Esercitazione 3
Sistemi lineari

a.a. 2018-19

Esercizio 1

(M) Scrivere una M-function che calcola l'inversa di una matrice triangolare inferiore L di ordine n mediante una tecnica compatta, memorizzandola nella matrice stessa. La function deve controllare che la matrice sia triangolare inferiore e non singolare.
Verificare la correttezza calcolando la norma infinito del residuo $\|LX - I_n\|_\infty$, ove X è la matrice calcolata.
Risolvere lo stesso problema, risolvendo gli n sistemi $LX = I_n$ mediante una M-function file che implementa l'algoritmo di eliminazione in avanti.

(T) Qual è la complessità computazionale nel caso del calcolo dell'inversa e per l'algoritmo di eliminazione in avanti?

Esercizio 2

(M)

1. Generare una matrice casuale quadrata A con elementi interi appartenenti all'intervallo $[-20, 20]$. Estrarre in RR la matrice triangolare superiore di A.

2. Scrivere una function MatLab che, utilizzando una function per la risoluzione di un sistema triangolare con l'algoritmo di sostituzione all'indietro, risolva n sistemi associati alla stessa matrice R con termini noti uguali alle colonne di un'altra matrice B di ordine n: se B^j è la j–esima colonna di B, è richiesto di risolvere $Rx = B^j$, $j = 1, ..., n$.

3. Verificare la correttezza della function precedente usando la matrice generata RR come triangolare superiore e risolvendo $RR\ X = A$.

(T) Qual è la complessità computazionale nel caso del calcolo dell'inversa e per l'algoritmo di eliminazione in avanti?

Esercizio 3

(M) Data una matrice triangolare inferiore L di ordine n e una matrice A di dimensioni $n \times m$, scrivere una function che determini $L^{-1}A$ senza trovare l'inversa della matrice L. La function deve controllare che L sia triangolare inferiore e non singolare.

(T) Enunciare le condizioni necessarie e sufficienti affiché una matrice quadrata ammetta fattorizzazione LDU. Ci sono classi di matrici per cui queste condizioni sono sicuramente soddisfatte. Quali sono?

Esercizio 4

(M) Verificare che la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ generata con i seguenti passi

- C ha elementi interi casuali nell'intervallo $[-5, 5]$:
- $A = C^\top C$

abbia tutti minori principali primi non nulli, cioè sia fattorizzabile. L'ordine della matrice n è introdotto da tastiera. Nel caso la fattorizzazione esista, usare la function MatLab

```
[L,R]=lu(A)
```

per determinare la fattorizzazione di Doolittle $A = LR$ e, a partire da tale fattorizzazione, calcolare quella di Crout.

(T) Enunciare la definizione di una matrice definita positiva e le proprietà che la caratterizzano.

Esercizio 5

(T) Enunciare le condizioni sufficienti affinché una matrice A ammetta fattorizzazione $A = LDU$ con L triangolare inferiore, U triangolare superiore e D diagonale.

(M) Data la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -2 & 0 \\ 6 & -4 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & 5 & -8 & -7 \end{pmatrix}$$

verificare che tutti i suoi minori principale siano non nulli. Usare la function nativa

```
[L,R]=lu(A)
```

per determinare la fattorizzazione $A = LDU$, con D diagonale, L e U rispettivamente triangolare inferiore e superiore con elementi diagonali uguali a 1.

Usare la fattorizzazione per determinare la risoluzione del sistema lineare $Ax = b$, dove $b = (4, 8, 6, -10)^\top$.

Esercizio 6

(M) Sia A una matrice fattorizzabile a banda con banda r. Si modifichi l'algoritmo di fattorizzazione di Gauss (`gauss1.m`) in modo da evitare operazioni inutili. La function deve controllare che la banda sia r.
Suggerimento: se A ha banda r, la matrice L ha essa pure banda inferiore r e la R ha banda superiore r: non devono essere calcolati gli elementi fuori dalle bande perché sono nulli.

(T) Quali sono le condizioni necessarie e sufficienti affinché una matrice quadrata sia fattorizzabile?

Esercizio 7

(T) Elencare le proprietà delle matrici simmetriche definite positive.
Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 25 & 0 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

verificare che sia simmetrica definita positiva, calcolando il fattore di Cholesky.

(M) Scrivere uno script MatLab in cui viene chiamata una M-function che determini la fattorizzazione di Cholesky della matrice A, utilizzando l'algoritmo di Gauss $A = LR$ (usare la routine MatLab `[L,R]=lu(A)`) e determinando a partire da L e R il fattore di Cholesky.
La function deve controllare che la fattorizzazione $A = LR$ esista. Controllare la correttezza della function e determinare la risoluzione del sistema $Ax = b$, con $b = (2, 25, 11)^\top$.

Esercizio 8

(M) Viene definita *matrice di Hessemberg superiore* una matrice quadrata che ha tutti gli elementi sotto alla prima sottodiagonale pari a 0.
Creare una matrice A di elementi random appartenenti all'intervallo $[-10, 10]$.
Estrarre da A la matrice H di Hessemberg superiore utilizzando il comando `triu`.
Costruire una M-function che modifichi `gauss1.m` in modo da ottenere la fattorizzazione di Gauss con pivoting parziale per matrici di Hessemberg superiori, con il minimo numero di operazioni. Testare l'algoritmo sulla matrice H.

Testare la correttezza della function confrontando i risultati ottenuti con la funzione nativa `lu`.

(T) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

è fattorizzabile mediante l'algoritmo di Gauss con strategia diagonale?
Giustificare la risposta.
Costruire la fattorizzazione $A = LR$, calcolare il determinante di A e risolvere il sistema associato alla matrice con termine noto $b = (4, 6, 0)^T$.

Esercizio 9

(T) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

verificare che sia strettamente diagonale dominante.

(M) Calcolare l'inversa X di A, risolvendo il sistema $AX = I_5$. Si usi la routine di MatLab `lu` per ottenere la fattorizzazione di A. Calcolare la matrice residuo $R = I_5 - AX$, dove I_5 è la matrice identità di ordine 5.

Esercizio 10

(M) Data la matrice

$$A(n) = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{2}{n}\right) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \exp\left(\frac{4}{n}\right) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \exp\left(\frac{6}{n}\right) & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 1 & \exp\left(\frac{2(n-1)}{n}\right) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \exp\left(\frac{2n}{n}\right) \end{pmatrix}$$

verificare che sia definita positiva tramite l'uso del comando `chol` per valori di $n = 2, 3, \ldots, 9$. Calcolare l'inversa $B(n)$ di $A(n)$ per ogni valore di n, usando la fattorizzazione di Gauss senza pivoting (`gauss1.m`).
Visualizzare un grafico plottando la norma 2 del residuo $R(n) = I_n - B(n)A(n)$ per $n = 2, 3, \ldots, 9$.

(T) Applicare il metodo di Gauss (versione 0) alla seguente matrice A, calcolando i fattori L ed R della fattorizzazione $A = LR$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcolare la soluzione del sistema associato alla matrice con termine noto $b = (2, 3, 7)^T$.
Calcolare il determinante della matrice.