Esercitazione 4 - esercizi aggiuntivi

a.a. 2018-19

Esercizio 1

Si consideri, fissato $n \in \mathbb{N}$, la seguente matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix}
1 & -\frac{1}{2} & 0 & & & & \dots & 0 \\
\frac{1}{2}e^{\frac{2}{n}} & 4 & \frac{1}{2} & 0 & & & & \\
0 & \frac{1}{2}e^{\frac{3}{n}} & 9 & \frac{3}{2} & 0 & & & \\
\vdots & 0 & \frac{1}{2}e^{\frac{4}{n}} & 16 & \frac{5}{2} & & & \\
& & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
\vdots & & & & & & & \\
0 & \dots & & & & \frac{1}{2}e^{\frac{n-1}{n}} & (n-1)^2 & (n-2)-\frac{1}{2} \\
0 & \dots & & & & 0 & \frac{1}{2}e^{\frac{n}{n}} & n^2
\end{pmatrix}$$

e il sistema lineare $Ax = b$, dove il termine noto $b \in \mathbb{R}^n$ é scelto in modo tale che la soluzione esatta sia $x = (1, 2, \dots, n)^\top \in \mathbb{R}^n$.

1. (M+T) Si elenchino le condizioni sufficienti affinché esista la fattorizzazione LU senza pivoting. Si mostri (senza usare le funzioni `lu` o `gauss1`) che la matrice A ammette tale fattorizzazione per $n = 20$.
2. (M) Si risolva il sistema lineare $Ax = b$ utilizzando le funzioni `gauss1`, `solupper` e `sollower` per $n = 4, \dots, 100$. Si calcolino, inoltre, il residuo normalizzato, l'errore relativo commesso e il numero di condizionamento della matrice al variare di n.
3. (T) Dopo avere esplicitato la relazione che intercorre fra errore relativo sulla soluzione e la perturbazione relativa sui dati, commentare l'affidabilitá del criterio d'arresto basato sul residuo normalizzato.
4. (M+T) Si riportino su un grafico in scala semi-logaritmica le tre quantitá calcolate nella seconda parte del punto 2, in funzione di n. Si commenti tale grafico alla luce del punto precedente.

Esercizio 2

(M) Costruire una M-function che modifichi `gauss2.m` in modo da ottenere la fattorizzazione di Gauss con pivoting parziale per matrici a banda con banda r, con il minimo numero di operazioni.

Esercizio 3

(M) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -2 & 0 \\ 6 & -4 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & 5 & -8 & -7 \end{pmatrix}$$

costruire una M-function che implementi l'algoritmo di Gauss con pivoting totale per il calcolo della fattorizzazione $PAQ = LR$; usare l'algoritmo per calcolare la soluzione del sistema $Ax = b$, dove $b = (4, 8, 6, -10)^\top$. Verificare la bontá della soluzione trovata, calcolando l'errore relativo sulla soluzione esatta $x = (1, 1, \dots, 1)^\top$.

Esercizio 4

(M) Costruire una M-function che modifichi `gauss1.m` in modo da ottenere la fattorizzazione di Gauss di una matrice tridiagonale in una matrice bidiagonale superiore e una bidiagonale inferiore. Una volta eseguita la fattorizzazione, controllare la correttezza della stessa risolvendo un sistema lineare associato.

Esercizio 5

(T)

Usare la fattorizzazione per determinare la risoluzione del sistema lineare $Ax = b$, dove $b = (4, 8, 6, -10)^\top$.