ANALISI 3 - L05:
NORMA L^p

1. Funzioni $\mathcal{L}^p$

Fissiamo uno spazio di misura $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$. [Se non sai cosa sia uno spazio di misura puoi considerare il caso in cui Ω è un sottoinsieme misurabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}$ è la σ-algebra degli insiemi misurabili contenuti in Ω e μ è la misura di Lebesgue su Ω.]

1.1. Caso $0 < p < \infty$.

Definizione 1.1. Sia $p > 0$. Sia $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione μ-misurabile. Definiamo la *(quasi)norma* L^p di f tramite la quantità

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu_x \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Indichiamo con $\mathcal{L}^p(\Omega)$ lo spazio delle funzioni con (quasi)norma L^p finita,

$$\mathcal{L}^p(\Omega) := \left\{ f \colon \Omega \to \mathbb{C} \, \text{misurabile} \colon \int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu_x < \infty \right\}.$$

Quando è chiaro il dominio su cui sono definite le funzioni e la misura scriveremo più sinteticamente $\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$ e indicheremo lo spazio con $\mathcal{L}^p$.

Proposizione 1.2. *Sia $p > 0$. Lo spazio $\mathcal{L}^p$ è uno spazio vettoriale e $\|\cdot\|_p$ è una quasinorma su $\mathcal{L}^p$.*

Lemma 1.3. *Sia $p > 0$. Dati due qualsiasi numeri A e B abbiamo che*

$$|A + B|^p \leqslant 2^p \big(|A|^p + |B|^p\big), \tag{1}$$

$$|A|^p + |B|^p \leqslant 2\big(|A| + |B|\big)^p. \tag{2}$$

Dimostrazione. Vediamo la prima disuguaglianza,

$$\begin{aligned} |A + B|^p \leqslant \big(|A| + |B|\big)^p \leqslant \big(2 \max\{|A|, |B|\}\big)^p = \\ = 2^p \max\{|A|^p, |B|^p\} \leqslant 2^p \big(|A|^p + |B|^p\big). \end{aligned}$$

Vediamo la seconda disuguaglinza,

$$|A|^p + |B|^p \leqslant 2 \max\{|A|, |B|\}^p \leqslant 2\big(|A| + |B|\big)^p.$$

□

Dimostrazione della proposizione 1.2. Nella disuguaglianza (1) poniamo $A = f(x)$ e $B = g(x)$ e integriamo rispetto d x, per la proprietà di monotonia dell'integrale abbiamo che

$$\int |f + g|^p \, \mathrm{d}\mu \leqslant 2^p \left(\int |f|^p \, \mathrm{d}\mu + \int |g|^p \, \mathrm{d}\mu \right). \tag{3}$$

Dunque se $f, g \in \mathcal{L}^p$ segue che anche $f + g \in \mathcal{L}^p$. Possiamo riscrivere la disuguaglianza (3) come

$$\|f + g\|_p^p \leqslant 2^p \left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p \right).$$

Date: ultimo aggiornamento, 13 ottobre 2020.

Applichiamo la disuguaglianza (2) con $A = \|f\|_p$ e $B = \|g\|_p$ e otteniamo

$$\|f+g\|_p^p \leqslant 2^p 2 \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right)^p ,$$

da cui ricaviamo che $\|\cdot\|_p$ soddisfa la disuguaglianza quasi-triangolare

$$\|f+g\|_p \leqslant 2^{1+\frac{1}{p}} \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) .$$

Dato $\lambda \in \mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{L}^p$ abbiamo che $\int |\lambda f|^p \,\mathrm{d}\mu = |\lambda|^p \int |f|^p \,\mathrm{d}\mu < \infty$ e dunque anche $\lambda f \in \mathcal{L}^p$, e la (quasi)norma $\|\cdot\|_p$ soddisfa la proprietà di omogeneità

$$\|\lambda f\|_p = |\lambda| \, \|f\|_p .$$

□

Osservazione 1.4. Integrali di funzioni misurabili su insiemi di misura nulla sono sempre nulli. La misura soffre in un certo senso di "miopia" e non riesce a distinguere funzioni che differiscono solo su insiemi di misura nulla. Per questo motivo quando $\|f\|_p = 0$ non possiamo concludere che $f = 0$, ma solamente che $f(x) = 0$ quasi ovunque in Ω, ovvero che esiste un insieme di misura nulla E tale che $f(x) = 0$ per ogni $x \in \Omega \setminus E$. Ad esempio la funzione di Dirichlet, $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, che vale $f(x) = 1$ per ogni razionale $x \in \mathbb{Q}$ e vale $f(x) = 0$ per ogni irrazionale $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, si annulla quasi ovunque, in quanto $\mathbb{Q}$ ha misura di Lebesgue nulla in $\mathbb{R}$, dunque $\|f\|_p = 0$; ma $f(x) \neq 0$ su un sottoinsieme denso in $\mathbb{R}$. Torneremo su questo fatto nella prossima lezione.

Proposizione 1.5. *Siano $0 < p_0 < p_1 < \infty$. Se $f \in \mathcal{L}^{p_0} \cap \mathcal{L}^{p_1}$ allora $f \in \mathcal{L}^p$ per ogni $p \in [p_0, p_1]$.*

In particolare abbiamo che l'insieme dei $p > 0$ per cui si ha che $f \in \mathcal{L}^p$ è sempre un intervallo.

Dimostrazione. Decomponiamo $f = f_0 + f_1$ come somma di due funzioni, con f_0 che contiene la parte "bassa" e f_1 la parte "alta" di f, ponendo

$$f_0(x) := \begin{cases} f(x), & \text{se } |f(x)| \leqslant 1, \\ 0, & \text{se } |f(x)| > 1, \end{cases} \qquad f_1(x) := \begin{cases} 0, & \text{se } |f(x)| \leqslant 1, \\ f(x), & \text{se } |f(x)| > 1. \end{cases}$$

Siccome f_0 e f_1 non sono mai entrambe diverse da zero abbiamo

$$|f|^p = |f_0|^p + |f_1|^p .$$

Integrando troviamo

$$\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu = \int |f_0|^p \,\mathrm{d}\mu + \int |f_1|^p \,\mathrm{d}\mu.$$

Per il primo integrale a destra dell'uguale, poiché $|f_0| \leqslant 1$ e $p > p_0$, abbiamo

$$\int |f_0|^p \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int |f_0|^{p_0} \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int |f|^{p_0} \,\mathrm{d}\mu.$$

Per il secondo integrale, poiché quando non è nullo $|f_1| > 1$ e $p < p_1$, abbiamo

$$\int |f_1|^p \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int |f_1|^{p_1} \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int |f|^{p_1} \,\mathrm{d}\mu.$$

Mettendo insieme i vari pezzi otteniamo che per ogni $t > 0$ vale

$$\|f\|_p^p \leqslant \|f\|_{p_0}^{p_0} + \|f\|_{p_1}^{p_1} ,$$

e questo prova che $f \in \mathcal{L}^p$. □

Definizione 1.6. Data una funzione misurabile $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ indichiamo con $E_f(t)$ l'*insieme di sopralivello* t per f formato dai punti in cui $|f|$ assume valore maggiore di t,

$$E_f(t) := \{x \in \Omega\colon\ |f(x)| > t\}\,.$$

La funzione $t \mapsto \mu\bigl(E_f(t)\bigr)$, che calcola la misura dei sopralivelli, è una funzione monotona non crescente e non negativa e dunque integrabile (in senso generalizzato) secondo Riemann. Se integriamo per strati orizzontali il sottografico di $|f|^p$ otteniamo la formula

$$\begin{aligned}\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu &= \int_0^\infty \mu\,\{x \in \Omega\colon\ |f(x)|^p > s\}\,\mathrm{d}s = \\ &= \int_0^\infty \mu\bigl\{x \in \Omega\colon\ |f(x)| > s^{1/p}\bigr\}\,\mathrm{d}s = p\int_0^\infty \mu\bigl(E_f(t)\bigr)t^{p-1}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Se restringiamo l'integrazione da tutto Ω alla regione $E_f(t)$ otteniamo la stima

$$\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu \geqslant \int_{E_f(t)} |f|^p \,\mathrm{d}\mu \geqslant \int_{E_f(t)} t^p \,\mathrm{d}\mu = t^p\mu\bigl(E_f(t)\bigr),$$

da cui ricaviamo la disuguaglianza di Chebyshev

$$\mu\bigl(E_f(t)\bigr) \leqslant \frac{1}{t^p}\,\|f\|_p^p\,, \tag{4}$$

che in particolare ci garantisce che i sopralivelli con $t > 0$ per funzioni $\mathcal{L}^p$ hanno sempre misura finita.

1.2. **Caso $p = \infty$.** Supponiamo ora che $f \in \mathcal{L}^p$ per ogni $p \geqslant p_0$ e cerchiamo di capire cosa succede a $\|f\|_p$ quando $p \to \infty$.

Per la disuguaglianza di Chebyshev (4) abbiamo

$$\|f\|_p \geqslant t\left(\mu\bigl(E_f(t)\bigr)\right)^{\frac{1}{p}}\,.$$

Passando al limite per $p \to \infty$, siccome

$$\lim_{p\to\infty}\left(\mu\bigl(E_f(t)\bigr)\right)^{\frac{1}{p}} = \begin{cases}1, & \text{se } E_f(t) \text{ ha misura positiva,}\\ 0, & \text{se } E_f(t) \text{ ha misura nulla,}\end{cases}$$

troviamo che

$$\liminf_{p\to\infty}\|f\|_p \geqslant M := \sup\bigl\{t \geqslant 0\colon \mu\bigl(E_f(t)\bigr) > 0\bigr\}\,. \tag{5}$$

Essendo la misura degli $E_f(t)$ monotona non crescente e non negativa, abbiamo che il valore M coincide anche con

$$M = \inf\bigl\{t \geqslant 0\colon \mu\bigl(E_f(t)\bigr) = 0\bigr\}\,,$$

e dunque M è il minimo valore per cui si ha che $|f(x)| \leqslant M$ quasi ovunque (ovvero a meno di un insieme di misura nulla). Tale valore non è altro che l'estremo superiore essenziale per la funzione $|f|$.

Definizione 1.7. Data una funzione misurabile $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$, diciamo che $m \in [-\infty, +\infty]$ è un *maggiorante essenziale* per g quando $g(x) \leqslant m$ quasi ovunque, ovvero quando l'insieme $\{x \in \Omega\colon g(x) > m\}$ è un insieme di misura nulla. L'estremo inferiore dei maggioranti essenziali per g si dice *estremo superiore essenziale* di g e lo indichiamo con

$$\operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} g(x) := \inf\{m \in [-\infty, +\infty]\colon g(x) \leqslant m \text{ quasi ovunque}\}\,.$$

Proposizione 1.8. *L'estremo superiore essenziale di g è un maggiorante essenziale per g. E dunque è il minimo dei maggioranti essenziali.*

Dimostrazione. Sia $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione decrescente di maggioranti essenziali che converge all'estremo superiore essenziale $m_\star$. Abbiamo che l'insieme

$$E_\star := \{x \in \Omega \colon g(x) > m_\star\}$$

è contenuto nell'unione degli insiemi $E_n := \{x \in \Omega \colon g(x) > m_n\}$. Ma gli insiemi E_n hanno tutti misura nulla, e quindi anche $E_\star$ avrà misura nulla in quanto contenuto nell'unione di una famiglia numerabile di insiemi di misura nulla. □

Tornando ai calcoli che stavamo facendo, la disuguaglianza (5) la possiamo quindi scrivere come

$$\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geqslant \operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| \,. \tag{6}$$

Per la proposizione 1.8 abbiamo che esiste un insieme di misura nulla E per il quale si ha che

$$\operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| = \sup_{x\in\Omega\setminus E} |f(x)| \,.$$

Gli integrali non modificano il loro valore se riduciamo il dominio di integrazione rimuovendo un insieme di misura nulla, dunque

$$\begin{aligned}\|f\|_p^p = \int_{\Omega\setminus E} |f|^{p-p_0} |f|^{p_0} \,\mathrm{d}\mu \leqslant \Big(\sup_{\Omega\setminus E} |f|\Big)^{p-p_0} \int_{\Omega\setminus E} |f|^{p_0} \,\mathrm{d}\mu = \\ = (\operatorname{ess\,sup}_\Omega |f|)^{p-p_0} \int_\Omega |f|^{p_0} \,\mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

ovvero

$$\|f\|_p \leqslant (\operatorname{ess\,sup}_\Omega |f|)^{1-\frac{p_0}{p}} \|f\|_{p_0}^{\frac{p_0}{p}} \,.$$

Passando al limite per $p \to \infty$ otteniamo

$$\limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \leqslant \operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| \,. \tag{7}$$

Confrontando le due stime (6) e (7) otteniamo che

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \operatorname{ess\,sup} |f| \,.$$

Questo risultato giustifica la seguente definizione per la norma per il caso $p = \infty$.

Definizione 1.9. Sia $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione misurabile. Definiamo la *(semi)norma* L^∞ per f come la quantità

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| \,.$$

Indichiamo con $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ lo spazio delle funzioni con (semi)norma L^∞ finita,

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega) := \{f \colon \Omega \to \mathbb{C} \,\text{misurabile} \colon \operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| < \infty\} \,.$$

Quando è chiaro il dominio su cui sono definite le funzioni e la misura scriveremo più sinteticamente $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f|$ e indicheremo lo spazio con $\mathcal{L}^\infty$.

Proposizione 1.10. *Lo spazio $\mathcal{L}^\infty$ è uno spazio vettoriale e $\|\cdot\|_\infty$ è una seminorma su $\mathcal{L}^\infty$.*

Dimostrazione. Siano $f, g \in \mathcal{L}^\infty$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Consideriamo gli insiemi

$$\begin{aligned} A &:= \{x \colon |f(x)| > \|f\|_\infty\} \,, \\ B &:= \{x \colon |g(x)| > \|g\|_\infty\} \,, \\ C &:= \{x \colon |f(x) + g(x)| > \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\} \,. \end{aligned}$$

Per ipotesi A e B sono insiemi di misura nulla.

Quando $x \notin A \cup B$ abbiamo

$$|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \,,$$

e quindi deve necessariamente essere $C \subseteq A \cup B$, per cui anche C deve avere misura nulla essendo contenuto nell'unione di insiemi di misura nulla. Ma ciò implica che $\|\cdot\|_\infty$ soddisfa la disuguaglianza triangolare

$$\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty < \infty,$$

e in particolare $f+g \in \mathcal{L}^\infty$.

Quando $\lambda \neq 0$ e $t \geqslant 0$, abbiamo che $|f(x)| > t$ se e solo se $|\lambda f(x)| > |\lambda|\, t$; l'insieme $\{x\colon\ |f(x)| > t\}$ coincide allora con l'insieme $\{x\colon\ |\lambda f(x)| > s\}$ per $s = |\lambda|\, t$. Dunque deve valere la proprietà di omogeneità $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\, \|f\|_\infty$. □

Osservazione 1.11. Osserviamo che la (semi)-norma L^∞, pur essendo il limite di quantità definite tramite integrali ha una definizione che non è basata su un integrale. Nella sua definizione comunque entra in gioco la misura μ che si sta considerando, in quanto il concetto di insieme di misura nulla, che sta alla base della definizione di estremo superiore essenziale, dipende dalla scelta della misura.

1.3. **Esempi di funzioni L^p.** Determinare se una funzione appartiene ad uno spazio L^p con $0 < p < \infty$ equivale a verificare se l'integrale $\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu$ risulta essere convergente. Per farlo è importante conoscere bene le proprietà di confronto e i criteri di convergenza per i cosidetti integrali generalizzati (o integrali impropri) di funzioni a valori non negativi. Vediamo alcuni esempi.

Esempio 1.12. Tra le principali funzioni che vengono utilizzate come modello per confronti negli integrali generalizzati ci sono le potenze ad esponente negativo. Siano $p, \alpha > 0$.

- Consideriamo la funzione $f(x) := x^{-\alpha}$ definita per $x \in]0,1]$.

$$\int_0^1 |f(x)|^p \,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 x^{-\alpha p}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha p}\left(1-\varepsilon^{1-\alpha p}\right), & \text{se } \alpha p \neq 1, \\ -\log\varepsilon, & \text{se } \alpha p = 1, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha p}, & \text{se } \alpha p < 1, \\ +\infty, & \text{se } \alpha p \geqslant 1. \end{cases}$$

Abbiamo dunque che $f \in \mathcal{L}^p(]0,1])$ se e solo se $p < \frac{1}{\alpha}$ e in tal caso

$$\|f\|_{L^p(0,1)} = (1-\alpha p)^{-1/p}.$$

- Consideriamo ora $f(x) := x^{-\alpha}$ definita per $x \in [1,+\infty[$.

$$\int_1^\infty |f(x)|^p \,\mathrm{d}x = \lim_{L\to +\infty} \int_1^L x^{-\alpha p}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha p}\left(L^{1-\alpha p}-1\right), & \text{se } \alpha p \neq 1, \\ \log L, & \text{se } \alpha p = 1, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\alpha p-1}, & \text{se } \alpha p > 1, \\ +\infty, & \text{se } \alpha p \leqslant 1. \end{cases}$$

Abbiamo dunque che $f \in \mathcal{L}^p([1,+\infty[)$ se e solo se $p > \frac{1}{\alpha}$ e in tal caso

$$\|f\|_{L^p(1,+\infty)} = (\alpha p-1)^{-1/p}.$$

Esempio 1.13. Raffiniamo leggermente l'esempio precedente introducendo anche dei fattori di tipo logaritmico. Siano $p, \alpha, \beta > 0$. Consideriamo la funzione

$$f(x) := x^{-\alpha}\,|\log x|^{-\beta},$$

definita per $x \in]0,1/2]$. Dobbiamo studiare l'integrale generalizzato

$$\int_0^{1/2} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha p}(-\log x)^{\beta p}}.$$

Quando $\alpha p < 1$, usiamo il fatto che sul dominio di integrazione $-\log x \geqslant -\log\frac{1}{2}$ e dunque

$$\frac{1}{x^{\alpha p}(-\log x)^{\beta p}} \leqslant \frac{(\log 2)^{-\beta p}}{x^{\alpha p}}, \quad \forall x \in]0,1/2];$$

siccome l'integrale della potenza a destra è convergente quando $\alpha p < 1$, per il criterio del confronto anche l'integrale della funzione a sinistra sarà convergente.

Quando $\alpha p > 1$, il termine logaritmico pur contribuendo con un infinito al denominatore non aiuta l'integrale a convergere, infatti possiamo scegliere un $\delta > 0$ in modo che si abbia $\alpha p - \delta > 1$, e utilizzare il fatto che $-\log x = o\left(x^{-\frac{\delta}{\beta p}}\right)$ per $x \to 0^+$. Per x che varia in un intorno destro di 0 avremo che

$$\frac{1}{x^{\alpha p}(-\log x)^{\beta p}} \geqslant \frac{C}{x^{\alpha p - \delta}};$$

siccome l'integrale della funzione a destra diverge (in quanto $\alpha p - \delta > 1$) avremo per confronto che anche l'integrale della funzione a sinistra diverge.

Rimane da studiare il caso $\alpha p = 1$. In questo caso, effettuiamo un cambio di variabile, $t = -\log x$, e otteniamo

$$\int_0^{1/2} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} (-\log x)^{-\frac{\beta}{\alpha}} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_{\log 2}^{\infty} t^{-\frac{\beta}{\alpha}} \,\mathrm{d}t,$$

che sappiamo essere convergente se e solo se $\frac{\beta}{\alpha} > 1$.

Riassumendo, abbiamo trovato che $f \in \mathcal{L}^p(]0,1/2])$ se e solo se $p < \frac{1}{\alpha}$ quando $\beta \leqslant \alpha$, oppure $p \leqslant \frac{1}{\alpha}$ quando $\beta > \alpha$. Avendo applicato dei confronti non possiamo quantificare in modo preciso il valore delle norme nei casi convergenti.

Combinando le funzioni studiate negli esempi precedenti possiamo costruire esempi di funzioni che appartengono a spazi $\mathcal{L}^p$ esattamente per ogni p contenuto in un intervallo prefissato.

Esempio 1.14. Per costruire una funzione che appartiene a $\mathcal{L}^p(]0,+\infty[)$ se e solo se $p \in]3,7]$, possiamo considerare una potenza del tipo $x^{-\alpha_1}$ che stia negli $\mathcal{L}^p$ di un intorno di infinito per ogni $p > 3$, dunque con $\alpha_1 = \frac{1}{3}$, e cucirla con una potenza del tipo $x^{-\alpha_2}\left|\log(x)\right|^{\beta}$ che stia negli $\mathcal{L}^p$ di un intorno di zero per ogni $p \leqslant 7$, dunque con $\alpha_2 = \frac{1}{7} < \beta$. Ecco ad esempio che una funzione come

$$f(x) := \begin{cases} x^{-\frac{1}{3}}, & \text{se } x \in]1/2,+\infty[, \\ x^{-\frac{1}{7}}(-\log x)^{-1}, & \text{se } x \in]0,\frac{1}{2}], \end{cases}$$

soddisfa le condizioni richieste.

Esempio 1.15. Determiniamo per quali $p > 0$ si ha che $f \in \mathcal{L}^p(0,+\infty)$ dove f è definita come

$$f(x) = \frac{\log(x + \mathrm{e}^x)\arctan(x) - \log(1+x^2)}{x(1+x)\arctan(\sqrt{x})\log(1+x)}, \quad x > 0. \tag{8}$$

Si tratta di una funzione continua, gli unici problemi per la convergenza dell'integrale di f^p si possono avere quando $x \to 0^+$, in quanto si annulla il denominatore, oppure quando $x \to +\infty$, in quanto si tratta di un dominio illimitato. Studiamo il comportamento asintotico di f nei due casi.

Quando $x \to 0^+$ abbiamo

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= x + o(x), & \log(1+x^2) &= x^2 + o(x^2), \\ x + \mathrm{e}^x &= 1 + 2x + o(x), & \log(x+\mathrm{e}^x) &= 2x + o(x), \\ \arctan(x) &= x + o(x), & \arctan(\sqrt{x}) &= x^{1/2} + o(x^{1/2}). \end{aligned}$$

Conbinando queste approssimazioni otteniamo che

$$\log(x+\mathrm{e}^x)\arctan(x)-\log(1+x^2)=x^2+o(x^2),$$
$$x(1+x)\arctan(\sqrt{x})\log(1+x)=x^{5/2}+o(x^{5/2}),$$

e dunque $f(x)^p \approx x^{-p/2}$ per $x\to 0^+$. Per il criterio del confronto asintotico f^p risulta essere integrabile intorno a 0^+ se e solo se $p/2<1$.

Quando $x\to+\infty$ abbiamo

$$\log(1+x)=\log(x)+o(1), \qquad \log(1+x^2)=2\log(x)+o(1),$$
$$\log(x+\mathrm{e}^x)=x+o(1),$$
$$\arctan(x)=\frac{\pi}{2}+o(1), \qquad \arctan(\sqrt{x})=\frac{\pi}{2}+o(1).$$

Conbinando queste approssimazioni otteniamo che

$$\log(x+\mathrm{e}^x)\arctan(x)-\log(1+x^2)=\frac{\pi}{2}x+o(x),$$
$$x(x+1)\arctan(\sqrt{x})\log(1+x)=\frac{\pi}{2}x^2\log(x)+o(x^2\log x),$$

e dunque $f(x)^p\approx x^{-p}(\log x)^{-p}$ per $x\to+\infty$. Per il criterio del confronto asintotico f^p risulta essere integrabile intorno a $+\infty$ se e solo se $p>1$.

Mettendo insieme i due conportamenti, vicino a 0^+ e vicino a $+\infty$ otteniamo che la funzione (8) appartiene ad $\mathcal{L}^p(0,+\infty)$ se e solo se $p\in]1,2[$.

2. Disuguaglianze di Hölder e di Minkowski

Vogliamo studiare le proprietà di integrabilità di tipo L^p per somme o prodotti di due funzioni. Cominciamo con i prodotti.

Definizione 2.1. Diciamo che la coppia (p,q), con $p,q\in]0,+\infty]$ forma una coppia di *esponenti coniugati* quando

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

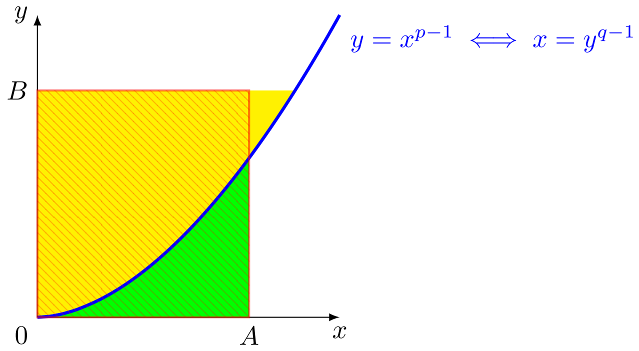
(Con la convenzione di porre $1/\infty=0$). Se p e q sono esponenti coniugati allora necessariamente $p,q\geqslant 1$, e inoltre valgono le seguenti uguaglianze

$$(p-1)(q-1)=1, \qquad p+q=pq, \qquad q(p-1)=p.$$

Quando $p\geqslant 1$ indichiamo l'*esponente coniugato* di p con $p':=\frac{p}{p-1}$ (con la convenzione che $1'=\infty$ e $\infty'=1$).

Lemma 2.2 (Disuguaglianza di Young per potenze)**.** *Sia (p,q) una coppia di esponenti coniugati con $p,q>1$. Per ogni $A,B\geqslant 0$ si ha*

$$AB\leqslant\frac{1}{p}A^p+\frac{1}{q}B^q.$$



Dimostrazione. Consideriamo la funzione $y = \phi(x) := x^{p-1}$ definita per $x \geqslant 0$, che ha come funzione inversa la funzione $x = \psi(y) := y^{\frac{1}{p-1}} = y^{q-1}$ definita per $y \geqslant 0$. Sia ϕ che ψ sono funzioni strettamente crescenti. Per ogni coppia (x, y) con $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$, abbiamo che $y \leqslant \phi(x)$ oppure $y \geqslant \phi(x)$, ma quest'ultima condizione corrisponde a $x \leqslant \psi(y)$. Dunque ogni punto (x, y) del primo quadrante appartiene al sottografico di ϕ oppure al sottografico di ψ. Quindi il rettangolo $[0, A] \times [0, B]$ è sempre contenuto nell'unione del sottografico di $\phi(x)$ sull'intervallo $[0, A]$ con il sottografico di $\psi(y)$ sull'intervallo $[0, B]$. Questo significa che l'area del rettangolo non supera mai la somma delle aree dei due sottografici, ovvero

$$AB \leqslant \int_0^A \phi(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^B \psi(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{p}A^p + \frac{1}{q}B^q. \tag{9}$$

□

Teorema 2.3. *Sia (p, q) una coppia di esponenti coniugati. Dati $f \in \mathcal{L}^p$ e $g \in \mathcal{L}^q$, abbiamo che il prodotto fg è una funzione di $\mathcal{L}^1$ e vale la seguente stima, detta* disuguaglianza di Hölder*,*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Dimostrazione. Supponiamo che $\|f\|_p$ e $\|g\|_q$ siano non nulli, in caso contrario avremmo che f è nulla quasi ovunque oppure g è nulla quasi ovunque, da cui segue che il prodotto fg è nullo quasi ovunque, e quindi con norma L^1 nulla.

Quando $p, q > 1$, utilizziamo la disuguaglianza (9) con $A = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}$ e $B = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$,

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}.$$

Integrando rispetto ad x otteniamo

$$\frac{\int |fg|\,\mathrm{d}\mu}{\|f\|_p \|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p}\frac{\int |f|^p\,\mathrm{d}\mu}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{\int |g|^q\,\mathrm{d}\mu}{\|g\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

e dunque

$$\int |fg|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Nel caso in cui $p = \infty$ e $q = 1$ ricaviamo più semplicemente

$$\int |fg|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \operatorname{ess\,sup}|f| \int |g|\,\mathrm{d}\mu = \|f\|_\infty \|g\|_1.$$

□

Corollario 2.4. *Siano $p, q, r \in]0, +\infty]$ tali che*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \tag{10}$$

Se $f \in \mathcal{L}^p$ e $g \in \mathcal{L}^q$ allora $fg \in \mathcal{L}^r$ e vale la disuguaglianza di Hölder generalizzata

$$\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q. \tag{11}$$

Dimostrazione. Osserviamo che la condizione 10 implica che $(p/r, q/r)$ è una coppia di esponenti coniugati. Poniamo

$$F(x) := |f(x)|^r, \qquad G(x) := |g(x)|^r.$$

Si verifica facilmente che $F \in \mathcal{L}^{p/r}$ e $F \in \mathcal{L}^{p/r}$ con

$$\|F\|_{p/r} = \|f\|_p^r, \qquad \|G\|_{q/r} = \|g\|_q^r.$$

Applichiamo il teorema 2.3 al prodotto FG e otteniamo

$$\int |fg|^r\,\mathrm{d}\mu = \int FG\,\mathrm{d}\mu \leqslant \|F\|_{p/r} \|G\|_{q/r} = \|f\|_p^r \|g\|_q^r,$$

da cui si ricava (11). $\square$

Iterando il risultato del corollario si può generalizzare ulteriormente la disuguglianza di Hölder al caso di prodotti di n funzioni.

Proposizione 2.5. *Date n funzioni $f_1, \dots, f_n$ e $n+1$ esponenti $p, p_1, \dots, p_n > 0$ tali che*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_j} = \frac{1}{p}, \qquad f_k \in \mathcal{L}^{p_k},\ k = 1, \dots, n,$$

per il prodotto delle n funzioni abbiamo che $\prod_{k=1}^n f_k \in \mathcal{L}^p$ e vale la stima

$$\Big\| \prod_{k=1}^{n} f_k \Big\|_p \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|f_k\|_{p_k}.$$

Dimostrazione. Per dimostrare la proposizione si può procedere per induzione su n. Il caso $n = 2$ è stato trattato nel corollario 2.4. Il passo induttivo da n a $n+1$ lo lasciamo come esercizio per il lettore. $\square$

Abbiamo visto che quando una funzione appartiene a due spazi $\mathcal{L}^p$ con esponenti diversi allora essa sta anche in tutti gli spazi con esponenti intermedi. Grazie alla disuguaglianza di Hölder possiamo descrivere in maniera quantitativa il carattere di queste inclusioni.

Proposizione 2.6. *Siano $0 < p_0 < p_1 \leqslant \infty$. Se $f \in \mathcal{L}^{p_0} \cap \mathcal{L}^{p_1}$ allora vale la seguente stima di interpolazione*

$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \|f\|_{p_1}^{\theta},$$

per ogni $p \in]p_0, p_1[$, dove $\theta \in]0, 1[$ è determinato dalla condizione

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

Dimostrazione. Basta applicare il corollario 2.4 al prodotto $|f|^{1-\theta} \cdot |f|^{\theta}$, considerando $|f|^{1-\theta} \in \mathcal{L}^{p_0/(1-\theta)}$ e $|f|^{\theta} \in \mathcal{L}^{p_1/\theta}$. Lasciamo i dettagli come esercizio per il lettore. $\square$

Quando Ω è un dominio di misura finita, gli spazi $\mathcal{L}^p(\Omega)$ sono incapsulati uno dentro l'altro.

Proposizione 2.7. *Se $\mu(\Omega) < +\infty$ e $0 < r < q \leqslant +\infty$ allora abbiamo*

$$\mathcal{L}^q(\Omega) \subset \mathcal{L}^r(\Omega),$$

e vale la stima

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leqslant \big(\mu(\Omega)\big)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(\Omega)}.$$

Dimostrazione. Applichiamo il corollario 2.4 al prodotto $1 \cdot f$, considerando $f \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ e $1 \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, dove p è definito da $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} - \frac{1}{q}$, e osservare che

$$\|1\|_{L^p(\Omega)} = \Big(\int_{\Omega} 1^p \, \mathrm{d}\mu \Big)^{\frac{1}{p}} = \big(\mu(\Omega)\big)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{q}}.$$

$\square$

Andiamo ora a considerare somme di funzioni in $\mathcal{L}^p$. Quando $p \geqslant 1$, utilizzando la disuguaglianza di Hölder possiamo dimostrare la disuguaglianza triangolare per la norma L^p; così, in questo caso, essa viene promossa da quasi-norma a semi-norma. La disuguaglinza triangolare per norme L^p viene anche chiamata disuguaglianza di Minkowski.

Teorema 2.8. *Quando $p \geqslant 1$ per ogni $f, g \in \mathcal{L}^p$ si ha*

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p .$$

Dimostrazione. Il caso $p = 1$ è immediato, per la disuguaglianza triangolare puntuale, $|f+g| \leqslant |f| + |g|$, abbiamo

$$\|f+g\|_1 = \int |f+g| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int \big(|f| + |g|\big) \,\mathrm{d}\mu = \|f\|_1 + \|g\|_1 .$$

Il caso $p > 1$ è leggermente più impegnativo. Indichiamo con $q = p' = \frac{p}{p-1}$ l'esponente coniugato di p. Abbiamo già visto che quando $f, g \in \mathcal{L}^p$ anche $f + g \in \mathcal{L}^p$ e dunque $M := \|f+g\|_p$ è una quantità finita. Possiamo supporre $M > 0$, altrimenti la stima sarebbe immediata. Cerchiamo di stimare M in modo ottimale. Indichiamo tra parentesi ciò che ci permette di arrivare al passaggio successivo:

$$\begin{aligned}
M^p &= \int |f+g|^{p-1} |f+g| \,\mathrm{d}\mu && \text{(disug. triang. puntuale)}\\
&\leqslant \int |f+g|^{p-1} \big(|f| + |g|\big) \,\mathrm{d}\mu && \text{(linearità dell'integrale)}\\
&= \int |f+g|^{p-1} |f| \,\mathrm{d}\mu + \int |f+g|^{p-1} |g| \,\mathrm{d}\mu && \text{(Hölder su ciascun integrale)}\\
&\leqslant \big\||f+g|^{p-1}\big\|_q \|f\|_p + \big\||f+g|^{p-1}\big\|_q \|g\|_p && \Big(\, (p-1)q = p,\ \frac{p}{q} = p-1 \,\Big)\\
&\leqslant \|f+g\|_p^{p-1} \big(\|f\|_p + \|g\|_p\big)\\
&= M^{p-1}\big(\|f\|_p + \|g\|_p\big).
\end{aligned}$$

Dividendo a destra e a sinistra per la quantità finita e non nulla M^{p-1} otteniamo $M \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$, che è la stima cercata. □

Quando $p \in]0,1[$ la quasi norma $\|\cdot\|_p$ non soddisfa la disuguaglianza triangolare. Si considerino, ad esempio, le funzioni caratteristiche di due intervalli $f = \chi_{[0,1]}$ e $g = \chi_{[2,3]}$. Si calcola facilmente che $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$ e $\|f+g\|_p = 2^{1/p}$. Quando $0 < p < 1$ si ha $2^{1/p} > 1 + 1$.

3. Esercizi

3.1. Norma L^p.

Esercizio 3.1. Se una funzione f appartiene ad $\mathcal{L}^p$ per ogni $p \in]0, p_0]$, cosa puoi dire del limite della norma $\|f\|_p$ per $p \to 0^+$?

Esercizio 3.2. Considera la funzione $f(x) := x^{-\alpha} |\log x|^{-\beta}$ definita per $x \in [2, +\infty[$. Determina per quali $p, \alpha, \beta > 0$ si ha che $f \in \mathcal{L}^p([2, +\infty[)$.

Esercizio 3.3. Sia $\alpha > 0$. Sia $g(x) = |f(x)|^\alpha$. Verifica che $f \in \mathcal{L}^p$ se e solo se $g \in \mathcal{L}^{p/\alpha}$ e determina il legame che intercorre tra $\|f\|_p$ e $\|g\|_{p/\alpha}$.

Esercizio 3.4. Per ogni $p > 0$, calcola il valore della norma L^p per la funzione gaussiana e^{-x^2} definita per $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3.5. Determina per quali valori reali di α e β si ha che la funzione

$$f(x) := \frac{\sin x}{|x^2 - 1|^\alpha \, |x|^\beta}$$

appartiene a $L^2(\mathbb{R})$.

Esercizio 3.6. Considera la funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\log(1+x)}}$.

- Determina per quali $p > 0$ si ha che $f \in \mathcal{L}^p(]0,1])$.
- Determina per quali $p > 0$ si ha che $f \in \mathcal{L}^p([1,+\infty[)$.

Esercizio 3.7. Determina per quali $p > 0$ si ha che la funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+|\log x|)}$ appartiene a $\mathcal{L}^p(]0,+\infty[)$.

Esercizio 3.8. Lo spazio $\mathcal{L}^p$ non è un'algebra (rispetto al prodotto puntuale). Per ogi $p > 0$ fornisci esempi di funzioni f e g tali che $f, g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, ma con $fg \notin \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$.

Esercizio 3.9. Costruisci un esempio di una funzione $f(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ che non sia infinitesima per $x \to \infty$.

Esercizio 3.10. Sia $0 < p < \infty$. Dimostra che se $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ ed esiste il limite $\ell := \lim_{x\to+\infty} f(x)$ allora $\ell = 0$.

Esercizio 3.11. Data una funzione misurabile $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ indichiamo con $I(f)$ l'insieme degli esponenti $p \in]0,+\infty]$ tali che $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. Fornisci esempi espliciti di funzioni f per cui si abbia che $I(f)$ coincida con i seguenti intervalli:

(1) $I(f) =]0,+\infty]$;
(2) $I(f) =]0,+\infty[$;
(3) $I(f) =]0,3[$;
(4) $I(f) =]3,+\infty]$;
(5) $I(f) =]1/2,3[$;
(6) $I(f) = [1/2,3[$;
(7) $I(f) =]1/2,3]$;
(8) $I(f) = [1/2,3]$;
(9) $I(f) = \{3\}$.

3.2. **Disuguaglianze di Hölder e di Minkowski.**

Esercizio 3.12. Completa la dimostrazione della proposizione 2.5.

Esercizio 3.13. Completa la dimostrazione della proposizione 2.6.

3.3. **Spazi di successioni ℓ^p.** Tutto quanto visto in questa lezione si può applicare anche al caso in cui $\Omega = \mathbb{N}$ e la misura $\mu = \sharp$ è la *misura del contare*, per la quale $\sharp(A)$ è la cardinalità di A, quando A è un sottoinsieme finito di $\mathbb{N}$, oppure $\sharp(A) = \infty$, quando A è un sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$. In questo caso le funzioni non sono altro che successioni numeriche e l'integrale diventa la sommatoria di una serie. Gli spazi $\mathcal{L}^p$ che si ottengono saranno spazi vettoriali di successioni che indicheremo con ℓ^p. Più precisamente, per ogni $p > 0$ definiamo

$$\ell^p := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\colon \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\},$$

con quasi-norma data da

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p := \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \Big)^{1/p}. \tag{12}$$

Definiamo anche

$$\ell^\infty := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\colon \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\},$$

con norma data da

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

Esercizio 3.14. Sia $p > 0$. Verifica che ℓ^p è uno spazio vettoriale e che $\|\cdot\|_p$ è una quasi norma.

Esercizio 3.15. Siano $0 < p < q \leqslant \infty$. Verifica che $\ell^p \subset \ell^q$ e che
$$\|(x_n)_n\|_q \leqslant \|(x_n)_n\|_p .$$

Esercizio 3.16. Dimostra la disuguaglianza di Hölder per successioni: sia (p, q) una coppia di esponenti coniugati, se $(x_n)_n \in \ell^p$ e $(y_n)_n \in \ell^q$ allora $(x_n y_n)_n \in \ell^1$ e vale
$$\sum_n |x_n y_n| \leqslant \|(x_n)_n\|_p \|(y_n)_n\|_q .$$

Esercizio 3.17. Dimostra che quando $p \geqslant 1$, la norma $\|\cdot\|_p$ descritta in (12) verifica tutte le proprietà richieste ad un norma.