Esercitazione 2
Numeri finiti e propagazione dell'errore

a.a. 2018-19

Esercizio 1

(M) Si considerino le seguenti approssimazioni delle funzioni $\sin x$ e $\cos x$

$$\begin{aligned}\sin(x) &\simeq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \\ \cos(x) &\simeq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\end{aligned}$$

Realizzare uno script MatLab che calcoli gli errori assoluti e relativi delle precedenti approssimazioni per $x = -2, -1, 0, 1, 2$, usando come valori esatti le funzioni predefinite di MatLab `sin` e `cos`.

(T) Il calcolo della funzione $\sin(x)$ è sempre ben condizionato?

Esercizio 2

(M) Realizzare una funzione MatLab che calcoli il valore del seno iperbolico $\sinh x$ tramite la relazione:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Si confronti con la funzione MatLab $\sinh(x)$ (che assumiamo essere il valore esatto del seno iperbolico) e si realizzi il grafico dell'errore assoluto e relativo per $x = 10.^{(-6:3)}$ (`help plot, help semilogx`). Quale è la causa di errore per valori piccoli di x? Cosa succede per valori grandi di x?

(T) Calcolare il numero di condizione della funzione $\sinh x$.

Esercizio 3

(M) La costante e di Eulero-Mascheroni è definita come

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n$$

ove $\gamma_n = [1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}-\log n]$. Realizzare uno script MatLab che esegua il calcolo della successione γ_n, per $n = 10^{0:2:8}$. Discutere i risultati ottenuti dopo averli visualizzati graficamente (`help plot, help semilogx`).

(T) Rappresentare in "fixed point" (b=2, t+1=16) il numero $(-528)_{10}$. Rappresentare il numero $(-2.725)_{10}$ come numero finito in semplice precisione (4 byte) secondo le convenzioni dell'Ansi standard IEEE. Ripetere in doppia precisione e controllare il risultato con MatLab.

Esercizio 4

(M) Si calcoli la funzione di Bessel J_{20} in $x = 1$ usando la formula di ricorrenza:

$$J_{m+1} = 2mJ_m - J_{m-1}$$

ove J_0 e J_1 sono ottenuti con la funzione di MatLab `besselj(0,1)` e `besselj(1,1)` rispettivamente. Valutare se i risultati ottenuti sono attendibili (confrontarli con i valori ottenuti usando la funzione di MatLab `besselj(m,1)`).

(T) Valutare l'errore inerente e quello algoritmico nel calcolo dell'espressione:

$$f(x) = \sqrt{x+\frac{1}{x}} - \sqrt{x-\frac{1}{x}} \quad , \ x \geq 1$$

Esistono valori di x per cui il problema è mal condizionato? Esiste una formulazione più stabile?

Esercizio 5

(M) Valutare l'integrale della funzione $\dfrac{x^n}{4x+1}$ nell'intervallo $(0,1)$ mediante la formula di ricorrenza

$$y_n = \frac{1}{4}(\frac{1}{n} - y_{n-1})$$

con $y_0 = 1/4\log(5)$ oppure mediante la formula

$$y_n = \frac{1}{n+1} - 4y_{n+1}$$

partendo da un valore di y_{n+1} nullo con n abbastanza grande. Confrontare le due formule per effettuare il calcolo di y_{20} e valutare quale delle due è più stabile.

(T) Con la tecnica dell'analisi in avanti, calcolare l'errore algoritmico delle espressioni: $fl(x \cdot (y+z))$ e $fl(x \cdot y + x \cdot z)$. Si suppone che i dati appartengano all'insieme dei numeri finiti.

Esercizio 6

(M) Realizzare uno script MatLab che calcoli e^x con $x = [x] + f$ ove $f = x - [x]$ (parte decimale), usando lo sviluppo in serie di Taylor ($(e^{(f/[x]+1)})^{[x]}$). Confrontare con il risultato della funzione MatLab `exp`.

(T) Valutare l'errore inerente e algoritmico nel calcolo dell'espressione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+1)} - \sqrt{x}} \quad , \quad x \geq 0$$

Riformulare l'espressione in modo da evitare cancellazione. Valutare quale delle due formulazioni è più stabile per $x = 10^4$ e $x = 10^{-4}$.

Esercizio 7

(M) Realizzare uno script MatLab che confronti il calcolo della sequenza di Fibonacci fino al termine F_{100} ottenuto nei due seguenti modi:

- usare $F_0 = F_1 = 1$ e $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$;
- usare $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$

(T) Valutare l'errore inerente nel calcolo dell'espressione:

$$f(x) = e^{x/(x-1)}$$

Esistono valori di x per cui il calcolo della funzione è mal condizionato? Calcolare l'errore algoritmico nel caso in cui l'espressione sia valutata secondo la formulazione con cui è espressa. Esistono valori di x per cui l'algoritmo è numericamente stabile (provare per $x = 2$ e per $x = -2$)?

Esercizio 8

(M) Realizzare un M-function file per la valutazione della seguente funzione:

$$f(x) = 1.01e^{4x} - 4.62e^{3x} - 3.11e^{2x} + 12.2e^x - 1.99$$

Usare due diverse tecniche:

1. calcolare e^x usando uno sviluppo in serie accuratamente implementato in modo da ridurre la propagazione degli errori;
2. posto $y = e^x$, implementare la valutazione della funzione usando lo schema di Horner.

Confrontare la stabilità dei due algoritmi.

(T) Con il metodo dell'analisi in avanti dell'errore determinare una maggiorazione dell'errore relativo di arrotondamento per le espressioni

$$
\begin{aligned}
&(x+y)+z\\
&(xy)z\\
&x+(y+z)\\
&x(yz)
\end{aligned}
$$

ove si assume che i dati siano numeri finiti.

Esercizio 9

(M) Realizzare un M-function file per il calcolo di $\sin(x)$ usando lo sviluppo in serie di Taylor in modo che l'errore commesso non superi 10^{-3} nell'intervallo $[0, \pi]$. Usare formule trigonometriche per realizzare il calcolo per altri valori di x.

(T) Assegnati i seguenti numeri finiti ($b = 10, t = 5$, arrotondamento) determinare, operando nell'aritmetica dei numeri finiti, il numero:

$$fl(x^2 - y^2)$$

con $x = 0.11240 \cdot 10^2$, $y = 0.11241 \cdot 10^2$. Calcolare l'errore assoluto e quello relativo.

Esercizio 10

(M) Implementare in MatLab il calcolo di π usando i seguenti due differenti metodi:

- Sviluppo in serie di $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$:

$$\pi = 4(1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - .....)$$

- Sviluppo in serie di $\arcsin(1/2) = \pi/6$:

$$\pi = 6(.5+(.5)^3/(2\times3)+(1\times3)(.5)^5/(2\times4\times5)+(1\times3\times5)(.5)^7/(2\times4\times6\times7)+.....)$$

Volendo ottenere un errore relativo non superiore a 10^{-3}, quanti termini occorre considerare nei due casi?

(T) Verificare che, se $\beta = 10, t = 2$, l'equazione $.21\ 10x = .20\ 10$ ha come soluzioni $.96, .97, .98, .99$; l'equazione $.21\ 10x = .22\ 10$ non ha soluzione e $.2110x = .23\ 10$ ha un'unica soluzione $x = .11\ 10$.

Esercizio 11

(M) Implementare con una function MatLab il calcolo delle soluzioni di una equazione di II grado in modo stabile.

(T) Convertire in numero intero il seguente numero di macchina "fixed point" (b=2, t+1=16)

1011101011010110

Convertire in numero decimale il seguente numero di macchina floating point, codificato secondo le convenzioni dell'Ansi standard IEEE, precisione semplice:

11110110000110011000001000000000