

Esercitazione 5

Metodi iterativi

a.a. 2018-19

Esercizio 1

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 10 & 6 \\ 6 & 8 & 8 & 6 \\ 10 & 8 & 16 & 10 \\ 6 & 6 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

e il vettore dei termini noti

$$b = \begin{pmatrix} 56 \\ 50 \\ 86 \\ 57 \end{pmatrix}$$

svolgere i seguenti compiti:

- (M) risolvere il sistema $Ax = b$ con il metodo SOR, fissando un valore per il parametro ω . Creare un grafico, dove sull'asse delle ascisse sarà presente l'indice di iterazione k mentre sull'asse delle ordinate i valori dell'errore relativo commesso all'aumentare delle iterazioni. La soluzione esatta è $x = (2, 1, 3, 1)^T$.
- (M) Discretizzare l'intervallo $\Omega = (0, 2)$ con un numero di punti a piacere; per ogni $\omega_i \in \Omega$, risolvere il sistema $Ax = b$ e salvare il corrispettivo valore dell'errore relativo nell'elemento i -esimo del vettore `errorVec`. Graficare l'andamento dell'errore relativo al variare di ω_i .
- (T) È possibile calcolare il valore ottimale per il parametro ω in questo caso? Se sì, perché? Se no, perché?

Settare numero massimo di iterazioni e tolleranza per il metodo SOR a piacere.

Esercizio 2

(M) Riportare in un grafico la norma dell'errore relativo commesso dal metodo di Jacobi e dal metodo di Gauss Seidel per ogni iterazione k quando si risolve il

sistema $Ax = b$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La soluzione esatta è $x = (3, 1, -2, -1)^T$. Calcolare il raggio spettrale delle due matrici di iterazione.

(T) È possibile stabilire quale dei due metodi converga più velocemente?

Esercizio 3

Considerare il seguente problema ai limiti e la sua discretizzazione

$$\begin{cases} y''(x) = e^x(2+x), & x \in (0, 1) \\ y(0) = 0 \\ y(1) = e \end{cases}$$

(T) Quale metodo risulta più conveniente per la sua risoluzione?

(M) La soluzione esatta del problema è $y(x) = xe^x$: dopo aver trovato la soluzione con il metodo più conveniente, si riporti in un grafico la soluzione ottenuta e la soluzione esatta per differenti discretizzazioni. Si riporti in un altro grafico l'errore commesso punto per punto.

Esercizio 4

Considerare un corpo posto ad altezza h e lasciato cadere liberamente. Supponendo che l'attrito dell'aria sia nullo, tale corpo è soggetto solo all'accelerazione di gravità $-g$ (il segno negativo è dovuto al fatto che si considera un sistema di riferimento con verso positivo verso il cielo). Supponendo di normalizzare all'intervallo $[0, 1]$ il tempo di caduta di tale oggetto, l'equazione che governa la traiettoria è la seguente:

$$\begin{cases} x''(t) = -g & t \in (0, 1) \\ x(0) = h \\ x(1) = 0 \end{cases}$$

(M) Discretizzare tale problema ai limiti e calcolarne la soluzione con il metodo iterativo più conveniente. Confrontare la soluzione calcolata con la soluzione esatta

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \left(\frac{g}{2} - h\right)t + h$$

Esercizio 5

(M) Realizzare una function che implementi il metodo di Jacobi estrapolato. Verificarne il corretto funzionamento mediante uno script MatLab, considerando una matrice strettamente a diagonale dominante e discutendo i risultati per diversi valori di ω .