

# Esercitazione 4

## Sistemi lineari, pivoting

a.a. 2018-19

### Esercizio 1

(T) Quando viene utilizzato il pivoting parziale? La fattorizzazione ottenuta con il pivoting per colonne è unica? Si può applicare anche a matrici rettangolari? Oltre al pivoting parziale, esiste il pivoting totale: in cosa consiste?

(M) Partendo da `gauss2.m`, costruire una M-function `gauss2_rettangoli.m` che calcoli la fattorizzazione di Gauss con pivoting parziale anche per matrici rettangolari  $m \times n$ .

(M) Creare una matrice  $A$  di numeri reali casuali, uniformemente distribuiti nell'intervallo  $[1, \frac{mn}{m+n}]$ , dove  $m$  è il numero di righe ed  $n$  è il numero di colonne. Le dimensioni della matrice devono essere introdotte da tastiera, sia nel caso  $m > n$  che nel caso  $m < n$ . Testare la function del punto precedente su  $A$  calcolando la norma infinito  $\|PA - LR\|_\infty$ .

### Esercizio 2

(M) Viene definita *matrice di Hessemberg superiore* una matrice quadrata che ha tutti gli elementi sotto alla prima sottodiagonale pari a 0.

Creare una matrice  $A$  di elementi random uniformemente distribuiti nell'intervallo  $[-10, 10]$ . Estrarre da  $A$  la matrice  $H$  di Hessemberg superiore utilizzando il comando `triu`.

(M) Costruire una M-function `gauss2_hessem.m` che modifichi `gauss2.m` in modo da ottenere la fattorizzazione di Gauss con pivoting parziale per matrici di Hessemberg superiori, con il minimo numero di operazioni. Testare l'algoritmo sulla matrice  $H$  calcolando la norma infinito  $\|PH - LR\|_\infty$ . Testare la bontà della function confrontando i risultati ottenuti con la funzione nativa `lu` (si confrontino in norma infinito i fattori  $L$  ed  $R$  ottenuti coi due metodi).

(T) Spiegare come si diminuisce la complessità computazionale dell'algoritmo di Gauss per le matrici di Hessemberg superiori. Discutere il caso delle matrici a banda.

### Esercizio 3

(T) Data una matrice a banda con banda  $r$  (inferiore e superiore), qual è il costo computazionale per la fattorizzazione di Gauss?

(M) Costruire una M-function che modifichi `gauss2.m` in modo da ottenere la fattorizzazione di Gauss con pivoting parziale per matrici a banda con banda  $r$ , con il minimo numero di operazioni.

(M) Implementare l'algoritmo di Thomas per la fattorizzazione senza pivoting di matrici tridiagonali, controllando che sia possibile effettuarla.

### Esercizio 4

(T) Data la fattorizzazione  $PAQ = LR$ , spiegare come può essere utilizzata per la soluzione del sistema lineare  $Ax = b$ .

(M) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -2 & 0 \\ 6 & -4 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & 5 & -8 & -7 \end{pmatrix}$$

costruire una M-function `gauss_pivotot.m` che implementi l'algoritmo di Gauss con pivoting totale per il calcolo della fattorizzazione  $PAQ = LR$ .

(M) Usare l'algoritmo per calcolare la soluzione del sistema  $Ax = b$ , dove  $b = (4, 8, 6, -10)^\top$  (si usino `sollower.m` e `solupper.m`). Verificare la bontà della soluzione trovata, calcolando la norma del residuo e l'errore relativo sulla soluzione esatta  $x = (1, 1, \dots, 1)^\top$ .

(T) In questo caso, la norma del residuo fornisce informazioni sulla bontà della soluzione ottenuta?

### Esercizio 5

(T) Spiegare a quale tipo di fattorizzazione è legata la strategia del pivoting parziale e a quale quella di pivoting totale.

(T) Data la matrice  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , tramite la fattorizzazione  $PAQ = LR$  si può calcolare il rango di  $A$ ? Se sì, come? Se no, perché?

(M) Costruire una M-function che implementa l'algoritmo di Gauss con pivoting totale per il calcolo della fattorizzazione  $PAQ = LR$  per una matrice qualunque anche non quadrata; usare l'algoritmo per calcolare il rango numerico della matrice, se possibile.

### Esercizio 6

(T) Descrivere l'algoritmo di Thomas per la fattorizzazione delle matrici tridiagonali.

(M) Costruire una M-function che fattorizzi una matrice tridiagonale in una matrice bidiagonale superiore e una bidiagonale inferiore.



## Esercizio 9

(T) Enunciare le condizioni necessarie e sufficienti affinché una matrice ammetta fattorizzazione di Cholesky.

(M) Calcolare l'inversa di

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 32 \end{pmatrix}$$

usando la fattorizzazione di Cholesky (`cholesky.m`). Calcolare il residuo  $R = I - AX$ , ove  $X$  è l'inversa calcolata.

## Esercizio 10

(T) Qual è la differenza tra la fattorizzazione di Crout e la fattorizzazione di Doolittle? Spiegare come si ricavano dalla fattorizzazione  $A = LDU$ .

(M) Scrivere una function che calcoli l'inversa di una matrice strettamente diagonale dominante usando l'algoritmo di Gauss. Tale function deve restituire anche il valore del residuo  $R = I - AX$ , ove  $X$  è l'inversa calcolata.

(M) Testare la function del punto precedente sulla matrice  $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ , dove

- gli elementi della diagonale sono tutti pari a 7;
- gli elementi fuori dalla diagonale sono numeri random distribuiti uniformemente nell'intervallo  $[0, 1]$ .

## Esercizio 11

(T) Descrivere la tecnica del pivoting parziale. Quali svantaggi può avere?

(M) Calcolare l'inversa di una matrice a scelta (avendo controllato che tale matrice sia invertibile) usando l'algoritmo di Gauss con pivoting parziale. Calcolare la norma infinito del residuo  $R = I - AX$ , ove  $X$  è l'inversa calcolata.

## Esercizio 12

(T) Descrivere la tecnica del pivoting totale. Di quale aspetto in più si deve tenere conto rispetto al pivoting parziale?

(M) Calcolare l'inversa di una matrice usando l'algoritmo di Gauss con pivoting totale. Calcolare la norma 2 del residuo  $R = I - AX$ , ove  $X$  è l'inversa calcolata.

## Esercizio 13

(T) Spiegare il legame fra le matrici di rotazione di Givens e la fattorizzazione  $A = QR$ .

(M) Calcolare l'inversa di una matrice utilizzando la fattorizzazione  $QR$  di una matrice mediante trasformazioni di Givens. Calcolare la norma di Frobenius del residuo  $R = I - AX$ , ove  $X$  è l'inversa calcolata.