T$ , cioè alla scadenza dell'opzione, si deve avere

$$c(T, S_T) = \max \{S_T - X, 0\},$$

con  $S_T$  prezzo azionario al tempo  $T$ .

L'idea alla base del modello di valutazione di Black e Scholes consiste nella creazione di un portafoglio coperto formato da una posizione lunga relativamente all'azione e una posizione corta relativamente ad un certo numero di opzioni in modo tale che, in equilibrio, il suo rendimento sia esattamente uguale a quello di un'attività priva di rischio.

Il portafoglio coperto viene realizzato mediante un procedimento di delta-hedging: il portafoglio è formato da un'azione relativamente alla quale sul mercato si assume posizione lunga e da un numero di call pari a  $\frac{1}{\Delta}$ , con  $\Delta = \frac{\partial c}{\partial S}$ , relativamente alle quali si assume posizione corta. Se la copertura viene realizzata con continuità il portafoglio diventa totalmente indipendente dalle fluttuazioni del prezzo dell'azione e il suo rendimento è certo.

Indicato con  $V$  il valore del portafoglio, avremo:

$$V = S - \frac{1}{\Delta} c.$$

L'unico fattore di rischio per  $V$  è rappresentato dal prezzo  $S$  dell'azione da cui  $V$  dipende sia direttamente che indirettamente tramite  $c$ .

Come sappiamo  $S$  ha carattere stocastico ed è descritto dal processo geometrico  $S_t$  soddisfacente all'equazione differenziale stocastica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Anche  $c$  ha carattere stocastico ed è descritto dal processo stocastico

$$c_t = c(t, S_t).$$

Se assumiamo che la funzione  $c(t, S)$  sia continua e siano continue le derivate  $\partial_t c$ ,  $\partial_S c$ ,  $\partial_{SS}^2 c$ , il differenziale stocastico di  $c_t$  è dato dalla formula di Itô. Tenendo presente che  $S = S_t$  per cui  $F = \mu S_t$  e  $G = \sigma S_t$ , otteniamo:

$$dc_t = \partial_t c(t, S_t) dt + \partial_S c(t, S_t) dS_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \partial_{SS}^2 c(t, S_t) dt.$$

Consideriamo ora l'evoluzione temporale di  $V$  nell'intervallo di tempo  $(t, t + \Delta t)$  con  $\Delta t$  così piccolo da poter ritenere costante in tale intervallo il  $\Delta$  della call che perciò nelle successive argomentazioni considereremo dato da  $\Delta = \frac{\partial c}{\partial S}(t, S_t)$ .

Nel seguito, per non appesantire la scrittura, ometteremo il pedice  $t$ .  
 Nell'intervallo di tempo considerato, abbiamo che  $V$  è descritto dal processo stocastico:

$$V = S - \frac{c}{\Delta}$$

e quindi:

$$dV = dS - \frac{dc}{\Delta}. \quad (7.2.1)$$

Se nella (7.2.1) andiamo a sostituire al differenziale stocastico di  $c$  la formula di Itô scritta sopra, deduciamo:

$$\begin{aligned} dV &= dS - \frac{1}{\Delta} \left( \partial_t c dt + \partial_{Sc} dS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \partial_{SS}^2 c dt \right) \\ &= -\frac{1}{\Delta} \left( \partial_t c + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \partial_{SS}^2 c \right) dt, \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

avendo tenuto presente che  $\Delta = \partial_{Sc}$ .

Vediamo allora che nell'espressione di  $dV$  data dalla (7.2.2) il coefficiente di  $dW$  è nullo e dunque con la strategia di delta-hedging viene eliminata l'influenza di eventi casuali sulla variazione del valore del portafoglio.

A questo punto osserviamo che, avendo supposto l'assenza di possibilità di arbitraggio, poichè il portafoglio è privo di rischio, si comporta come un'obbligazione priva di rischio.

Adottando il regime di capitalizzazione istantanea, il valore  $B_t$  al tempo  $t$  di un'obbligazione che al tempo  $t = 0$  ha valore  $B_0$  sarà tale che:

$$B_t = B_0 e^{rt}$$

con  $r$  tasso d'interesse di mercato.

$B_t$  è una funzione non stocastica e dunque il suo differenziale è dato da

$$dB_t = r B_0 e^{rt} dt = r B_t dt.$$

Allora avremo che per il portafoglio sussiste la relazione:

$$dV = r V dt = r \left( S - \frac{c}{\Delta} \right) dt. \quad (7.2.3)$$

Sostituendo nella (7.2.2), otteniamo

$$-\frac{1}{\Delta} \left( \partial_t c + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \partial_{SS}^2 c \right) dt = r \left( S - \frac{c}{\Delta} \right) dt$$

da cui moltiplicando entrambi i membri per  $\Delta$  deduciamo:

$$-\partial_t c - \frac{\sigma^2}{2} S^2 \partial_{SS}^2 c = r \Delta S - r c.$$

Infine, tenendo presente che  $\Delta = \partial_S c$ , l'equazione scritta sopra si riduce a

$$\partial_t c + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \partial_{SS}^2 c + r S \partial_S c - r c = 0. \quad (7.2.4)$$

D'altra parte, affinché il portafoglio risulti coperto in tutto l'intervallo  $(0, T)$  la strategia di delta-hedging deve essere attuata con continuità, istante per istante, per ogni  $t \in (0, T)$ .

Dunque otteniamo che la funzione  $c(t, S)$  che rappresenta il prezzo al tempo  $t$ , anteriore alla data di esercizio, di una call europea avente come sottostante un'azione di prezzo  $S$  deve soddisfare per ogni  $t \in (0, T)$  e per ogni  $S \in (0, +\infty)$  l'equazione alle derivate parziali (7.2.4), detta **equazione di Black e Scholes**. All'equazione, che deve essere soddisfatta per  $t \in (0, T)$ , dobbiamo associare la condizione finale:

$$c(T, S_T) = \max \{S_T - X, 0\}. \quad (7.2.5)$$

Per completezza nell'Appendice 4 del Capitolo 9 sono esposti alcuni brevi richiami relativi alle equazioni differenziali alle derivate parziali.

### 7.3 Risoluzione del problema di Black e Scholes data la condizione finale.

Riscriviamo l'equazione (7.2.4) di Black e Scholes:

$$\partial_t c + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \partial_{SS}^2 c + r S \partial_S c - r c = 0.$$

Tale equazione è un'equazione differenziale alle derivate parziali nelle due variabili indipendenti  $(t, S)$  con funzione incognita  $c(t, S)$ ; in particolare si tratta di un'equazione del II ordine, lineare ed omogenea.

Notiamo che l'equazione è **di tipo parabolico** in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$ . Infatti, in tale insieme i coefficienti delle derivate seconde non si annullano simultaneamente e il discriminante è nullo.

Possiamo inoltre notare che l'equazione non è ridotta alla II forma canonica perchè il coefficiente della derivata seconda rispetto a  $S$  non è uguale a 1. Ricordiamo che un'equazione alle derivate parziali di ordine 2 lineare o più in generale semilineare si dice ridotta alla seconda forma canonica se in essa non compaiono

le derivate miste di ordine 2 e quelle pure hanno coefficiente 0 o  $\pm 1$  (vedi Appendice 4).

Osserviamo poi che all'equazione è associata la condizione (7.2.5) che non è una condizione iniziale, bensì una condizione finale e dunque non rientra tra le usuali condizioni ai limiti che vengono associate ad un'equazione alle derivate parziali nella quale compaia tra le variabili il tempo.

Ci proponiamo di mostrare che con una trasformazione regolare delle variabili indipendenti e con un cambiamento di funzione incognita è possibile ricondursi ad un'equazione di tipo parabolico ridotta alla seconda forma canonica e contemporaneamente trasformare la condizione finale in una usuale condizione iniziale o di Cauchy per un'equazione di tipo parabolico. Esponiamo il procedimento "originale" seguito da Black e Scholes.

Teniamo presente che, essendo nella realtà il prezzo di un'azione sempre positivo, noi consideriamo l'equazione (7.2.4) in  $(0, T) \times (0, +\infty)$ , dove l'equazione è di tipo parabolico.

Introduciamo in luogo di  $(t, S)$  le due nuove variabili  $(z, u)$  così definite:

$$z = -\frac{2}{\sigma^2} \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 (t - T)$$

$$u = \frac{2}{\sigma^2} \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left[ \log \frac{S}{X} - \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - T) \right].$$

Ovviamente si assume:  $r \neq \frac{\sigma^2}{2}$ .

Tale trasformazione delle variabili indipendenti risulta regolare, come si può facilmente verificare (vedi Appendice 2).

Inoltre il trasformato del dominio  $(0, T) \times (0, +\infty)$  è  $(0, z_0) \times \mathbb{R}$  con  $z_0 = \frac{2}{\sigma^2} \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 T$ .

Facciamo poi un cambiamento di funzione incognita prendendo come nuova incognita la funzione  $Y(z, u)$  tale che

$$c(t, S) = e^{r(t-T)} Y(z, u).$$

Applicando il teorema di derivazione delle funzioni composte e denotando per semplicità con  $Y_u, Y_z, Y_{uu}$  la derivata prima rispetto a  $u$  e  $z$  e la derivata seconda

rispetto a  $u$  della funzione  $Y$ , otteniamo:

$$\begin{aligned}\partial_t c(t, S) &= r e^{r(t-T)} Y(z, u) - e^{r(t-T)} [Y_u(z, u) + Y_z(z, u)] \frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \\ \partial_S c(t, S) &= e^{r(t-T)} Y_u(z, u) \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right) \frac{1}{S} \\ \partial_{SS}^2 c(t, S) &= e^{r(t-T)} Y_{uu}(z, u) \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)^2 \frac{1}{S^2} - e^{r(t-T)} Y_u(z, u) \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right) \frac{1}{S^2}.\end{aligned}$$

Se sostituiamo nell'equazione (7.2.4), dividendo entrambi i membri per  $e^{r(t-T)}$  e facendo qualche prima semplificazione, deduciamo:

$$\begin{aligned}-\frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 (Y_z + Y_u) + \frac{\sigma^2}{2} \left\{ \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)^2 Y_{uu} - \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right) Y_u \right\} + \\ + r \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right) Y_u = 0.\end{aligned}\quad (7.3.1)$$

Dividendo entrambi i membri della (7.3.1) per  $\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)$  e semplificando, otteniamo:

$$-\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) (Y_z + Y_u) + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right) Y_{uu} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) Y_u = 0$$

da cui

$$-\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) Y_z + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) Y_{uu} = 0.$$

Infine dividendo per  $\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)$ , arriviamo alla seguente equazione:

$$Y_z = Y_{uu}\quad (7.3.2)$$

che ha la stessa forma dell'equazione del calore omogenea in due variabili in cui in luogo della variabile temporale  $t$  e della variabile spaziale  $x$  compaiono rispettivamente le variabili  $z$  e  $u$  definite in precedenza e  $a = 1$ . Ricordiamo infatti che quest'ultima equazione è usualmente scritta nella forma:

$$\frac{1}{a^2} v_t = v_{xx}$$

dove  $v$  è la funzione incognita e  $a$  è una costante positiva.

Mostriamo ora che con le nuove variabili indipendenti e con la nuova funzione incognita la condizione (7.2.5), che risultava finale per l'equazione (7.2.4), si trasforma in una condizione iniziale per l'equazione trasformata (7.3.2).

Infatti:

$$c(T, S_T) = e^{r(T-T)} Y \left( 0, \left( \frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right) \log \frac{S_T}{X} \right) = Y(0, u_T)$$

Dunque la (7.2.5) si riduce a:

$$Y(0, u_T) = \max \{ S_T - X, 0 \}$$

poiché per  $t = T$  si ha  $z = 0$ .

Vediamo di esprimere anche il secondo membro mediante le nuove variabili ricorrendo alle equazioni della trasformazione delle variabili indipendenti. Ponendo in queste  $t = T$  si deduce  $z_T = 0$  per cui abbiamo

$$\log \frac{S_T}{X} = \frac{u_T}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1} \quad \Longrightarrow \quad S_T = X e^{\frac{u_T}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}}.$$

In conclusione, la condizione (7.2.5) ora si scrive nella forma:

$$Y(0, u_T) = \max \left\{ X \left( e^{\frac{u_T}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}} - 1 \right), 0 \right\}.$$

Tale condizione può essere ulteriormente precisata.

Consideriamo dapprima il caso in cui  $\frac{2r}{\sigma^2} - 1 > 0$ .

Allora

$$e^{\frac{u_T}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}} - 1 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{u_T}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_T \geq 0.$$

Dunque nel caso in cui  $\frac{2r}{\sigma^2} - 1 > 0$

$$\max \left\{ X \left( e^{\frac{u_T}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}} - 1 \right), 0 \right\} = 0 \quad \text{se} \quad u_T < 0$$

$$\max \left\{ X \left( e^{\frac{u_T}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}} - 1 \right), 0 \right\} = X \left( e^{\frac{u_T}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}} - 1 \right) \quad \text{se} \quad u_T \geq 0$$

e la (7.2.5) diviene

$$Y(0, u_T) = 0 \quad \text{se} \quad u_T < 0$$

$$Y(0, u_T) = X \left( e^{\frac{u_T}{\sigma^2} - 1} - 1 \right) \quad \text{se} \quad u_T \geq 0. \quad (7.3.3)$$

In maniera analoga si procede per il caso opposto:  $\frac{2r}{\sigma^2} - 1 < 0$ .

In conclusione la determinazione del prezzo di una call europea è basata sulla ricerca della soluzione in  $[0, z_0) \times \mathbb{R}$  del problema che si ottiene associando all'equazione (7.3.2) la condizione iniziale:

$$Y(0, u) = g(u)$$

dove, se per il momento ci limitiamo a considerare il caso  $\frac{2r}{\sigma^2} - 1 > 0$ ,  $g$  è così definita:

$$\begin{aligned} \text{se} \quad u \geq 0 \quad & g(u) = X \left( e^{\frac{u}{\sigma^2} - 1} - 1 \right) \\ \text{se} \quad u < 0 \quad & g(u) = 0. \end{aligned}$$

A questo punto è allora opportuno considerare il problema di Cauchy per l'equazione del calore omogenea in due variabili indipendenti (con  $a = 1$ ) e fornire alcuni risultati relativi a tale problema che ci saranno utili per risolvere il problema di Black e Scholes.

**Definizione 7.2.** *Dal punto di vista classico il problema di Cauchy per l'equazione del calore omogenea in due variabili indipendenti  $(t, x)$  con  $a = 1$  consiste nel trovare una funzione  $v(t, x) \in \mathcal{C}^{1,2}((0, +\infty) \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}([0, +\infty) \times \mathbb{R})$  che sia soluzione in  $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$  dell'equazione:*

$$\partial_t v(t, x) = \partial_{xx}^2 v(t, x) \quad (7.3.4)$$

e soddisfi la condizione iniziale:

$$v(0, x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (7.3.5)$$

Ricordiamo che  $v \in \mathcal{C}^{1,2}((0, +\infty) \times \mathbb{R})$  se  $v$  in  $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$  possiede continue la derivata prima rispetto a  $t$  e le derivate prima e seconda rispetto a  $x$ .

Si noti che condizione necessaria affinché il problema di Cauchy che abbiamo formulato ammetta soluzione è che  $g \in C(\mathbb{R})$ .

Si possono dimostrare diversi teoremi di esistenza e unicità della soluzione del

problema (7.3.4), (7.3.5) a seconda delle proprietà di regolarità del dato iniziale  $g(x)$ .

Un teorema classico di esistenza della soluzione del problema di Cauchy per l'equazione del calore richiede che la funzione  $g$  sia continua e limitata in  $\mathbb{R}$ . Ma per il problema di Black e Scholes tale teorema non è applicabile perchè la funzione  $g(u)$  non è limitata. Tuttavia si può provare che la soluzione classica del problema di Cauchy (7.3.4), (7.3.5) in  $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$  esiste anche se il dato iniziale non è limitato, purchè non cresca troppo rapidamente.

**Teorema 7.1.** *Supponiamo che la funzione  $g$  sia continua in  $\mathbb{R}$  e tale che*

$$|g(x)| \leq C e^{d|x|^\gamma} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (7.3.6)$$

dove  $C, d, \gamma$  sono costanti positive con  $\gamma < 2$ .

Allora la funzione  $v(t, x)$  così definita:

$$\forall (t, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} \quad v(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_t(x, y) g(y) dy \quad (7.3.7)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad v(0, x) = g(x), \quad (7.3.8)$$

con

$$K_t(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}},$$

è soluzione classica del problema di Cauchy (7.3.4), (7.3.5) in  $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$ .

La funzione  $K_t(x, y)$ , definita in  $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^2$ , è detta **nucleo di Gauss-Weierstrass**.

**Osservazione 7.1.** Il teorema continua a sussistere se nell'equazione del calore omogenea la costante positiva  $a$  è diversa da 1. In tal caso il nucleo di Gauss-Weierstrass ha la forma seguente:

$$K_t(x, y) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}.$$

Ritorniamo ora al problema di Black e Scholes:

$$Y_z = Y_{uu} \quad (7.3.9)$$

$$Y(0, u) = g(u) \quad (7.3.10)$$

dove  $g$  è così definita:

$$\begin{aligned} \text{se } u \geq 0 \quad g(u) &= X \left( e^{\frac{2r}{\sigma^2} - 1} - 1 \right) \\ \text{se } u < 0 \quad g(u) &= 0. \end{aligned}$$

Poiché il problema di partenza era considerato in  $(0, T] \times (0, +\infty)$ , per la relazione che sussiste tra le vecchie variabili  $(t, S)$  e le nuove  $(z, u)$ , il problema (7.3.9), (7.3.10), cui siamo pervenuti deve essere risolto in  $[0, z_0) \times \mathbb{R}$  dove  $z_0$  è il valore che assume  $z$  per  $t = 0$  dato da

$$z_0 = \frac{2}{\sigma^2} \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 T.$$

Come è facile verificare, la funzione  $g$  soddisfa alle ipotesi del teorema 7.1. Infatti, tenendo presente la definizione di  $g$ , vediamo che è continua in  $\mathbb{R}$  e che verifica la seguente disuguaglianza

$$|g(u)| \leq X e^{\frac{|u|}{\sigma^2 - 1}} \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Dunque è soddisfatta la condizione (7.3.6) con

$$C = X, \quad d = \frac{1}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}, \quad \gamma = 1.$$

Allora, grazie al teorema 7.1, sappiamo scrivere la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione (7.3.9) con dato iniziale  $g$  e la soluzione del problema di Black e Scholes è la sua restrizione a  $[0, z_0) \times \mathbb{R}$ .

Dunque la soluzione del problema (7.3.9), (7.3.10)  $\forall (z, u) \in (0, z_0) \times \mathbb{R}$  è data da

$$Y(z, u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi z}} e^{-\frac{(u-\xi)^2}{4z}} g(\xi) d\xi,$$

ossia per come è definita  $g$

$$Y(z, u) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi z}} e^{-\frac{(u-\xi)^2}{4z}} X \left( e^{\frac{\xi}{\sigma^2} - 1} - 1 \right) d\xi \quad \forall (z, u) \in (0, z_0) \times \mathbb{R}. \quad (7.3.11)$$

Effettuiamo un cambiamento della variabile d'integrazione nella (7.3.11), ponendo  $q = -\frac{u - \xi}{\sqrt{2z}}$ .

Tenendo presente che se  $\xi = 0$  allora  $q = -\frac{u}{\sqrt{2z}}$ , che se  $\xi \rightarrow +\infty$  allora  $q \rightarrow +\infty$  e che inoltre  $dq = \frac{d\xi}{\sqrt{2z}}$ , la (7.3.11) si scrive nella forma

$$Y(z, u) = \int_{-\frac{u}{\sqrt{2z}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}} X \left( e^{\frac{q\sqrt{2z}+u}{\frac{2r}{\sigma^2}-1}} - 1 \right) dq. \quad (7.3.12)$$

A questo punto poniamo:

$$d_1 = \frac{\log \frac{S}{X} + \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad d_2 = \frac{\log \frac{S}{X} + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Allora per  $t < T$ :

$$\frac{u}{\sqrt{2z}} = \frac{\frac{2}{\sigma^2} \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \log \frac{S}{X} - \frac{2}{\sigma^2} \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 (t-T)}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{2}{\sigma^2}} \sqrt{\left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 (T-t)}} =$$

$$= \frac{\log \frac{S}{X} + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_2,$$

$$\frac{q\sqrt{2z}+u}{\frac{2r}{\sigma^2}-1} = \sigma q\sqrt{T-t} + \log \frac{S}{X} + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t).$$

La (7.3.12) si può perciò scrivere nella forma

$$\begin{aligned} Y(z, u) &= \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}} X \left( e^{\sigma q\sqrt{T-t} + \log \frac{S}{X} + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)} - 1 \right) dq = \\ &= - \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}} X dq + \\ &+ \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}} X \frac{S}{X} e^{\sigma q\sqrt{T-t} + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)} dq = \\ &= -XN(d_2) + \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{S}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(q^2 - 2\sigma q\sqrt{T-t} + \sigma^2(T-t))} e^{r(T-t)} dq \\ &= -XN(d_2) + \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{S}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(q - \sigma\sqrt{T-t})^2} e^{r(T-t)} dq \end{aligned}$$

dove abbiamo posto:

$$N(d) = \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$$

che è la funzione di distribuzione per una distribuzione gaussiana standard (media 0 e varianza 1) e nel I integrale a secondo membro (nella seconda riga) abbiamo fatto il cambiamento di variabile d'integrazione  $q = -s$ .

Riguardo al secondo integrale, cambiamo variabile d'integrazione ponendo  $y = q - \sigma\sqrt{T-t}$  per cui  $q = -d_2 \implies y = -d_2 - \sigma\sqrt{T-t} = -d_1$ . Perciò l'integrale si scrive come

$$\begin{aligned} S \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(q-\sigma\sqrt{T-t})^2} e^{r(T-t)} dq &= S e^{r(T-t)} \int_{-d_1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= S e^{r(T-t)} N(d_1). \end{aligned}$$

In conclusione per  $Y(z, u)$  troviamo la seguente espressione:

$$Y(z, u) = S e^{r(T-t)} N(d_1) - X N(d_2).$$

Per la relazione tra  $c(t, S)$  e  $Y(z, u)$  infine deduciamo:

$$c(t, S) = S N(d_1) - X e^{-r(T-t)} N(d_2) \tag{7.3.13}$$

che è la **formula di Black e Scholes per la valutazione del prezzo di una call europea**.

A tale formula siamo pervenuti supponendo  $\frac{2r}{\sigma^2} - 1 > 0$ . Alla medesima formula si arriva nell'ipotesi opposta  $\frac{2r}{\sigma^2} - 1 < 0$ .

Osserviamo che la formula di Black e Scholes (7.3.13) che abbiamo ottenuto supponendo  $t \in (0, T)$  sussiste anche per  $t = 0$ .

Possiamo riassumere i risultati trovati nel seguente teorema

**Teorema 7.2.** *Se sono soddisfatte le ipotesi enunciate all'inizio del paragrafo 7.2, il prezzo  $c = c(t, S)$  di un'opzione call europea per  $0 \leq t < T$  è dato dalla formula di Black e Scholes (7.3.13).*

Notiamo che nell'espressione di  $c(t, S)$  compaiono  $S$  e  $X e^{-r(T-t)}$  che rappresenta il prezzo di esercizio scontato al tempo attuale e che questi sono ponderati con  $N(d_1)$  e  $N(d_2)$ . Come vedremo nel paragrafo seguente  $N(d_1)$  risulta uguale a  $\Delta$ , mentre  $N(d_2)$  può essere interpretata come la probabilità che l'opzione venga esercitata.

**Osservazione 7.2.** Dalla formula di Black e Scholes, tenendo presente le espressioni di  $d_1$  e  $d_2$ , vediamo che per stabilire il prezzo di una call europea al tempo attuale bisogna conoscere i seguenti dati:

- il prezzo di esercizio  $X$  e la data di esercizio  $T$  stabiliti nel contratto
- il tasso d'interesse di mercato  $r$
- il prezzo  $S$  e la volatilità  $\sigma$  dell'azione sottostante.

### Esempio 7.3.

Ci proponiamo di determinare il prezzo di una call europea al tempo attuale  $t$  conoscendo i seguenti dati:

$$S_t = 100 \quad X = 105 \quad r = 20\% \quad \sigma = 30\% \quad T - t = 0,5.$$

In primo luogo calcoliamo  $d_1$  e  $d_2$  che risultano dati da

$$d_1 \approx 0,35, \quad d_2 \approx 0,14.$$

In secondo luogo si determinano i valori approssimati di  $N(d_1)$  e  $N(d_2)$ :

$$N(d_1) \approx 0,6368, \quad N(d_2) \approx 0,5557.$$

Infine sostituendo nella formula di Black e Scholes i valori trovati e i rimanenti dati si ottiene

$$c \approx 10,89.$$

Rappresentiamo nella Figura 7.2 il grafico del prezzo al tempo  $t$  di un'opzione call in funzione del prezzo dell'azione sottostante assumendo il prezzo di esercizio  $X = 105$ , la vita residua  $T - t = 0,5$ ,  $r = 20\%$  e  $\sigma = 30\%$ . Possiamo notare la stretta analogia con la Figura 2.2.

## 7.4 Calcolo delle derivate della funzione $c$ .

Ci proponiamo ora di calcolare in base alla formula di Black e Scholes le cosiddette greche, ossia le derivate del prezzo di una call europea rispetto ad alcuni dei parametri da cui dipende.

Dimostriamo dapprima il seguente

**Lemma 7.1.** *Dalla formula di Black e Scholes si deduce:*

$$\frac{\partial c}{\partial d_1} = 0.$$

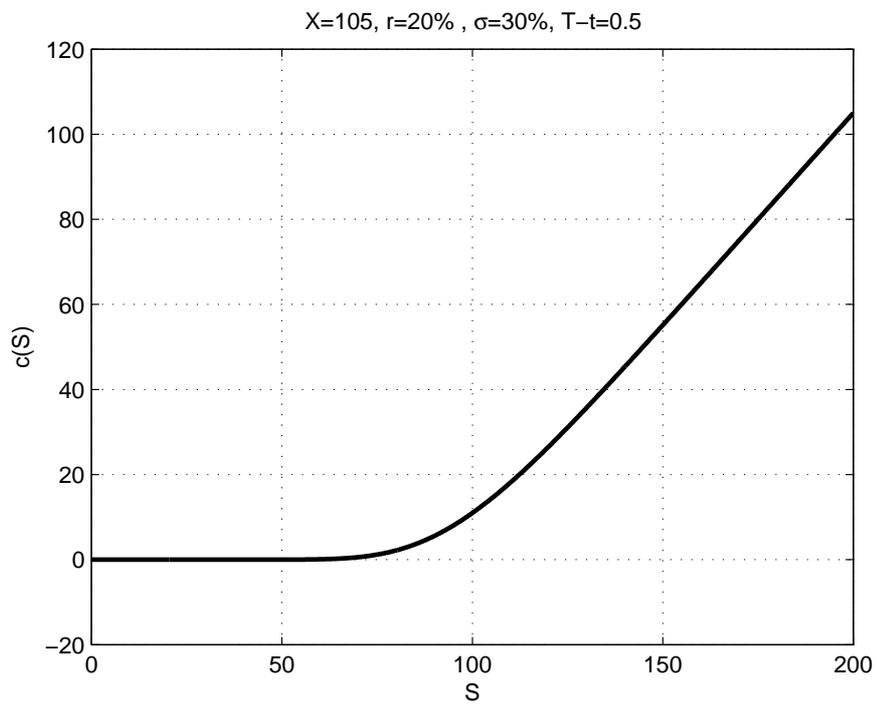


Figura 7.2:

Dimostrazione

Per la formula di Black e Scholes abbiamo:

$$c(t, S) = S N(d_1) - X e^{-r(T-t)} N(d_1 - \sigma \sqrt{T-t}),$$

da cui otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial d_1} &= \frac{S}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial d_1} \left( \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) - \frac{X}{\sqrt{2\pi}} e^{-r(T-t)} \frac{\partial}{\partial d_1} \left( \int_{-\infty}^{d_1 - \sigma \sqrt{T-t}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( S e^{-\frac{d_1^2}{2}} - X e^{-r(T-t)} e^{-\frac{(d_1 - \sigma \sqrt{T-t})^2}{2}} \right). \end{aligned}$$

Il lemma è provato se dimostriamo che

$$S e^{-\frac{d_1^2}{2}} - X e^{-r(T-t) - \frac{(d_1 - \sigma \sqrt{T-t})^2}{2}} = 0.$$

Ricordando che

$$\forall a, b > 0 \quad a - b = 0 \iff \log a - \log b = 0,$$

consideriamo la differenza dei logaritmi di  $S e^{-\frac{d_1^2}{2}}$  e  $X e^{-r(T-t) - \frac{(d_1 - \sigma \sqrt{T-t})^2}{2}}$ :

$$\begin{aligned} \log S - \frac{d_1^2}{2} - \log X + r(T-t) + \frac{(d_1 - \sigma \sqrt{T-t})^2}{2} \\ &= \log \frac{S}{X} + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t) - d_1 \sigma \sqrt{T-t} \\ &= \log \frac{S}{X} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t) - d_1 \sigma \sqrt{T-t} = 0, \end{aligned}$$

dove si è tenuta presente la definizione di  $d_1$ .

Dunque il lemma è provato.

**Proposizione 7.1.** *Dalla formula di Black e Scholes si ottiene:*

$$\Delta = N(d_1).$$

Dimostrazione

Dalla formula di Black e Scholes scritta nella forma

$$c(t, S) = S N(d_1) - X e^{-r(T-t)} N(d_1 - \sigma \sqrt{T-t}),$$

vediamo che  $c$  dipende da  $S$  sia direttamente sia indirettamente tramite  $d_1$ .

Otteniamo dunque:

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1) + \frac{\partial c}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial S} = N(d_1),$$

dove abbiamo sfruttato il lemma 7.1.

Osserviamo che  $N(d_1) \in (0, 1)$  e dunque  $c$  è funzione crescente di  $S$ .

**Proposizione 7.2.** *Dalla formula di Black e Scholes si deduce:*

$$\rho := \frac{\partial c}{\partial r} > 0.$$

Dimostrazione

Considerando la formula di Black e Scholes ed applicando il lemma 7.1, otteniamo:

$$\rho = \frac{\partial c}{\partial r} = \frac{\partial c}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial r} + X e^{-r(T-t)} (T-t) N(d_2) = X e^{-r(T-t)} (T-t) N(d_2) > 0.$$

Rileviamo che  $c$  è funzione crescente del tasso di interesse.

**Proposizione 7.3.** *Dalla formula di Black e Scholes si ottiene:*

$$\Theta := \frac{\partial c}{\partial t} < 0.$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} \Theta = \frac{\partial c}{\partial t} &= \frac{\partial c}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial t} - X r e^{-r(T-t)} N(d_1 - \sigma \sqrt{T-t}) \\ &\quad - X e^{-r(T-t)} N'(d_1 - \sigma \sqrt{T-t}) \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}. \end{aligned}$$

Ma la prima derivata è nulla per il lemma 7.1, mentre

$$N'(d_1 - \sigma \sqrt{T-t}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(d_1 - \sigma \sqrt{T-t})^2}{2}}.$$

Dunque

$$\Theta = -X r e^{-r(T-t)} N(d_2) - \frac{X}{\sqrt{2\pi}} e^{-r(T-t) - \frac{(d_1 - \sigma \sqrt{T-t})^2}{2}} \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} < 0.$$

Si ha perciò che  $c$  è decrescente rispetto al tempo, ossia, tenendo presente che  $T - t > 0$ , più la scadenza è lontana più vale la call, più siamo vicini alla scadenza meno vale la call.

Una conferma di tale affermazione si ha dalla seguente

**Proposizione 7.4.** *Dalla formula di Black e Scholes discende:*

$$\frac{\partial c}{\partial T} > 0.$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial T} &= \frac{\partial c}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial T} + X r e^{-r(T-t)} N(d_1 - \sigma \sqrt{T-t}) \\ &\quad + X r e^{-r(T-t)} N'(d_1 - \sigma \sqrt{T-t}) \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} \\ &= X r e^{-r(T-t)} N(d_2 + \frac{X}{\sqrt{2\pi}} e^{-r(T-t) - \frac{(d_1 - \sigma \sqrt{T-t})^2}{2}} \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}) > 0. \end{aligned}$$

Questa disuguaglianza ci dice che al crescere di  $T$ , ossia a data di scadenza più lontana, la call aumenta di valore.

**Proposizione 7.5.** *Dalla formula di Black e Scholes si deduce:*

$$\text{Vega} := \frac{\partial c}{\partial \sigma} > 0.$$

Dimostrazione

Dalla formula di Black e Scholes ricaviamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial \sigma} &= \frac{\partial c}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - X e^{-r(T-t)} N'(d_1 - \sigma \sqrt{T-t}) (-\sqrt{T-t}) \\ &= X e^{-r(T-t)} N'(d_2) \sqrt{T-t} > 0. \end{aligned}$$

All'aumentare della volatilità del titolo sottostante aumenta il prezzo della call europea.

**Proposizione 7.6.** *Data una call europea, si ottiene:*

$$\Gamma := \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} > 0.$$

Dimostrazione

$$\Gamma = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = \frac{\partial N}{\partial S}(d_1) = N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \frac{1}{S} \frac{1}{\sigma \sqrt{T-t}} > 0.$$

Osserviamo che  $\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S}$  per cui  $\Delta$  è una funzione crescente di  $S$ .

Se  $\Gamma$  è molto grande, in una strategia di delta-hedging bisogna continuamente aggiustare il  $\Delta$ , mentre se  $\Gamma$  è piccolo, il portafoglio può essere mantenuto per un certo periodo senza eccessivi rischi.

**Proposizione 7.7.** *Dalla formula di Black e Scholes si deduce:*

$$\frac{\partial c}{\partial X} < 0.$$

Dimostrazione

$$\frac{\partial c}{\partial X} = \frac{\partial c}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial X} = e^{-r(T-t)} N(d_1 - \sigma \sqrt{T-t}) = -e^{-r(T-t)} N(d_2) < 0.$$

Dunque al crescere di  $X$  cala il valore della call. Questo perché il pagamento di una call europea alla scadenza è pari a  $\max\{S - X, 0\}$ . Al crescere di  $X$  cala il pagamento che ci dà la call e quindi la call vale di meno.

Si osservi che quest'ultima derivata non è una greca.



## Capitolo 8

# Estensioni della formula di Black e Scholes e sue applicazioni

### 8.1 Formula di Black e Scholes per call americane e put europee.

La formula che abbiamo stabilito per la valutazione del prezzo delle call europee si può estendere anche alle call americane aventi come sottostante un'azione, poiché siamo nelle ipotesi di assenza di arbitraggio e di assenza di dividendi. Infatti, come abbiamo visto nel Capitolo 2, in tali ipotesi, il valore di una call americana è esattamente uguale a quello di una call europea.

Il modello di Black e Scholes può essere applicato, con opportune modifiche, anche alle opzioni put europee, tenendo presente che per tali opzioni  $\Delta$  è negativo.

In questo caso, facendo le stesse ipotesi e sfruttando gli stessi argomenti visti per le call, si compone un portafoglio coperto costituito da una posizione lunga su un'azione e una posizione lunga su  $\frac{1}{|\Delta|}$  opzioni put. La copertura perfetta è mantenuta modificando con continuità l'ammontare di put nel portafoglio.

Seguendo lo stesso ragionamento svolto per le call, troviamo che il valore  $p(t, S)$  di una put è soluzione di un'equazione differenziale analoga alla (7.2.4):

$$\partial_t p + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \partial_{SS}^2 p + r S \partial_S p - r p = 0. \quad (8.1.1)$$

cui si associa la condizione alla scadenza  $T$ :

$$p(T, S_T) = \max\{X - S_T, 0\}.$$

Si ottiene pertanto una soluzione analoga alla (7.3.13), data da

$$p(t, S) = -S N(-d_1) + X e^{-r(T-t)} N(-d_2). \quad (8.1.2)$$

Si può pervenire alla (8.1.2) anche più velocemente utilizzando la formula di Black e Scholes per la valutazione del prezzo delle opzioni call e la relazione di parità put-call ottenuta nel Capitolo 2.

Precisamente, se indichiamo con  $p(t, S)$  il prezzo di una put europea, avente come sottostante un'azione avente valore  $S$ , con prezzo di esercizio  $X$  e data di esercizio  $T$ , abbiamo:

$$p(t, S) = c(t, S) - S + X B(T - t) \quad (8.1.3)$$

dove  $c(t, S)$  è il prezzo di una call europea con uguale prezzo di esercizio, uguale data di esercizio e uguale azione sottostante, mentre  $B(\tau)$  è il prezzo di un'obbligazione priva di rischio che paga 1 unità di conto dopo un tempo pari a  $\tau$ . Se si suppone costante il tasso annuo di interesse e che il regime di capitalizzazione sia quello di capitalizzazione istantanea, si ha

$$B(T - t) = e^{-r(T-t)},$$

per cui la (8.1.3) si scrive nella forma:

$$p(t, S) = c(t, S) - S + X e^{-r(T-t)}.$$

Se ora a  $c(t, S)$  sostituiamo l'espressione data dalla formula di Black e Scholes otteniamo:

$$\begin{aligned} p(t, S) &= S N(d_1) - X e^{-r(T-t)} N(d_2) - S + X e^{-r(T-t)} \\ &= S(N(d_1) - 1) + X e^{-r(T-t)}(1 - N(d_2)). \end{aligned}$$

D'altra parte

$$1 - N(d) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_d^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Se nell'ultimo integrale scritto sopra facciamo il cambiamento di variabile d'integrazione  $x = -y$ , deduciamo:

$$1 - N(d) = \int_{-\infty}^{-d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = N(-d).$$

In definitiva troviamo che la formula che consente di prevedere il prezzo di una put europea è la (8.1.2):

$$p(t, S) = -S N(-d_1) + X e^{-r(T-t)} N(-d_2).$$

Vediamo di ricalcolare il  $\Delta$  per una put europea utilizzando non la (8.1.2) ma la relazione di parità put-call e il valore di  $\Delta$  trovato per una call:

$$\Delta = \frac{\partial p}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S}(c - S + X e^{-r(T-t)}) = \frac{\partial c}{\partial S} - 1 = N(d_1) - 1 = -N(-d_1).$$

Perciò per una put europea si ha  $\Delta \in (-1, 0)$ , così come avevamo già trovato nel Capitolo 2. Questo ha delle conseguenze sulle strategie di delta-hedging che coinvolgono le opzioni put europee aventi un'azione come titolo sottostante. Infatti in tal caso, come abbiamo già osservato più volte, occorre tenere una posizione dello stesso segno relativamente alla put e all'azione.

Usando la relazione di parità put-call oppure derivando direttamente la (8.1.2) si possono calcolare tutte le derivate di  $p(t, S)$  corrispondenti a quelle di  $c(t, S)$  che abbiamo calcolato nel capitolo precedente.

Ad esempio si può provare che:

$$\frac{\partial p}{\partial r} < 0, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial S^2} > 0, \dots$$

Nel caso generale di opzioni put americane non è possibile determinare una formula esplicita per la valutazione del loro prezzo  $P(t, S)$  perché, essendo conveniente esercitarle prima della data di scadenza, è incerta la data in cui vengono esercitate.

Solo nel caso delle **put americane perpetue**, ossia senza data di scadenza, poiché il tempo è influente, è possibile determinare un'espressione esplicita per il loro prezzo, ma su ciò non insistiamo.

## 8.2 Estensioni del modello di Black e Scholes.

Il modello di Black e Scholes di valutazione del prezzo delle opzioni è rilevante sotto le ipotesi fatte nel capitolo precedente ma, tuttavia, in molte applicazioni alcune di queste ipotesi vengono violate. In questi casi occorre verificare se è possibile formulare delle estensioni del modello, per tener conto delle restrizioni che caratterizzano sia il mercato delle opzioni sia quello del titolo sottostante.

A partire dal contributo di **R.C. Merton** (1973) sono state elaborate numerose estensioni, volte a generalizzare le assunzioni fatte nel modello originario di

Black e Scholes.

Tra esse ricordiamo le principali, che hanno avuto per oggetto i seguenti punti:

- *Assenza di dividendi*
- *Prezzo d'esercizio*
- *Esercizio anticipato*
- *Tasso d'interesse*
- *Tasse e costi di transazione*
- *Processo stocastico seguito dal prezzo del sottostante*
- *Volatilità*

Esaminiamo ora in dettaglio i singoli punti.

- **Assenza di dividendi.** Un'estensione del modello riguarda il venir meno dell'ipotesi di assenza di dividendi o altre forme di pagamenti fatte ai possessori dei titoli sottostanti.  
**R. Merton** (1973) generalizza il modello di Black e Scholes per includere il pagamento di dividendi costanti o proporzionali; **R. Geske** (1978) considera il caso di dividendi stocastici.
- **Prezzo d'esercizio.** Nel 1973 **R. Merton** considera il caso di un prezzo di esercizio funzione decrescente della vita residua:  $X = X(T - t)$ .  
**S. Fisher** (1978) e **W. Margrabe** (1978) hanno rimosso l'ipotesi di prezzo di esercizio noto e costante nel tempo ed hanno esaminato il caso di prezzo di esercizio incerto.
- **Esercizio anticipato.** Il modello di Black e Scholes vale per opzioni europee e per call americane scritte su azioni che non paghino dividendi, dato che in questo caso l'esercizio prematuro non è ottimale. La maggioranza delle opzioni quotate, tuttavia, è del tipo americano; esse sono soggette a esercizio prima della scadenza.  
**R. Roll** (1977) ha studiato il problema della valutazione del prezzo di una call che può essere esercitata prima della scadenza quando l'azione sottostante stacca dividendi certi prima della scadenza dell'opzione.  
 Il problema della valutazione del prezzo di una put americana è stato oggetto di numerosi lavori, tra cui quelli di **M. Brennan** ed **E. Schwartz** (1977), **R. Geske** e **H. Johnson** (1984), **I.J. Kim** (1990).  
**P. Carr** (1998) utilizza una tecnica di randomizzazione per valutare put americane su azioni che pagano dividendi.

- **Tasso d'interesse.** L'assunzione di tasso d'interesse costante non è necessaria, ma è possibile trovare una soluzione del problema di Black e Scholes anche nel caso in cui il tasso d'interesse  $r(t)$  sia una funzione nota del tempo.  
Nella realtà il tasso d'interesse non è noto in anticipo ma è stocastico, e i tassi d'interesse attivi e passivi sono diversi. **R. Merton** (1973) ha rimosso l'ipotesi di tasso d'interesse noto e costante nel tempo e ha esteso il modello nel caso di un tasso d'interesse stocastico.
- **Tasse e costi di transazione.** Molti autori si soffermano sulle ipotesi che riguardano le caratteristiche dei mercati: per esempio **M. Scholes** (1976) determina gli effetti della tassazione sul prezzo delle opzioni, **H.E. Leland** (1985) rimuove l'ipotesi di assenza di costi di transazione e, assumendo invece che la strategia di delta-hedging sia costosa, esamina l'impatto dei costi di transazione sulla performance del portafoglio coperto.
- **Processo stocastico seguito dal prezzo del sottostante.** Un'ipotesi fondamentale e criticabile è quella relativa al processo stocastico seguito dal prezzo del titolo sottostante.  
**R. Merton** (1976) ha criticato l'ipotesi secondo la quale gli scambi avvengono con continuità e ha proposto un modello misto, in cui intervengono un processo geometrico ed un processo di Poisson, per cui il prezzo azionario segue un processo che è discontinuo nel tempo.  
**J. Cox, S.A. Ross e M. Rubinstein** (1979) si sono basati sul modello binomiale, considerando un caso di processo stocastico che avviene in tempo discreto.  
Lavori più recenti, come quello di **E. Eberlein e U. Keller** (1995), hanno analizzato l'ipotesi di una distribuzione dei rendimenti azionari con code più spesse di quella normale. Sulla base di analisi statistiche di dati finanziari si utilizza la distribuzione iperbolica in luogo di quella gaussiana.
- **Volatilità.** La formula di Black e Scholes è ottenuta supponendo che la varianza dei prezzi azionari sia costante. Molti lavori empirici hanno invece dimostrato che la volatilità cambia e c'è una dipendenza temporale.  
**H. Johnson e D. Shanno** (1987) e **J. Hull e A. White** (1987) hanno studiato il caso in cui la varianza si modifica.  
Infine **N. Hofmann, E. Platen e M. Schweizer** (1992) hanno studiato il caso di volatilità stocastica e dipendente dal passato.

### 8.3 Applicazioni della formula di Black e Scholes: valutazione dei titoli emessi da un'impresa.

In questo paragrafo e nel successivo vedremo alcune applicazioni della formula di Black e Scholes di valutazione del prezzo delle opzioni. Esamineremo dapprima la valutazione dei titoli di un'impresa, che possono essere visti come opzioni sul valore dell'impresa stessa, quindi considereremo l'utilizzazione della formula di Black e Scholes per strategie di copertura ed infine vedremo un'applicazione delle formula di Black e Scholes ad opzioni reali e non finanziarie.

Consideriamo un'impresa che si finanzia emettendo obbligazioni zero-coupon ed azioni, ossia titoli di debito e titoli di capitale. Alla scadenza  $T$  l'impresa è soggetta ad una promessa di pagamento pari a  $D$  (valore nominale del debito) agli obbligazionisti.

Al tempo  $T$  l'impresa liquida i beni e distribuisce i ricavi. Sia  $V$  il valore di liquidazione dell'impresa. In primo luogo al tempo  $T$  devono essere pagati i detentori delle obbligazioni e in un secondo tempo gli azionisti se vi è la possibilità di pagarli, ossia:

- se  $V > D$  gli obbligazionisti ricevono  $D$  e gli azionisti  $V - D$
- se  $V \leq D$  gli obbligazionisti ricevono  $V$  e gli azionisti 0.

Perciò al tempo  $T$  gli azionisti ricevono  $\max\{V - D, 0\}$  e dunque la valutazione delle azioni emesse dall'impresa è analoga a quella di un'opzione call europea avente come sottostante il valore  $V$  dell'impresa, prezzo di esercizio uguale a  $D$  e scadenza uguale alla scadenza  $T$  del debito.

Se assumiamo che il valore  $V$  dell'impresa segua un processo geometrico, cioè che si abbia

$$dV = \mu V dt + \sigma V dW$$

con  $\mu$  e  $\sigma$  costanti e  $W$  processo di Wiener, la formula di valutazione delle azioni è ottenibile dalla formula di Black e Scholes sostituendo  $V$  al posto di  $S$ ,  $D$  al posto di  $X$ , interpretando  $T - t$  come la vita residua del debito e  $\sigma^2$  come il tasso di varianza del rendimento dell'impresa.

Si ottiene:

$$c = V N(d'_1) - D e^{-r(T-t)} N(d'_2)$$

dove

$$d'_1 = \frac{\log \frac{V}{D} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad d'_2 = \frac{\log \frac{V}{D} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d'_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Dividendo il valore di  $c$  per il numero delle azioni emesse dall'impresa è possibile valutare il prezzo equo di un'azione.

Consideriamo ora quanto ricevono alla data  $T$  gli obbligazionisti.

Gli obbligazionisti ricevono  $\min\{V, D\} = D - \max\{D - V, 0\}$ .

Il termine  $\max\{D - V, 0\}$  viene a rappresentare il pagamento di un'opzione put europea avente come sottostante il valore  $V$  dell'impresa, prezzo di esercizio uguale a  $D$  e scadenza uguale alla scadenza  $T$  del debito. Il valore di tale put al tempo  $t$  è dato allora da

$$p = -V N(-d'_1) + D e^{-r(T-t)} N(-d'_2)$$

dove  $d'_1, d'_2$  sono i parametri definiti in precedenza che compaiono in  $c$ .

Allora al tempo  $T$  il valore delle obbligazioni emesse dall'impresa è dato da

$$y_T = D - p_T$$

e dunque al tempo  $0 \leq t < T$  il valore delle obbligazioni è

$$\begin{aligned} y &= D e^{-r(T-t)} - p \\ &= D e^{-r(T-t)} + V N(-d'_1) - D e^{-r(T-t)} N(-d'_2) \\ &= V N(-d'_1) + D e^{-r(T-t)} (1 - N(-d'_2)) \\ &= V N(-d'_1) + D e^{-r(T-t)} N(d'_2). \end{aligned}$$

Perciò in ogni istante possiamo valutare il valore complessivo delle obbligazioni emesse da un'impresa e dividendo per il numero delle obbligazioni possiamo dedurre il valore equo di ogni obbligazione.

### **Esempio 8.1**

Si considerino i seguenti dati relativi ad un'impresa:

$D = 80$ ,  $V = 70$ ,  $r = 1\%$  annuo, data di liquidazione  $T = 10$  anni,  $\sigma = 40\%$  annuo.

Se non ragioniamo in termini di formula di Black e Scholes ed andiamo a valutare la situazione dell'impresa al tempo  $t = 0$  facendo la differenza tra il valore dell'impresa e il valore scontato del debito si ottiene:

$$V - D e^{-rT} = 70 - 80 e^{-0,1} = -2,317.$$

L'impresa appare indebitata e un investitore su tale base non comprerebbe azioni dell'impresa stessa.

Se invece calcoliamo il valore dell'impresa distribuito in azioni utilizzando la formula di Black e Scholes, otteniamo:

$$c = V N(d'_1) - D e^{-rT} N(d'_2) = 32,485.$$

Dunque l'impresa, pur indebitata, può suscitare interesse negli investitori poiché ha ampi margini di miglioramento.

## 8.4 Applicazioni della formula di Black e Scholes: strategie di copertura di delta-hedging.

Vediamo di illustrare l'utilizzazione della formula di Black e Scholes di valutazione del prezzo delle opzioni per strategie di copertura delta-hedging. Si tratta di tecniche di copertura usate prevalentemente per la gestione del rischio nel caso di vendita di opzioni da parte di un'impresa o in generale da parte di un operatore finanziario. Per proteggere la posizione assunta in opzioni call o put dalla variabilità dell'andamento del prezzo del sottostante si assume una posizione di segno opposto (opzioni call) o dello stesso segno (opzioni put) sul titolo stesso.

### Esempio 8.2

Per meglio comprendere come si attuano tali tecniche di copertura, consideriamo le tabelle 8.1 e 8.2 che descrivono due simulazioni della strategia di delta-hedging messa in atto da una società a seguito dell'emissione sul mercato (posizione corta) di 10 contratti di opzioni call su azioni che chiameremo Zeus. Il numero di azioni sottostanti ad ogni contratto è 10.000. Il contratto di opzione ha scadenza dopo 20 settimane, il prezzo di esercizio  $X$  è di 3,5 euro, il tasso annuo di interesse  $r$  è pari al 5% e la volatilità del prezzo dell'azione è pari al 20% annuo.

Allo scadere della ventesima settimana, se ogni call avente come sottostante un'azione di valore  $S$  viene esercitata, la società emittente riceve  $X$  dando in cambio un'azione di valore  $S$  e quindi per ogni call ha una perdita pari a  $S - X$ , mentre l'acquirente riceve simmetricamente un pagamento pari a  $S - X$ .

Nel caso in cui il prezzo dell'azione è diventato molto più alto di  $X$ , la società subisce una notevole perdita. Allora per tutelarsi opera una strategia di delta-hedging, comprando  $\Delta$  azioni per ogni call. Tale strategia dovrebbe comportare dei continui aggiustamenti poiché  $\Delta$  varia al trascorrere del tempo. Supponiamo che venga ribilanciato il portafoglio soltanto alla fine di ogni settimana.

All'inizio della I settimana il prezzo di ogni azione è pari a 3,301 euro. Possiamo calcolare il prezzo iniziale  $c(0, S)$  di ogni opzione mediante la formula di Black e Scholes sostituendo i dati (ovviamente con  $t = 0$ ). Il risultato è 0,1086 euro. Tenendo presente che ogni contratto ha come sottostante 10.000 azioni e che il numero dei contratti è 10, la società riceve inizialmente un premio totale per l'emissione delle call pari a

$$100.000 \cdot c(0, S) = 100.000 \cdot 0,1086 = 10.860 \text{ euro.}$$

Prendiamo dapprima in esame la tabella 8.1.

Come già osservato, inizialmente il prezzo di ogni azione è 3,301 euro. Se calco-

liamo  $\Delta = N(d_1)$  con  $S = 3,301$  e  $t = 0$ , troviamo

$$\Delta = 0,399.$$

Allora per attuare la strategia di delta-hedging la società deve comprare  $\Delta \cdot 10.000 \cdot 10 = 39.900$  azioni e dunque deve far fronte al costo di  $3,301 \cdot 39.900 = 131.709,9$  euro indebitandosi.

Alla fine della prima settimana si calcola nuovamente  $\Delta = N(d_1)$  tenendo presente che il prezzo delle azioni è passato a  $S = 3,281$ . Precisamente si ottiene:

$$\Delta = 0,373,$$

che è un valore inferiore a quello precedente. Per avere un portafoglio protetto la società deve avere 37.300 azioni e poiché ne possiede 39.900 ne deve vendere 2.600. In tal modo il debito contratto in precedenza si riduce.

Si procede poi in modo analogo sino alla fine della ventesima settimana. Quando il  $\Delta$  cresce la società deve comprare delle nuove azioni, mentre quando cala ne deve vendere.

Alla data di scadenza delle call il prezzo  $S$  delle azioni è salito a 3,938 euro ed è superiore al prezzo di esercizio  $X = 3,5$  euro. Dunque alla scadenza le call sono *in the money* e vengono esercitate.

Come si vede dalla tabella, alla fine della ventesima settimana il costo cumulato dalla società è di 361.788,7 euro, ma d'altra parte la società riceve, in seguito all'esercizio delle call,

$$X \cdot 100.000 = 350.000 \text{ euro.}$$

Il costo effettivo dell'operazione è dato da

$$361.788,7 - 350.000 = 11.788,7 \text{ euro.}$$

Se vogliamo attualizzare tale costo, otteniamo:

$$11.788,7 \cdot e^{-0,05 \frac{20}{52}} \simeq 11.504,16 \text{ euro.}$$

Tale cifra è leggermente superiore al premio ottenuto dalla vendita delle call pari a 10.860 euro. Dunque la società non ha perso quasi nulla dall'operazione.

Se lo schema di copertura fosse perfetto, il costo di copertura attualizzato dovrebbe essere esattamente uguale al premio ossia al prezzo iniziale delle call. Il motivo per cui questo non avviene è che il ribilanciamento viene effettuato solo una volta alla settimana e non in tempo continuo. All'aumentare della frequenza del ribilanciamento il costo della copertura si ridurrebbe.

Vediamo che cosa sarebbe successo se la società avesse mantenuto una posizione

scoperta, ossia se non avesse attuato alcuna strategia di copertura a seguito delle vendite delle opzioni.

Alla scadenza dei contratti la società avrebbe dovuto sostenere un costo pari a 100.000 volte la differenza tra il prezzo di un'azione e il prezzo di esercizio, cioè:

$$100.000 \cdot (3,938 - 3,5) = 100.000 \cdot 0,438 = 43.800 \text{ euro},$$

costo che, anche se venisse attualizzato, sarebbe comunque molto più alto del costo sostenuto con la strategia di delta-hedging.

Si osservi che dalla tabella 8.1 emerge il fatto che per  $t \rightarrow T^-$  il  $\Delta$  tende a 1. Questo è un risultato generale che vale per ogni call europea che alla scadenza sia *in the money*, come nella tabella 8.1.

**Proposizione 8.1.** *Se una call europea alla scadenza  $T$  è in the money, allora*

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \Delta = 1,$$

*mentre se è out of the money*

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \Delta = 0.$$

Dimostrazione

Se la call al tempo  $T$  è in the money si ha  $S > X$ , se è out of the money si ha  $S < X$ .

Consideriamo  $d_1$  dato da

$$d_1 = \frac{\log \frac{S}{X} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} = \frac{\log \frac{S}{X}}{\sigma \sqrt{T-t}} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\sqrt{T-t}}{\sigma}.$$

Se ne effettuiamo il limite per  $t \rightarrow T^-$ , tenendo presente che il secondo termine tende a zero e che il limite di  $\ln \frac{S}{X}$  è positivo o negativo a seconda che la call sia in the money o out of the money, otteniamo:

$$\text{call in the money} \implies \lim_{t \rightarrow T^-} d_1 = +\infty$$

$$\text{call out of the money} \implies \lim_{t \rightarrow T^-} d_1 = -\infty.$$

Allora

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \Delta = \lim_{t \rightarrow T^-} N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 \quad \text{se la call è in the money}$$

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \Delta = \lim_{t \rightarrow T^-} N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0 \quad \text{se la call è out of the money.}$$

La proposizione è così dimostrata.

Passiamo ora a considerare la tabella 8.2.

Questa si differenzia dalla 8.1 essenzialmente perché prevede che alla fine della ventesima settimana il prezzo  $S$  delle azioni Zeus sia pari a 2,749 euro e dunque inferiore al prezzo di esercizio  $X$ . Le call alla scadenza sono perciò *out of the money*.

Se viene adottata una strategia di delta-hedging, si vede che avvicinandoci alla scadenza il  $\Delta$  tende a zero.

Il costo cumulato alla fine della ventesima settimana è pari a 10.320,78 euro e attualizzato ammonta a 10.124,2 euro.

D'altra parte, il premio ricevuto dalla vendita delle call era 10.860 euro per cui la società consegue un piccolo guadagno, poiché ovviamente le call non vengono esercitate.

In realtà nell'eventualità prevista dalla tabella 8.2 non converrebbe attuare una strategia di copertura, ma ovviamente non si può sapere in anticipo quale sarà il prezzo dell'azione sottostante alla scadenza della call e nell'eventualità opposta di notevole aumento del prezzo delle azioni si rischia di avere perdite molto pesanti.

Come si è visto nell'esempio esaminato, il ribilanciamento prodotto dal delta-hedging comporta che si compra il sottostante quando c'è un rialzo delle quotazioni e lo si vende in momenti di ribasso. E' evidente che questo tende ad enfatizzare le tendenze al rialzo o al ribasso. Se le strategie di copertura vengono operate su vasta scala possono avere effetti destabilizzanti sul mercato. Proprio a tali fatti sono stati imputati alcuni dei grossi crolli finanziari moderni.

Tabella 8.1: **Opzione in the money**

Settimane	Prezzo Azioni	$\Delta$ della call	Azioni comprate	Costo Azioni	Costo cumulato	Costo interessi
0	3,301	0,399	39.900	131.709,9	131.709,9	126,64
1	3,281	0,373	-2.600	-8.530,6	123.305,9	118,56
2	3,300	0,384	1.100	3.630,0	127.054,5	122,17
3	3,318	0,395	1.100	3.649,8	130.826,4	125,79
4	3,376	0,448	5.300	17.382,8	148.845,0	143,12
5	3,582	0,657	20.900	74.863,8	223.851,9	215,24
6	3,522	0,596	-6.100	-21.484,2	202.583,0	194,79
7	3,502	0,572	-2.400	-8.404,8	194.373,0	186,90
8	3,364	0,403	-16.900	-56.851,6	137.708,3	132,41
9	3,497	0,560	15.700	54.902,9	192.743,6	185,33
10	3,438	0,480	-8000	-27.504,0	165.424,9	159,06
11	3,380	0,392	-8.800	-29.744,0	135.840,0	130,62
12	3,513	0,573	18.100	63.585,3	199.555,9	191,88
13	3,612	0,711	13.800	49.845,6	249.593,4	239,99
14	3,551	0,630	-8.100	-28.763,1	221.070,3	212,57
15	3,491	0,537	-10.300	-35.957,3	185.325,5	178,20
16	3,629	0,773	24.600	89.273,4	274.777,1	264,21
17	3,649	0,829	5.600	20.434,4	295.475,7	284,11
18	3,635	0,849	2.000	7.270,0	303.029,8	291,37
19	3,849	1	15.100	58.119,9	361.441,1	347,54
20	3,938	1	0	0	361.788,7	347,87

## 8.5 Applicazioni della formula di Black e Scholes: opzioni reali.

Spesso le imprese si trovano a dover prendere delle decisioni su investimenti reali, come l'acquisto di un terreno o l'acquisizione di risorse di carattere fisico e non finanziario.

Tali decisioni sono caratterizzate da

- 1) **Irreversibilità;**
- 2) **Incertezza;**
- 3) **Timing.**

Gli investimenti sono spesso irreversibili, cioè richiedono il sostenimento di costi che non possono essere completamente recuperati.

Tabella 8.2: **Opzione out of the money**

Settimane	Prezzo Azioni	$\Delta$ della call	Azioni comprate	Costo Azioni	Costo cumulato	Costo interessi
0	3,301	0,399	39.900	131.709,9	131.709,9	126,64
1	3,440	0,527	12.800	44.032,0	175.868,50	169,10
2	3,437	0,521	-600	-2.062,2	173.975,40	167,28
3	3,468	0,548	2.700	9.363,6	183.506,30	176,45
4	3,435	0,510	-3.800	-13.053,0	170.629,70	164,07
5	3,382	0,448	-6.200	-20.968,4	149.825,40	144,06
6	3,470	0,539	9.100	31.577,0	181.546,50	174,56
7	3,524	0,596	5.700	20.086,8	201.807,80	194,05
8	3,396	0,442	-15.400	-52.298,4	149.703,50	143,95
9	3,343	0,368	-7.400	-24.738,2	125.109,20	120,30
10	3,200	0,193	-17.500	-56.000,0	69.229,56	66,57
11	3,214	0,190	-300	-964,2	68.331,93	65,70
12	3,150	0,114	-7.600	-23.940,0	44.457,63	42,75
13	3,002	0,025	-8.600	-26.717,8	17.782,58	17,10
14	2,993	0,014	-1.100	-3.292,3	14.507,38	13,95
15	3,019	0,011	-300	-905,7	13.615,63	13,09
16	3,076	0,013	200	615,2	14.243,92	13,70
17	3,060	0,003	-1.000	-3.060,0	11.197,62	10,77
18	3,081	0,001	-200	-616,2	10.592,19	10,18
19	2,915	0	-100	-291,5	10.310,87	9,91
20	2,749	0	0	0	10.320,78	9,92

Prima di affrontare tali costi l'impresa effettua delle valutazioni sulla profitabilità dell'investimento e queste avvengono in condizioni di incertezza per cui l'incertezza sul futuro introduce allora l'idea di esaminare distribuzioni di probabilità sui risultati derivanti dall'investimento.

Infine le imprese non hanno solo la possibilità di scegliere se investire in un determinato progetto, ma anche il timing, ossia quando investire. Quando un'impresa effettua un investimento irreversibile, rinuncia alla possibilità di attendere nuove informazioni che possono influenzare la desiderabilità o il timing dell'investimento e, nel caso di andamento sfavorevole del mercato, non può disinvestire. In condizioni di incertezza può essere allora più conveniente non investire immediatamente, ma attendere per acquisire maggiori informazioni e differire la decisione di investimento.

L'approccio delle **opzioni reali**, recentemente sviluppato nella letteratura economica, consente di valutare l'interazione tra 1), 2), 3) e di determinare la scelta

ottimale di investimento.

Le opzioni reali rappresentano un'applicazione della teoria dei derivati al di fuori della finanza.

Alla base di questo approccio vi è l'analogia tra opportunità di investimenti reali e opzioni finanziarie, analogia che permette di utilizzare le tecniche di valutazione delle opzioni finanziarie per valutare la convenienza dei progetti di investimento. L'analogia tra opzioni finanziarie e opzioni reali è stata sviluppata da diversi autori, tra i quali ricordiamo **S. Mason** e **R.C. Merton** (1985), **S. Mason** e **L. Trigeorgis** (1987), **R. Pindyck** (1991), **A.K. Dixit** e **R. Pindyck** (1994), **L. Trigeorgis** (1996) ed altri.

Facciamo alcuni esempi di analogia tra opzioni reali e opzioni call e put.

### Esempio 8.3

Supponiamo che un'impresa abbia l'opportunità di intraprendere un certo progetto di investimento al tempo  $T$ .

Indichiamo con  $V$  il valore attuale lordo dei flussi di cassa attesi dal progetto e con  $X$  il suo costo. Se  $c$  è il valore di cassa del progetto, al tempo  $T$  avremo:  
o che il progetto viene intrapreso e quindi

$$c_T = V_T - X$$

o che il progetto non viene intrapreso e dunque

$$c_T = 0.$$

Al tempo  $T$  si avrà perciò:

$$c_T = \max\{V_T - X, 0\}.$$

Vediamo allora che per stimare il valore dell'opportunità dell'investimento possiamo ricorrere ad un'opzione call europea con data di scadenza  $T$ , prezzo di esercizio  $X$  e sottostante di valore  $V$ . Quindi è possibile utilizzare la formula di Black e Scholes.

### Esempio 8.4

Riferendoci all'esempio precedente, se l'impresa può rinviare per un certo periodo di tempo la decisione di investire, tale opzione, detta **opzione di differimento**, può essere vista come una call americana.

### Esempio 8.5

Un ulteriore esempio è costituito dall'**opzione di abbandono**.

Se le condizioni di mercato risultano particolarmente sfavorevoli, l'impresa che ha intrapreso un progetto può abbandonarlo in modo permanente al tempo  $T$  e ottenere il valore di realizzo del capitale fisico sul mercato dell'usato.

Se  $V$  è il valore del progetto e  $X$  il valore di realizzo, l'impresa può ottenere:

$$\max\{V, X\} = V + \max\{X - V, 0\}.$$

L'ultimo termine a secondo membro è analogo al pagamento di una put europea con data di scadenza  $T$ , prezzo di esercizio  $X$  e sottostante di valore  $V$  e dunque è possibile applicare la formula per la valutazione del prezzo di una put europea conseguenza della formula di Black e Scholes.



# Capitolo 9

## Appendici

### 9.1 Appendice 1

In questo paragrafo presentiamo alcuni testi di esercizi relativi al Capitolo 1 che sono stati assegnati per l'esame a studenti degli anni precedenti.

#### ESERCIZIO 1

##### I Parte

Ho a disposizione 20.000 euro per un investimento finanziario. Mi vengono presentate tre possibilità:

- 1) sono previsti due ricavi, uno di 12.000 euro dopo 3 anni e uno di 25.000 euro dopo 12 anni;
- 2) sono previsti ricavi annui posticipati di 2.600 euro per 12 anni;
- 3) sono previsti ricavi annui posticipati di 3.000 euro per 10 anni.

Quale delle tre forme di investimento è più conveniente in base al metodo del VAN (Valore Attuale Netto) in un regime di capitalizzazione composta al tasso annuo di interesse del 7%?

##### II Parte

Sono dati i tre titoli seguenti:

- 1) un'azione avente prezzo  $S_0 = 150$  euro e avente dopo 1 anno prezzo  $S_1$  pari a 200 euro nello stato 1 e 120 euro nello stato 2 con assenza di dividendi;
- 2) un'opzione call europea che ha come sottostante l'azione, premio  $c_0 = 50$  euro, data di esercizio  $T = 1$  anno e prezzo di esercizio  $X = 160$  euro;
- 3) un'opzione put europea che ha come sottostante l'azione, premio  $p_0 = 60$  euro,

data di esercizio  $T = 1$  anno e prezzo di esercizio  $X = 160$  euro.

Vedere se è possibile comporre un portafoglio di arbitraggio con i tre titoli e nel caso di risposta positiva fornire un esempio.

## ESERCIZIO 2

### I Parte

Un imprenditore ha acquistato un capannone al prezzo di 170.000 euro e versa direttamente al venditore 70.000 euro grazie al ritiro dal suo conto corrente del montante di un capitale  $C$  impiegato per 4 anni in un regime di capitalizzazione composta al tasso annuo di interesse del 5%. Calcolare  $C$ .

Per la somma restante stipula un mutuo della durata di 8 anni che richiede il versamento di una rata trimestrale costante  $R$  al Tan ( $\tilde{r}_4$ ) del 4%. Stabilire l'importo della rata  $R$ .

Inoltre ad ogni trimestre alla rata viene aggiunta la somma di 100 euro per le spese di commissione bancaria, bolli statali e polizza anti-incendio. Calcolare la somma  $A$  versata dall'imprenditore per le spese di apertura della pratica sapendo che il Taeg è pari al 5,5%.

### II Parte

Un portafoglio è così composto:

- 1) una posizione lunga relativamente ad un'azione avente prezzo  $S_0 = 100$  euro e dopo 1 anno prezzo  $S_1$  pari a 70 euro nello stato 1 e 160 euro nello stato 2 con il pagamento di un dividendo di 4 euro nello stato 2, mentre c'è assenza di dividendi nello stato 1;
- 2) una posizione corta relativamente ad un'opzione call europea avente come sottostante l'azione, premio  $c_0 = 50$  euro, data di esercizio  $T = 1$  anno e prezzo di esercizio  $X = 100$  euro;
- 3) una posizione corta relativamente a due opzioni put aventi come sottostante l'azione, premio  $p_0 = 25$  euro, data di esercizio  $T = 1$  anno e prezzo di esercizio  $X = 100$  euro.

Stabilire se è un portafoglio di arbitraggio.

## ESERCIZIO 3

**I Parte**

Un investitore ha impiegato 3.000 euro in un regime di capitalizzazione composta al tasso di interesse annuo del  $r = 3\%$  per 4 anni. Alla scadenza ha subito reinvestito il montante ottenuto al tasso annuo  $r^* = 5\%$  per un periodo di  $n$  anni sempre in un regime di capitalizzazione composta. Alla fine di tali  $n$  anni ha ritirato un montante complessivo di 4.309,4 euro. Determinare la durata del secondo impiego.

Se l'investitore avesse voluto disporre dopo  $(4+n)$  anni di una somma pari a 4.309,4 euro mediante il versamento alla fine di ogni anno di una somma pari a  $C$  (ossia mediante la costituzione di una rendita temporanea della durata di  $(4+n)$  anni, periodica con periodo pari ad un anno, immediata, posticipata, costante di capitale  $C$ ) in un regime di capitalizzazione composta con tasso di interesse annuo  $r' = 4\%$ , a quanto sarebbe dovuta ammontare la rata  $C$ ?

**II Parte**

Sono dati i seguenti titoli:

- 1) un'azione priva di dividendi avente prezzo  $S_0^{(1)} = 120$  euro e dopo 1 anno prezzo  $S_1^{(1)}$  pari a 140 euro nello stato 1 e pari a 80 euro nello stato 2;
- 2) un'azione priva di dividendi avente prezzo  $S_0^{(2)} = 80$  euro e dopo 1 anno prezzo  $S_1^{(2)}$  pari a 40 euro nello stato 1 e pari a 60 euro nello stato 2;
- 3) una opzione put europea avente come sottostante la prima azione, premio  $p_0$ , data di esercizio  $T = 1$  anno e prezzo di esercizio  $X = 110$  euro.

Stabilire se è possibile fissare  $p_0$  in modo tale che con i tre titoli non si possa comporre un portafoglio di arbitraggio.

**ESERCIZIO 4****I Parte**

Giulio acquista dei macchinari nuovi per la sua azienda al prezzo di 40.000 euro. Grazie all'impiego per  $n$  anni di 18.417,4 euro in regime di capitalizzazione composta con tasso di interesse annuo del  $5\%$ , può corrispondere al fornitore 30.000 euro al momento dell'acquisto e si impegna a versare i rimanenti 10.000 dopo un anno. Per avere la disponibilità di tale somma si accorda con la banca per il versamento di una rata mensile costante  $R$  per un anno al tasso annuo nominale  $\tilde{r}_{12} = 3,6\%$ .

Determinare il numero  $n$  degli anni di impiego del capitale di 18.417,4 euro, l'ammontare della rata mensile  $R$  versata da Giulio alla banca e il tasso annuo effettivo equivalente a  $\tilde{r}_{12}$ .

## II Parte

Sono dati i tre seguenti titoli:

- 1) azione avente prezzo  $S_0^{(1)} = 138$  euro e dopo 1 anno prezzo  $S_1^{(1)}$  pari a 180 euro nello stato 1 e 240 euro nello stato 2 con assenza di dividendi in entrambi gli stati;
  - 2) azione avente prezzo  $S_0^{(2)} = 100$  euro e dopo 1 anno prezzo  $S_1^{(2)}$  pari a 150 euro nello stato 1 e 80 euro nello stato 2 con assenza di dividendi in entrambi gli stati;
  - 3) opzione call europea avente come sottostante l'azione al punto 2), premio  $c_0 = 30$  euro, data di esercizio  $T = 1$  anno e prezzo di esercizio  $X = 100$  euro.
- Stabilire se con i tre titoli si può comporre un portafoglio di arbitraggio.

## ESERCIZIO 5

### I Parte

Ho acquistato un salotto al costo di 3.000 euro che ho rimborsato versando due rate semestrali di uguale importo  $R$  al Tan del 4% cui è stata aggiunta alla fine di ogni semestre la somma di 25 euro dovuta alla commissione bancaria ed ai bolli statali. Non ci sono state spese per l'apertura della pratica di finanziamento. Calcolare la rata  $R$ , il tasso annuo equivalente al Tan ( $r_e$ ) e il Taeg ( $r_{eg}$ ).

### II Parte

E' dato il portafoglio così composto:

- 1) posizione lunga relativamente a un'azione avente prezzo  $S_0 = 100$  euro e dopo 1 anno prezzo  $S_1$  pari a 160 euro nello stato 1 e 70 euro nello stato 2; inoltre l'azione paga 2 euro nello stato 1 come dividendo e non paga dividendi nello stato 2;
- 2) posizione corta relativamente ad una opzione call europea avente come sottostante l'azione, premio  $c_0 = 60$  euro, data di esercizio  $T = 1$  anno e prezzo di esercizio  $X_1 = 120$  euro;
- 3) posizione corta relativamente ad una opzione put europea avente premio  $p_0 = 40$  euro, data di esercizio  $T = 1$  anno, prezzo di esercizio  $X_2 = 150$  euro e sottostante l'azione avente prezzo alla scadenza della put pari a 90 nello stato 1

e 140 nello stato 2.

Stabilire se il portafoglio è di arbitraggio.

## ESERCIZIO 6

### I Parte

Sto per prendere a noleggio per un anno un'automobile e mi hanno prospettato tre modalità per il pagamento del noleggio:

- 1) il versamento di 1.200 euro alla fine dell'anno;
- 2) versamenti bimestrali posticipati di 198 euro;
- 3) versamenti mensili posticipati di 97 euro.

Qual è la modalità più conveniente per me adottando il metodo del valore attuale con tasso di interesse annuo del 3% in un regime di capitalizzazione composta?

### II Parte

Sono dati i tre titoli seguenti:

- 1) un'obbligazione priva di rischio avente prezzo  $B_0 = 100$  euro con tasso di interesse annuo del 4%;
- 2) un'opzione put europea di premio  $p_0^{(1)}$ , data di esercizio  $T = 1$  anno e prezzo di esercizio  $X_1 = 120$  euro con sottostante un'azione che alla data di esercizio della put ha prezzo pari a 150 euro nello stato 1 e 90 euro nello stato 2;
- 3) un'opzione put europea di premio  $p_0^{(2)} = 40$  euro avente la stessa data di esercizio e lo stesso prezzo di esercizio della put precedente, ma con sottostante un'azione che alla data di esercizio ha prezzo 100 euro nello stato 1 e 140 euro nello stato 2.

Stabilire se è possibile fissare  $p_0^{(1)}$  in modo che ci sia assenza di possibilità di arbitraggio con i tre titoli.

## 9.2 Appendice 2

In questo paragrafo sono svolte le dimostrazioni di alcune proposizioni non dimostrate nel Capitolo 3 e nel Capitolo 4.

### Proposizione 3.1 (pag. 83)

Proviamo prima *i*).

Per definizione di algebra,  $\Omega \in \mathcal{A}$  da cui

$$\emptyset = \mathcal{C}(\Omega) \in \mathcal{A}.$$

Proviamo ora *ii*).

$$A, B \in \mathcal{A} \implies \mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}(B) \in \mathcal{A}.$$

Ma

$$A \cap B = \mathcal{C}(\mathcal{C}(A \cap B)) \in \mathcal{A}.$$

Infine dimostriamo *iii*)

Per ipotesi  $A, B \in \mathcal{A}$ .

$$B \setminus A = B \cap \mathcal{C}(A) \in \mathcal{A}$$

grazie alla *ii*).

**Proposizione 3.2** (pag. 85)

Dimostriamo 1.

Siano  $A, B \in \mathcal{A}$  con  $A \cap B = \emptyset$  e poniamo  $A_1 = A, A_2 = B, A_i = \emptyset$  per  $i = 3, 4, \dots$

Per definizione di misura avremo

$$M(A \cup B) = M\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = M(A) + M(B) + \sum_{i=3}^{+\infty} M(\emptyset) = M(A) + M(B).$$

Proviamo 2.

Se  $A, B \in \mathcal{A}$  sono tali che  $A \subseteq B$ , allora potremo scrivere:

$$B = A \cup (B \setminus A) \implies M(B) = M(A) + M(B \setminus A) \implies M(A) \leq M(B),$$

poiché  $M(B \setminus A) \geq 0$ .

La dimostrazione di 3. si ottiene immediatamente dalle dimostrazione precedente.

Infine dimostriamo 4.

In primo luogo teniamo presente che

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A) \quad \text{e} \quad A \cap (B \setminus A) = \emptyset$$

per cui

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A). \quad (9.2.1)$$

D'altra parte abbiamo anche:

$$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A) \quad \text{e} \quad (A \cap B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$$

per cui

$$M(B) = M(A \cap B) + M(B \setminus A) \quad (9.2.2)$$

Se ora sottraiamo membro a membro dalla (9.2.1) la (9.2.2), otteniamo

$$M(A \cup B) - M(B) = M(A) - M(A \cap B)$$

da cui segue la tesi.

**Proposizione 3.5** (pagg. 88-89)

Dimostriamo dapprima che  $d) \implies a)$ .

Per definizione di variabile casuale

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e d'altra parte

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) > x\} = \Omega \setminus \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}.$$

Ma per definizione di  $\sigma$ -algebra, il complementare di un evento è un evento e dunque

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) > x\} \in \mathcal{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Proviamo ora che  $a) \implies b)$ .

Basta osservare che

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq x\} = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \{\omega \in \Omega : X(\omega) > x - \frac{1}{i}\}.$$

Per ipotesi gli insiemi  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) > x - \frac{1}{i}\}$  sono eventi per  $i = 1, 2, \dots$  e d'altra parte per definizione di  $\sigma$ -algebra anche la loro intersezione è un evento.

Dimostriamo che  $b) \implies c)$ .

Segue dalla relazione

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} = \Omega \setminus \{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq x\}$$

tenendo presente che il complementare di un evento è un evento.

Proviamo infine che  $c) \implies d)$ .

Basta ricordare la definizione di variabile casuale ed osservare che

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \{\omega \in \Omega : X(\omega) < x + \frac{1}{i}\}.$$

Le ulteriori implicazioni sono conseguenza di quelle dimostrate.

**Proposizione 3.23** (pag. 127)

*Proprietà 5)*

Sia  $X \in L^1(\Omega)$  e  $\mathcal{I}$  una sotto  $\sigma$ -algebra di  $\mathcal{A}$ . Se  $\sigma(X)$  è indipendente da  $\mathcal{I}$ , allora

$$E[X | \mathcal{I}] = E[X].$$

Dimostrazione

Poiché  $E[X]$  è una costante (finita), è una variabile casuale che appartiene a  $L^1(\Omega)$  ed è misurabile rispetto alla  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{I}$ . Per dimostrare la tesi ci resta da provare che:

$$\int_I X dP = \int_I E[X] dP, \quad \forall I \in \mathcal{I}.$$

Sia  $I \in \mathcal{I}$  ed osserviamo in primo luogo che  $X$  è indipendente dalla funzione caratteristica di  $I$ ,  $\chi_I$ , poichè per ipotesi  $\sigma(X)$  è indipendente da  $\mathcal{I}$  e d'altra parte  $\sigma(\chi_I) = \{\emptyset, \Omega, I, I^C\} \subseteq \mathcal{I}$ . Perciò

$$\int_I X dP = \int_{\Omega} \chi_I X dP = E[\chi_I X] = E[\chi_I] E[X]. \quad (9.2.3)$$

D'altra parte

$$E[\chi_I] = \int_{\Omega} \chi_I dP = P(I)$$

poiché  $\chi_I$  è una variabile discreta che assume solo il valore 0 in  $I^C$  e il valore 1 in  $I$ .

Tenendo conto dell'ultima relazione, la (9.2.3) si riduce a

$$\int_I X dP = P(I) E[X] = \int_I E[X] dP, \quad \forall I \in \mathcal{I}$$

da cui discende la tesi.

*Proprietà 8)*

*Proprietà a torre:*

se  $\mathcal{I}^*$  è una sotto  $\sigma$ -algebra di  $\mathcal{I}$ , allora:

$$E[E[X | \mathcal{I}] | \mathcal{I}^*] = E[X | \mathcal{I}^*].$$

Dimostrazione

Poniamo  $Y = E[X | \mathcal{I}^*]$  ed osserviamo che per definizione di aspettativa condizionata  $Y \in L^1(\Omega)$  ed è misurabile rispetto a  $\mathcal{I}^*$ . Inoltre, comunque prendiamo

$I^* \in \mathcal{I}^*$ , sempre per definizione di aspettativa condizionata, si ha:

$$\int_{I^*} Y dP = \int_{I^*} X dP = \int_{I^*} E[X | \mathcal{I}] dP$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo sfruttato la definizione di aspettativa condizionata per  $E[X | \mathcal{I}]$  ed il fatto che, essendo  $\mathcal{I}^*$  sotto  $\sigma$ -algebra di  $\mathcal{I}$ , si ha che  $I^* \in \mathcal{I}$ . Ma allora  $Y$  gode di tutte le proprietà di cui gode  $E[E[X | \mathcal{I}] | \mathcal{I}^*]$  e dunque per l'unicità stabilita nel teorema 3.6 sussiste la 8).

#### Proprietà 4) di un processo di Wiener (Capitolo 4, pag. 142)

Se  $W_t$  è un processo di Wiener, allora  $W_t^2 - t$  per  $t \geq 0$  è una martingala rispetto alla filtrazione  $\{\mathcal{I}_t\}_{t \geq 0}$ .

##### Dimostrazione

Le prime due proprietà che devono essere soddisfatte da  $W_t^2 - t$  per essere una martingala rispetto a  $\{\mathcal{I}_t\}_{t \geq 0}$  sono senz'altro verificate tenendo presente la dimostrazione della proprietà 3) di un processo di Wiener e il fatto che  $t$  è variabile casuale costante.

Dimostriamo la terza proprietà, ossia che

$$E[W_t^2 - t | \mathcal{I}_s] = W_s^2 - s \quad \text{per } 0 \leq s < t.$$

Come nella dimostrazione della proprietà 3), è sufficiente provare che

$$E[W_t^2 - t | W_s] = W_s^2 - s \quad \text{per } 0 \leq s < t, \quad (9.2.4)$$

o equivalentemente

$$E[W_t^2 - W_s^2 | W_s] = t - s \quad \text{per } 0 \leq s < t \quad (9.2.5)$$

per la linearità dell'aspettativa condizionata e la misurabilità di  $W_s^2$  rispetto a  $\sigma(W_s)$ . D'altra parte

$$W_t = (W_t - W_s) + W_s \implies W_t^2 - W_s^2 = (W_t - W_s)^2 + 2(W_t - W_s)W_s.$$

Dunque

$$E[W_t^2 - W_s^2 | W_s] = E[(W_t - W_s)^2 | W_s] + 2E[(W_t - W_s)W_s | W_s], \quad (9.2.6)$$

avendo ancora sfruttato la linearità dell'aspettativa condizionata.

Ma poiché, per definizione di processo di Wiener, gli incrementi  $W_t - W_s$  e  $W_s$  con  $s < t$  sono indipendenti, per la proposizione 3.23, proprietà 7), otteniamo:

$$E[(W_t - W_s)W_s | W_s] = E[W_s | W_s] E[W_t - W_s] = 0.$$

Perciò la (9.2.6) si riduce a

$$E[(W_t - W_s)^2 | W_s] = E[(W_t - W_s)^2] = t - s,$$

che è il risultato che ci proponevamo di ottenere. Nell'ultimo passaggio abbiamo tenuto presente che  $(W_t - W_s)^2$  e  $W_s$  sono indipendenti ed abbiamo applicato la proprietà 5) della proposizione 3.23.

### 9.3 Appendice 3

In tale appendice sono proposti alcuni esercizi relativi alla definizione di differenziale stocastico, è svolta la dimostrazione del lemma 6.1 e sono presentati alcuni esercizi sulle equazioni differenziali stocastiche.

#### ESERCIZI RELATIVI ALLA DEFINIZIONE DI DIFFERENZIALE STOCASTICO

Calcolare i seguenti differenziali stocastici e utilizzare la corrispondente relazione integrale per esplicitare l'integrale stocastico che compare in essa prendendo come istante iniziale  $t_0$ :

- $d(e^{t+W_t^2})$
- $d(W_t \cosh(W_t))$  con  $t_0 = 0$
- $d(\sin(t + W_t))$
- $d(t \cos(W_t^2))$
- $d(e^{\cos(tW_t)})$  con  $t_0 = 0$
- $d(e^{\sinh(W_t)})$ .

#### DIMOSTRAZIONE del Lemma 6.1 (pag. 199)

**Lemma 9.1.** *Se  $W_t$  è un processo di Wiener e  $\sigma$  è una costante, allora:*

$$E[e^{\sigma W_T} | \mathcal{I}_t] = e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma W_t} \quad \text{con } t < T.$$

Dimostrazione

Poniamo

$$Z_t = e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma W_t} = e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} e^{\sigma W_t}$$

e determiniamone il differenziale stocastico tenendo presente che è il prodotto di una funzione non stocastica per una stocastica.

$$\begin{aligned} dZ_t &= -\frac{\sigma^2}{2} e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} e^{\sigma W_t} dt + e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} d(e^{\sigma W_t}) \\ &= -\frac{\sigma^2}{2} e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} e^{\sigma W_t} dt + e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} \left[ \sigma e^{\sigma W_t} dW_t + \frac{\sigma^2}{2} e^{\sigma W_t} dt \right] \\ &= \sigma e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma W_t} dW_t = \sigma Z_t dW_t. \end{aligned}$$

L'espressione integrale corrispondente è:

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t \sigma e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-\tau) + \sigma W_\tau} dW_\tau \quad (9.3.1)$$

dove

$$Z_0 = e^{\frac{\sigma^2}{2}T}.$$

In particolare per  $t = T$ , otteniamo:

$$e^{\sigma W_T} = Z_T = e^{\frac{\sigma^2}{2}T} + \int_0^T \sigma e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-\tau) + \sigma W_\tau} dW_\tau.$$

Allora

$$\begin{aligned} E[e^{\sigma W_T} | \mathcal{I}_t] &= E[e^{\frac{\sigma^2}{2}T} | \mathcal{I}_t] + E\left[\int_0^T \sigma e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-\tau) + \sigma W_\tau} dW_\tau | \mathcal{I}_t\right] \\ &= e^{\frac{\sigma^2}{2}T} + \int_0^t \sigma e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-\tau) + \sigma W_\tau} dW_\tau. \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che l'integrale di Itô

$$\int_0^t \sigma e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-\tau) + \sigma W_\tau} dW_\tau$$

è una martingala.

Infine grazie alla (9.3.1) risulta:

$$E[e^{\sigma W_T} | \mathcal{I}_t] = Z_t = e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma W_t},$$

che è il risultato che dovevamo dimostrare.

**ESERCIZI RELATIVI ALLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI STOCASTICHE****ESERCIZIO 1**

Risolvere il problema differenziale stocastico scritto sotto, determinare l'andamento nel tempo per  $t \geq 0$  del valore atteso della soluzione ed esplicitare l'integrale stocastico che compare nella soluzione trovata.

$$dX_t = \frac{dt}{1+t} + \log(1+t) dW_t, \quad t \geq 0$$
$$X_0 = \xi.$$

**ESERCIZIO 2**

Risolvere il problema differenziale stocastico scritto sotto, determinare l'andamento nel tempo per  $t \geq 0$  del valore atteso della soluzione ed esplicitare l'integrale stocastico che compare nella soluzione trovata.

$$dX_t = \cos t (X_t + 1) dt + t dW_t, \quad t \geq 0,$$
$$X_0 = \xi.$$

**ESERCIZIO 3**

Risolvere il problema differenziale stocastico scritto sotto e determinare l'andamento nel tempo per  $t \geq 0$  del valore atteso della soluzione trovata.

$$dX_t = (\mu X_t + \lambda) dt + (X_t + \lambda) dW_t, \quad t \geq 0, \quad \lambda, \mu = \text{costanti},$$
$$X_0 = \xi.$$

**ESERCIZIO 4**

Risolvere il problema differenziale stocastico scritto sotto, determinare l'andamento nel tempo per  $t \geq 0$  del valore atteso della soluzione ed esplicitare l'integrale stocastico che compare nella soluzione trovata.

$$dX_t = t(X_t - 1) dt + t dW_t, \quad t \geq 0,$$
$$X_0 = \xi.$$

### ESERCIZIO 5

Risolvere il problema differenziale stocastico scritto sotto, determinare l'andamento nel tempo per  $t \geq 0$  del valore atteso della soluzione ed esplicitare l'integrale stocastico che compare nella soluzione trovata.

$$\begin{aligned} dX_t &= \cosh t(X_t + 1) dt + dW_t, & t \geq 0 \\ X_0 &= \xi. \end{aligned}$$

### ESERCIZIO 6

Risolvere il problema differenziale stocastico scritto sotto e determinare l'andamento nel tempo per  $t \geq 0$  del valore atteso della soluzione trovata.

$$\begin{aligned} dX_t &= 3X_t dt + (2X_t + t) dW_t, & t \geq 0 \\ X_0 &= \xi. \end{aligned}$$

## 9.4 Appendice 4: Brevi cenni sulle equazioni differenziali alle derivate parziali.

**Definizione 9.1.** *Un'equazione differenziale alle derivate parziali in  $n$  variabili indipendenti  $x_1, x_2, \dots, x_n$  è una relazione tra tali variabili, una funzione incognita  $v$  di  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ed una o più derivate parziali della funzione incognita. Diremo che un'equazione alle derivate parziali è di ordine  $m$  se  $m$  è l'ordine delle derivate di ordine massimo della funzione incognita che compaiono nell'equazione.*

Ad esempio, la più generale equazione alle derivate parziali del II ordine nelle  $n$  variabili indipendenti  $x_1, x_2, \dots, x_n$  è della forma:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, v, \partial_{x_1} v, \dots, \partial_{x_n} v, \partial_{x_1 x_1}^2 v, \partial_{x_1 x_2}^2 v, \dots, \partial_{x_n x_n}^2 v) = 0,$$

dove  $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$  è la funzione incognita.

Se  $F$  è lineare rispetto alla funzione incognita e a tutte le sue derivate, l'equazione si dice **lineare**.

La più generale equazione lineare alle derivate parziali del II ordine nelle 2 variabili indipendenti  $x, y$  è del tipo:

$$A(x, y) \partial_{xx}^2 v + 2B(x, y) \partial_{xy}^2 v + C(x, y) \partial_{yy}^2 v + a(x, y) \partial_x v + b(x, y) \partial_y v + c(x, y) v = f(x, y),$$

con  $A, B, C, a, b, c, f$  funzioni note.

Se  $f \equiv 0$ , l'equazione si dice **omogenea**.

Particolarmente importanti per i numerosi fenomeni fisici da esse governati sono le tre seguenti equazioni alle derivate parziali del II ordine:

$$\frac{1}{V^2} \partial_{tt}^2 v - (\partial_{x_1 x_1}^2 v + \partial_{x_2 x_2}^2 v + \partial_{x_3 x_3}^2 v) = f(t, x_1, x_2, x_3),$$

( $V =$  costante positiva), detta **equazione delle onde o di D'Alembert**;

$$\frac{1}{a^2} \partial_t v - (\partial_{x_1 x_1}^2 v + \partial_{x_2 x_2}^2 v + \partial_{x_3 x_3}^2 v) = f(t, x_1, x_2, x_3),$$

( $a =$  costante positiva), detta **equazione del calore o di Fourier**;

$$\partial_{x_1 x_1}^2 v + \partial_{x_2 x_2}^2 v + \partial_{x_3 x_3}^2 v = f(x_1, x_2, x_3),$$

detta **equazione di Poisson**.

L'ultima equazione prende il nome di **equazione di Laplace** se  $f \equiv 0$ .

Queste tre equazioni sono dette **equazioni principali della Fisica Matematica**.

Le prime due sono equazioni alle derivate parziali nelle 4 variabili indipendenti  $(t, x_1, x_2, x_3)$ , del II ordine, lineari e a coefficienti costanti. Tali equazioni governano fenomeni evolutivi che avvengono in regioni dello spazio geometrico in un dato intervallo di tempo e che sono descritti da grandezze dipendenti non solo dal tempo ma anche dalle coordinate spaziali del punto dello spazio geometrico nel quale si considerano.

La terza equazione, che è un'equazione alle derivate parziali nelle tre variabili indipendenti  $(x_1, x_2, x_3)$ , del II ordine, lineare, a coefficienti costanti, in genere governa fenomeni stazionari, cioè indipendenti dal tempo e dunque individuati mediante grandezze che dipendono solo dalle coordinate spaziali del punto dello spazio geometrico nel quale si considerano.

**Definizione 9.2.** *Data un'equazione differenziale alle derivate parziali di ordine  $m$  in  $n$  variabili indipendenti, diremo che la funzione  $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$  è **soluzione classica o forte** dell'equazione nel dominio (insieme aperto connesso)  $D \in \mathbb{R}^n$  se  $v \in C^m(D)$  e, sostituita al posto della funzione incognita, riduce l'equazione ad un'identità rispetto alle variabili indipendenti.*

**Esempio 9.1.**

Consideriamo l'equazione di Laplace in  $\mathbb{R}^3$  e mostriamo che una soluzione classica di tale equazione in  $\mathbb{R}^3$  è la funzione:

$$v(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2.$$

Tale funzione  $\in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ , anzi è di classe  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ .

Per quanto riguarda le derivate che compaiono nell'equazione abbiamo:

$$\partial_{x_i} v(x_1, x_2, x_3) = 2x_i \quad i = 1, 2, \quad \partial_{x_3} v(x_1, x_2, x_3) = -4x_3,$$

$$\partial_{x_i x_i}^2 v(x_1, x_2, x_3) = 2 \quad i = 1, 2, \quad \partial_{x_3 x_3}^2 v(x_1, x_2, x_3) = -4.$$

Sostituendo nell'equazione al posto della funzione incognita otteniamo:

$$2 + 2 - 4 = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3.$$

Accanto alla definizione di soluzione classica di un'equazione alle derivate parziali si possono dare definizioni meno restrittive indebolendo le condizioni di regolarità. Si parla allora di soluzioni **generalizzate** o **deboli**, ma non insistiamo su tale punto.

Diremo che un'equazione alle derivate parziali è **semilineare** se è lineare rispetto alle derivate di ordine massimo della funzione incognita e i coefficienti di queste sono funzioni solo delle variabili indipendenti.

La più generale equazione alle derivate parziali del II ordine semilineare nelle 2 variabili indipendenti  $x, y$  si presenta nella forma:

$$A(x, y) \partial_{xx}^2 v + 2B(x, y) \partial_{xy}^2 v + C(x, y) \partial_{yy}^2 v = \Phi(x, y, v, \partial_x v, \partial_y v). \quad (9.4.1)$$

Nel seguito del paragrafo ci occuperemo prevalentemente di equazioni alle derivate parziali del II ordine in 2 variabili indipendenti, visto che l'equazione di Black e Scholes è di tale tipo.

**Definizione 9.3.** *Data l'equazione alle derivate parziali semilineare (9.4.1), con  $(x, y)$  variabile in un dominio  $D \subset \mathbb{R}^2$ , si definisce discriminante dell'equazione la seguente funzione:*

$$\delta(x, y) = B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y) \quad \forall (x, y) \in D.$$

**Definizione 9.4.** *(Classificazione in un punto per un'equazione alle derivate parziali del II ordine in due variabili indipendenti semilineare). Considerato  $(x, y) \in D$ , nell'ipotesi che i coefficienti  $A, B, C$  non si annullino simultaneamente, diciamo che in  $(x, y)$  l'equazione (9.4.1) è*

- di tipo iperbolico se  $\delta(x, y) > 0$ ;
- di tipo parabolico se  $\delta(x, y) = 0$ ;
- di tipo ellittico se  $\delta(x, y) < 0$ .

### Esempi 9.2.

1. Equazione delle onde in due variabili, detta anche equazione delle corde vibranti:

$$\frac{1}{V^2} \partial_{tt}^2 v - \partial_{xx}^2 v = f(t, x).$$

Abbiamo:

$$A = \frac{1}{V^2}, B = 0, C = -1, \implies \delta = \frac{1}{V^2} > 0 \text{ in } \mathbb{R}^2.$$

L'equazione è di tipo iperbolico in  $\mathbb{R}^2$ .

2. Equazione del calore in due variabili

$$\frac{1}{a^2} \partial_t v - \partial_{xx}^2 v = f(x, t).$$

Abbiamo:

$$A = 0, B = 0, C = -1 \implies \delta = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2.$$

L'equazione è di tipo parabolico in  $\mathbb{R}^2$ .

3. Equazione di Poisson in due variabili:

$$\partial_{xx}^2 v + \partial_{yy}^2 v = f(x, y).$$

Abbiamo:

$$A = 1, B = 0, C = 1 \implies \delta = -1 < 0 \text{ in } \mathbb{R}^2.$$

L'equazione è di tipo ellittico in  $\mathbb{R}^2$ .

La classificazione in un punto si può generalizzare anche ad equazioni alle derivate parziali semilineari del II ordine in più di due variabili indipendenti.

**Definizione 9.5.** *L'applicazione*

$$\begin{aligned} H : D &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (\xi, \eta) \end{aligned}$$

( $D = \text{dominio di } \mathbb{R}^2$ ) tale che :

1)  $\xi, \eta \in C^2(D)$ ;

$$2) \det \begin{pmatrix} \partial_x \xi & \partial_y \xi \\ \partial_x \eta & \partial_y \eta \end{pmatrix} \neq 0 \text{ in } D$$

è detta trasformazione regolare delle variabili indipendenti  $(x, y)$ .

Si potrebbero dimostrare le seguenti proposizioni.

**Proposizione 9.1.** *In seguito ad una trasformazione regolare  $H$  delle variabili indipendenti la trasformata dell'equazione differenziale del II ordine in due variabili indipendenti semilineare (9.4.1) è ancora semilineare ed in ogni punto di  $H(D)$  è dello stesso tipo dell'equazione di partenza nel punto corrispondente di  $D$ .*

**Proposizione 9.2.** *Se l'equazione (9.4.1) è di tipo iperbolico o parabolico in  $D$  e  $A, B, C \in C^2(D)$  o se l'equazione è di tipo ellittico in  $D$  e  $A, B, C$  sono funzioni analitiche in  $D$ , allora esiste una trasformazione regolare delle variabili indipendenti che consente di scrivere l'equazione trasformata, se non in tutto  $D$ , almeno in un suo sottodominio, nella forma seguente, detta II forma canonica:*

- $\partial_{\xi\xi}^2 \tilde{v} - \partial_{\eta\eta}^2 \tilde{v} = \tilde{\Phi}(\xi, \eta, \tilde{v}, \partial_\xi \tilde{v}, \partial_\eta \tilde{v})$  nel caso iperbolico;
- $\partial_{\eta\eta}^2 \tilde{v} = \tilde{\Phi}(\xi, \eta, \tilde{v}, \partial_\xi \tilde{v}, \partial_\eta \tilde{v})$  nel caso parabolico;
- $\partial_{\xi\xi}^2 \tilde{v} + \partial_{\eta\eta}^2 \tilde{v} = \tilde{\Phi}(\xi, \eta, \tilde{v}, \partial_\xi \tilde{v}, \partial_\eta \tilde{v})$  nel caso ellittico,

dove con  $\tilde{v}$  denotiamo la trasformata di  $v$ .

Ricordiamo che una funzione si dice analitica in un dominio se in un intorno di ogni punto del dominio è sviluppabile in serie di Taylor e questa risulta uniformemente convergente.

Si noti che l'equazione delle onde in due variabili non è ridotta alla II forma canonica, mentre lo sono l'equazione del calore (basta cambiare di segno entrambi i membri) e l'equazione di Poisson.

Come per le equazioni differenziali ordinarie, anche un'equazione alle derivate parziali ammette infinite soluzioni e dunque, come per determinare una soluzione di un'equazione differenziale ordinaria si associano a questa le condizioni iniziali o di Cauchy, analogamente per determinare una soluzione di un'equazione alle derivate parziali si associano all'equazione stessa delle opportune condizioni, dette **condizioni ai limiti**.

Se abbiamo un'equazione differenziale alle derivate parziali in  $n$  variabili indipendenti di ordine  $m$  le condizioni ai limiti consistono nell'assegnare su una determinata varietà di  $\mathbb{R}^n$  di dimensione  $n - 1$  i valori della funzione incognita o di alcune sue derivate, al massimo sino all'ordine  $m - 1$ .

Per problema ai limiti relativo ad una data equazione differenziale alle derivate parziali si intende il problema che consiste nel trovare una soluzione dell'equazione soddisfacente ad opportune condizioni ai limiti.

Come già abbiamo osservato, vi sono equazioni alle derivate parziali che descrivono fenomeni fisici di evoluzione. In tali equazioni dunque una delle variabili indipendenti è la variabile temporale  $t$ , mentre le altre variabili sono coordinate spaziali. In tal caso, se le condizioni associate all'equazione si riferiscono all'iperpiano  $t = t_0$  ( $t_0 =$  istante iniziale), vengono dette **condizioni iniziali**; se si riferiscono alla frontiera del dominio  $D$  in cui variano le coordinate spaziali sono dette **condizioni al contorno**.

I principali problemi ai limiti relativi alle equazioni alle derivate parziali del II ordine che descrivono fenomeni fisici si possono raggruppare in tre classi:

- **Problemi di Cauchy o problemi ai valori iniziali** per equazioni di tipo iperbolico o parabolico che governano fenomeni di evoluzione. La soluzione si cerca in  $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$  e sono assegnate solo condizioni iniziali.  $[0, +\infty)$  è un intervallo di tempo illimitato e in  $\mathbb{R}^n$  assumono i loro valori le coordinate spaziali;
- **Problemi ai valori al contorno** per equazioni di tipo ellittico nelle quali non compare la variabile temporale. La soluzione si cerca in  $\overline{D}$  con  $D$  dominio di  $\mathbb{R}^n$ . Sono assegnate solo condizioni al contorno riferentesi a  $\partial D$ ;
- **Problemi di tipo misto** per equazioni di tipo iperbolico o parabolico. La soluzione si cerca in  $[0, T] \times \overline{D}$ , dove  $[0, T]$  è un intervallo di tempo e  $D$  è un dominio di  $\mathbb{R}^n \neq \mathbb{R}^n$ . Sono assegnate condizioni iniziali e condizioni al contorno relative a  $\partial D$ .

E' evidente che è molto importante provare per un dato problema ai limiti che la soluzione esiste ed è unica, almeno in una certa classe. Molti problemi ai limiti per equazioni alle derivate parziali soddisfano a tale importante proprietà sotto opportune condizioni di regolarità dei dati del problema stesso.

Si osservi che i fenomeni di evoluzione descritti mediante equazioni alle derivate parziali rientrano nei processi deterministici.