

Analisi Matematica 3 - (Foschi) - esame del 24.1.2019

nome e cognome:

matricola:

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte motivando ogni passaggio e **spiegando** in modo chiaro e leggibile le cose che fai. Ricorda di scrivere il tuo nome e numero di matricola su **ogni** foglio (compreso questo) e di riconsegnare al termine dell'esame **tutti** i fogli che hai usato (compresi i fogli di brutta copia, il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che hai preparato).

1. (8 punti) Determina per quali valori reali dei parametri α e β si ha che $f \in L^{2019}([0, +\infty[)$, dove f è la funzione

$$f(x) := \frac{1}{x^\alpha(1+x^2)^\beta \log\left(x + \frac{1}{x}\right)},$$

definita per ogni $x > 0$.

2. (8 punti) Sia H lo spazio di Hilbert delle funzioni misurabili $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tali che $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 e^{-|x|} dx < \infty$, dotato del prodotto scalare $\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} e^{-|x|} dx$.

- Verifica che la funzione $m(x) := |x|$ appartiene ad H .
- Verifica che H contiene anche tutti i polinomi.
- Calcola la proiezione ortogonale della funzione m sul sottospazio V generato dai polinomi di grado minore o uguale a 2.

[Può essere utilizzare il fatto che $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$.]

3. (8 punti) Sia $g(x) := \frac{\sin(x)}{(1+x^2)^2}$.

- Calcola la trasformata di Fourier di g
- Calcola la norma di g in $L^2(\mathbb{R})$.

4. (8 punti) Considera la successione di funzioni $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definita da

$$h_n(x) := \sin(nx) e^{-|x-n|}, \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Studia le varie forme di convergenza (puntuale, uniforme, in norma L^p , o nel senso delle distribuzioni) della successione per $n \rightarrow \infty$.