Esercitazione 8

Equazioni non lineari

a.a. 2018-19

Esercizio 1

La funzione $f(x) = \cos(2x) \sin(2x)$ ammette una radice α nell'intervallo $[a, b] = [0.5, 1]$.

- (M) Disegnare il grafico della funzione f nell'intervallo $[a, b]$.
- (T) Verificare l'applicabilità del metodo di bisezione. Commentare le proprietà di convergenza di tale metodo.
- (M) Scrivere la function `bisez.m` che implementi il metodo di bisezione. In particolare si utilizzi un criterio d'arresto basato sul residuo $|f(x_k)|$, alla k -esima iterazione, accoppiato a un controllo sul massimo numero di iterazioni. Tale numero massimo deve essere calcolato all'interno della function stessa, in funzione della tolleranza `tol` considerata, secondo quanto previsto dalla stima teorica.

La function `bisez.m` dovrà

- ricevere in ingresso:
 - gli estremi `a` e `b` dell'intervallo di ricerca;
 - la tolleranza `tol` richiesta sul residuo;
 - la funzione `fun` definita come anonymous functions (@);
- restituire in uscita:
 - il vettore `xvect` delle iterate;
 - il numero `it` delle iterazioni eseguite.

L'intestazione della funzione dovrà essere:

```
[xvect, it] = bisez(a, b, tol, fun)
```

- (M) Utilizzare la function `bisez.m` per calcolare la radice α di f , con $tol = 10^{-5}$. Riportare il valore di α calcolato e il numero di iterazioni effettuate.

Esercizio 2

Per calcolare la radice $\alpha = 0$ della funzione $f(x) = \sinh(x)$, si utilizza il metodo di punto fisso con la seguente funzione di iterazione:

$$\psi(x) = x - e^{cx} \sinh(x)$$

dove $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, con $c \in \mathbf{R}$.

(M) Disegnare il grafico di $f(x)$ e la retta $y = 0$ nell'intervallo $x \in [-1, 1]$.

(T) Svolgere i seguenti punti:

- i Fornire condizioni sufficienti per la convergenza del metodo di punto fisso.
- ii Determinare per quale valore di c , si ha la convergenza ad α del metodo di punto fisso con funzione di iterazione $\psi(x)$, con x_0 scelto in $[-1, 1]$.

(M+T) Svolgere i seguenti punti:

- i Applicare il metodo di punto fisso nel caso $c = 2$, utilizzando la funzione **iterazione.m**. Assumere $maxit = 1000$, $tol = 10^{-9}$ e punto iniziale $x_0 = 0.8$. Riportare il punto fisso ottenuto, il numero di iterazioni necessarie alla convergenza, e aggiungere il punto al grafico precedente.
- ii Qual è la velocità di convergenza?

(T+M) Svolgere i seguenti punti:

- i Determinare il valore di c per cui il metodo di punto fisso con funzione di iterazione $\psi(x)$ converge con ordine 3 ad α , purché si scelga x_0 in un intorno sufficientemente piccolo di α .
- ii Con il valore di c ottenuto al punto precedente, calcolare il numero di iterazioni necessarie per la convergenza utilizzando la function e i parametri di input indicati al punto (M) precedente.

Esercizio 3

Sia $f : [0, 3] \rightarrow \mathbf{R}$,

$$f(x) = 2 \cos(x) - \exp(x) + \frac{5}{2}.$$

Si consideri il problema di approssimare la radice di f .

(M) Disegnare il grafico della funzione f .

(T) Il metodo di Newton converge globalmente nell'intervallo?

- (T) Qual è l'espressione della generica iterazione del metodo di Newton? Riscrivere il metodo di Newton come metodo di punto fisso. Calcolare la corrispondente funzione di iterazione nel caso della f definita sopra.
- (T) Con particolare riferimento alla molteplicità degli zeri di f (funzione generica), quali sono i principali risultati di convergenza del metodo di Newton?
- (M) Utilizzare la function `newton.m` per calcolare la radice di f definita sopra, utilizzando come dato iniziale `x0=-0.3`, come tolleranza `1e-6` e come numero massimo di iterazioni `maxit=100`. Riportare il valore approssimato calcolato e il numero di iterazioni effettuate.
- (M) Si calcoli l'errore assoluto commesso, sapendo che $\alpha \sim 1.1814639003600901$. Giustificare il risultato ottenuto, confrontando l'errore calcolato con la tolleranza utilizzata nel metodo.

Esercizio 4

- (M) Trovare una approssimazione a $25^{1/3}$ entro l'accuratezza 10^{-4} usando la function `bisez.m`, che realizza l'algoritmo di bisezione. Assumere `maxit = 1000` e scegliere un intervallo di partenza opportuno.
- (T+M) Se si assume di applicare l'algoritmo partendo dall'intervallo $[2, 3]$, quanti passi sono necessari per ottenere un errore non superiore a 10^{-4} ? Verificare i calcoli fatti con Matlab.
- (T) Fornire la complessità computazionale dell'algoritmo di bisezione.
- (M+T) Calcolare una approssimazione a $25^{1/3}$ entro l'accuratezza 10^{-4} con l'algoritmo di Newton (`newton.m`) e controllare se il metodo è globalmente convergente in $[2, 3]$.

Esercizio 5

- (M+T) Determinare con il metodo delle approssimazioni successive la radice dell'equazione $f(x) = \frac{1}{2}e^{x/2} - x = 0$ in $[4, 5]$. Verificare le condizioni di convergenza per la funzione usata nel metodo.
- (M) Realizzare una M-function che implementi il metodo della secante; verificare la correttezza del codice sul problema del punto precedente, confrontando il numero di iterazioni necessarie a ottenere la soluzione con tolleranza 10^{-3} a partire dallo stesso punto iniziale 4.5.
- (T) Discutere la velocità di convergenza del metodo della secante e la sua complessità .

Esercizio 6

- (M) Implementare in MatLab il metodo di Halley.
- (M) Applicare il metodo per trovare uno zero di $f(x) = x^2 + 2xe^x + e^{2x} = 0$ partendo da $x_0 = 0$. Confrontare con il metodo di Newton nella variante relativa a zeri multipli.
- (T) Discutere la velocità di convergenza del metodo di Newton nel caso di zeri multipli, della variante usata e del metodo di Halley.