ANALISI 3 - L21: FUNZIONI TEST E DISTRIBUZIONI

Quando si vuole studiare il comportamento di una funzione risulta molto utile avere informazioni sulle sue proprietà di regolarità (come ad esempio continuità o differenziabilità), e sulle sue proprietà di integrabilità (ad esempio sapere a quali spazi L^p appartiene), Purtroppo non tutte le funzioni sono continue o derivabili e non tutte le funzioni sono integrabili. La teoria delle distribuzioni offre una generalizzazione del concetto di funzione creando un contesto in cui ogni funzione "generalizzata" risulta essere in un certo senso sempre derivabile e integrabile. L'idea di base è che per conoscere e identificare una funzione f possiamo operare per *dualità*. Invece di guardare ai valori $f(x)$ che essa assume puntualmente, possiamo considerare i valori che si ottengono tramite integrali del tipo $\int f\phi$, al variare di ϕ in una famiglia $\mathcal{D}$ di funzioni test che siano sufficientemente regolari e con le quali sia possibile approssimare funzioni non regolari. L'applicazione lineare $\phi \mapsto \int f\phi$ permette di identificare la funzione f come un elemento dello spazio duale dell'insieme delle funzioni test. Questo spazio duale in genere risulta essere un insieme più ampio dell'insieme delle funzioni "ordinarie". Chiameremo *distribuzioni*, o funzioni *generalizzate*, gli elementi del duale topologico $\mathcal{D}'$, ovvero i funzionali lineari e continui su $\mathcal{D}$. La continuità ci serve per poter definire limiti e approssimazioni, e quindi sarà importante chiarire quale nozione di convergenza utilizzare sia nello spazio delle funzioni test $\mathcal{D}$ che nello spazio delle distribuzioni $\mathcal{D}'$. La cosa interessante è che gran parte delle operazioni che si possono effettuare sulle funzioni test, grazie alla relazione di dualità possono essere fatte corrispondere ad analoghe operazioni sulle funzioni generalizzate nello spazio duale. Vedremo allora che nel contesto delle distribuzioni ogni funzione risulta derivabile e ogni funzione risulta integrabile. Ciò rende la teoria delle distribuzioni un'ambiente ideale per studiare equazioni differenziali.

1. Funzioni test

1.1. **Funzioni localmente integrabili.** Lo spazio $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ delle funzioni localmente integrabili, ovvero delle funzioni che sono integrabili su ogni sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}$, è uno spazio di funzioni abbastanza ricco: contiene tutte le funzioni continue e tutte le funzioni di classe L^p per ogni $p \geqslant 1$. Ad ogni funzione $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ possiamo associare un funzionale lineare T_f,

$$\phi \mapsto T_f(\phi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

definito per ogni funzione test $\phi \in \mathbb{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ liscia e a supporto compatto.

Nelle precedenti lezioni (vedi lemma 2.1 della lezione 13), abbiamo già dimostrato il seguente lemma:

Lemma 1.1. *Sia $]a,b[$ un qualsiasi intervallo aperto contenuto in $\mathbb{R}$. Sia f una funzione localmente integrabile su $]a,b[$. Se per ogni funzione liscia a supporto compatto in $]a,b[$ si ha $\int f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = 0$ allora la funzione f è nulla quasi ovunque in $]a,b[$.*

Date: ultimo aggiornamento, 21 dicembre 2020.

Applicando il lemma sull'intervallo $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ otteniamo che se T_f è identicamente nullo su $C_c^\infty(\mathbb{R})$ allora f è la funzione nulla in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Ne segue che l'applicazione che ad ogni funzione f associa il funzionale lineare T_f è una applicazione iniettiva dallo spazio $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ allo spazio dei funzionali lineari su $C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Proposizione 1.2. *Siano $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Se $\int f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \int g(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x$ per ogni $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ allora $f(x) = g(x)$ quasi ovunque.*

Dimostrazione. Basta osservare che dalle ipotesi segue che $0 = T_f - T_g = T_{f-g}$ e dunque per il lemma 1.1 risulta che la differenza $f - g$ è nulla quasi ovunque. □

Conoscere tutti i valori dei test integrali $\int f\phi$ al variare di ϕ nell'insieme delle funzioni lisce a supporto compatto ci permette di fatto di conoscere tutto della funzione f. Inoltre tramite l'applicazione iniettiva $f \mapsto T_f$ possiamo immergere lo spazio L^1_{loc} nel duale di C_c^∞ e identificando f con il funzionale T_f. Il seguente esempio mostra come questa immersione non è suriettiva.

Esempio 1.3. Non tutti i funzionali lineari su C_c^∞ sono della forma T_f per qualche $f \in L^1_{\text{loc}}$. Consideriamo il funzionale lineare $\delta(\phi) := \phi(0)$ che ad ogni funzione test associa il suo valore in 0. Se esistesse una funzione $f \in L^1_{\text{loc}}$ tale che $\delta = T_f$ avremmo

$$\int f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \phi(0),$$

per ogni $\phi \in C_c^\infty$. Se consideriamo solo funzioni test con supporto contenuto in $]0, +\infty[$, esse saranno tutte nulle nell'origine e dunque

$$\int_0^{+\infty} f(x)\phi(x) = 0, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(]0, +\infty[).$$

Per il lemma 1.1 segue che f deve essere nulla (quasi ovunque) su $]0, +\infty[$. Analogamente, considerando funzioni test con supporto contnuto in $]-\infty, 0[$ troviamo che f deve essere nulla (quasi ovunque) anche su $]-\infty, 0[$. Dunque f deve essere nulla quasi ovunque su $\mathbb{R}$. Ma questo significa che il corrispondente funzionale T_f è il funzionale identicamente nullo, mentre δ non è identicamente nullo, in quanto esistono funzioni test che non si annullano nell'origine.

Lo spazio duale algebrico dei funzionali lineari definiti sullo spazio delle funzioni test è un insieme molto abbondante. Per poter operare con i funzionali lineari con strumenti adeguati all'analisi, ci serve anche una nozione di continuità che ci permetta di calcolare limiti e costruire approssimazioni. Andremo allora a considerare lo spazio più ristretto dei funzionali lineari e continui definiti sullo spazio delle funzioni test, il cosidetto duale topologico. Prima però dobbiamo definire quale struttura topologica vogliamo considerare sullo spazio delle funzioni test C_c^∞.

1.2. **Lo spazio $\mathcal{D}$.** Invece di descrivere la topologia su C_c^∞ definendo la famiglia dei suoi sottoinsiemi aperti, o le famiglie degli intorni dei suoi elementi, risulta più semplice dare una descrizione della *nozione di convergenza* per una successione di elementi. Questo sarà sufficiente per studiare limiti successioni di funzioni test, definire la nozione di continuità (sequenziale) per funzionali lineari, e in generale a dare un senso a problemi di approssimazione.

Definizione 1.4. Definiamo lo spazio $\mathcal{D}$ delle *funzioni test* come lo spazio vettoriale $C_c^\infty(\mathbb{R})$ delle funzioni lisce a supporto compatto in $\mathbb{R}$ dotato della seguente nozione di convergenza: diremo che la successione $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni test, $\phi_n \in \mathcal{D}$, converge alla funzione test $\phi_\star$ quando esiste un compatto K di $\mathbb{R}$ tale che tutte le funzioni ϕ_n hanno supporto contenuto in K e per ogni $j \in \mathbb{N}_0$ la successione di derivate $(\partial^j \phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente su $\mathbb{R}$ alla derivata $\partial^j \phi_\star$ per $n \to \infty$,

$$\partial^j \phi_n \underset{n}{\rightrightarrows} \partial^j \phi_\star,$$

ovvero

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in\mathbb{R}} \left|\partial^j \phi_n(x) - \partial^j \phi_\star(x)\right| = 0.$$

Vediamo alcuni esempi di successioni di funzioni test che convergono o non convergono in $\mathcal{D}$.

Esempio 1.5. Sia $\phi \in \mathcal{D}$ una funzione test non identicamente nulla e sia K il suo supporto compatto. Consideriamo la successione definita dai riscalamenti

$$\phi_n(x) := \frac{1}{n}\phi\Big(\frac{x}{n}\Big), \quad n \in \mathbb{N},\, x \in \mathbb{R}.$$

Siccome $|\phi_n(x)| \leqslant \frac{1}{n} \max|\phi|$, tale successione converge uniformemente alla funzione nulla, $\phi_n \rightrightarrows 0$, ed anche per le derivate abbiamo

$$\partial^j \phi_n(x) = \frac{1}{n^{1+j}} \partial^j \phi\Big(\frac{x}{n}\Big) \rightrightarrows 0.$$

Malgrado ciò la successione non può essere considerata convergente in $\mathcal{D}$ in quanto i supporti tendono ad allargarsi,

$$\operatorname{supp} \phi_n = nK,$$

e dunque non sono tutti contenuti in un unico compatto.

Esempio 1.6. Sia $\phi \in \mathcal{D}$ una funzione test non identicamente nulla e supponiamo che il suo supporto sia contenuto nell'intervallo compatto $[-L, L]$. Consideriamo la successione definita dai riscalamenti

$$\phi_n(x) := \frac{1}{n}\phi(nx), \quad n \in \mathbb{N},\, x \in \mathbb{R}.$$

Siccome $|\phi_n(x)| \leqslant \frac{1}{n} \max|\phi|$, tale successione converge uniformemente alla funzione nulla, $\phi_n \rightrightarrows 0$. Inoltre i supporti sono tutti contenuti nell'intervallo $[-L, L]$,

$$\operatorname{supp} \phi_n \subseteq \Big[-\frac{L}{n}, \frac{L}{n}\Big] \subseteq [-L, L].$$

Malgrado ciò la successione non può essere considerata convergente in $\mathcal{D}$ in quanto non abbiamo convergenza uniforme per le derivate, anzi per $j > 1$ abbiamo

$$\max_x \left|\partial^j \phi_n(x)\right| = n^{j-1} \max\left|\partial^j \phi\right| \to +\infty.$$

Esempio 1.7. Sia $\phi \in \mathcal{D}$ una funzione test non identicamente nulla e supponiamo che il suo supporto sia contenuto nell'intervallo compatto $[-L, L]$. Consideriamo la successione definita dai riscalamenti

$$\phi_n(x) := \frac{1}{2^n}\phi(nx), \quad n \in \mathbb{N},\, x \in \mathbb{R}.$$

Siccome $|\phi_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n} \max|\phi|$, tale successione converge uniformemente alla funzione nulla, $\phi_n \rightrightarrows 0$. Inoltre, come nell'esempio precedente i supporti sono tutti contenuti nell'intervallo $[-L, L]$,

$$\operatorname{supp} \phi_n \subseteq \Big[-\frac{L}{n}, \frac{L}{n}\Big] \subseteq [-L, L].$$

Questa volta la crescita esponenziale del fattore al denominatore permette di controllare i fattori potenza generati della derivate,

$$\max_x \left|\partial^j \phi_n(x)\right| = \frac{n^j}{2^n} \max\left|\partial^j \phi\right| \rightrightarrows 0.$$

Dunque questa volta possiamo dire che la successione (ϕ_n) converge alla funzione nulla in $\mathcal{D}$.

Assicuriamoci che i funzionali lineari $T_f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ definiti in (1) risultino continui rispetto alla nozione di convergenza definita su $\mathcal{D}$.

Proposizione 1.8. *Per ogni $f \in L^1_{loc}$ il corrispondente funzionale T_f è sequenzialmente continuo su $\mathcal{D}$, ovvero se la successione di funzioni test $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\phi_\star$ in $\mathcal{D}$ allora la successione $\big(T_f(\phi_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $T(\phi_\star)$ in $\mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Se $(\phi_n)_n$ converge a $\phi_\star$ in $\mathcal{D}$ allora esiste un compatto K che contiene tutti i supporti delle funzioni test ϕ_n, ed inoltre $\phi_n \rightrightarrows \phi_\star$. Dunque,

$$\begin{aligned}|T(\phi_n) - T(\phi_\star)| = |T(\phi_n - \phi_\star)| \leqslant \int_K |f(x)| \cdot |\phi_n(x) - \phi_\star(x)| \,\mathrm{d}x \leqslant \\ \leqslant \|f\|_{L^1(K)} \max |\phi_n - \phi_\star| \to 0.\end{aligned}$$

□

Osservazione 1.9. È importante osservare che lo spazio $\mathcal{D}$ è chiuso rispetto all'operazione di derivazione: la derivata di una funzione liscia a supporto compatto è ancora una funzione liscia a supporto compatto. Inoltre, l'operatore di derivazione è sequenzialmente continuo: se $(\phi_n)_n$ è una successione di funzioni test convergente a $\phi_\star$ in $\mathcal{D}$ allora la successione delle derivate $(\phi_n')_n$ è una successione di funzioni test convergente alla derivata $\phi_\star'$ in $\mathcal{D}$. Ciò segue immediatamente dal fatto che il supporto di ϕ_n' è contenuto nel supporto di ϕ_n, e che le derivate $\partial^j \phi_n'$ coincidono con le derivate $\partial^{j+1}\phi_n$.

Osservazione 1.10. Lasciamo al lettore il facile esercizio di verificare che risultano (sequenzialmente) continui anche i seguenti operatori lineari che agiscono su $\mathcal{D}$:

- per ogni $p \in \mathbb{R}$, l'operatore di traslazione che alla funzione test $\phi(x)$ associa la funzione traslata $\phi(x+p)$;
- per ogni $\lambda > 0$, l'operatore di riscalamento che alla funzione test $\phi(x)$ associa la funzione riscalata $\phi(\lambda x)$;
- per ogni funzione liscia $\phi \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$, l'operatore di moltiplicazione che alla funzione test $\phi(x)$ associa il prodotto $\psi(x)\phi(x)$;
- l'operatore di rovesciamento che alla funzione test $\phi(x)$ associa la funzione rovesciata $\phi(-x)$;
- l'operatore di derivazione che alla funzione test $\phi(x)$ associa la derivata $\phi'(x)$.

2. Spazio delle distribuzioni

Definizione 2.1. Definiamo lo spazio $\mathcal{D}'$ delle *distribuzioni* come lo spazio vettoriale dei funzionali lineari e (sequenzialmente) continui su $\mathcal{D}$. Ovvero, una distribuzione è descritta da un'applicazione $T : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ tale che:

- per ogni $\phi, \psi \in \mathcal{D}$ e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ abbiamo
$$T(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha T(\phi) + \beta T(\psi);$$
- per ogni successione di funzioni test $(\phi_n)_n$ convergente a zero[1] in $\mathcal{D}$ si ha che la successione $\big(T(\phi_n)\big)_n$ converge a zero in $\mathbb{C}$.

[1]Sappiamo che per funzionali lineari la continuità in qualsiasi punto equivale alla continuità in zero.

Inoltre, data una distribuzione $T \in \mathcal{D}'$ e una funzione test $\phi \in \mathcal{D}$, adotteremo per la relazione di dualità la seguente notazione[2]:

$$\langle T, \phi \rangle := T(\phi).$$

La proposizione 1.8 implica che i funzionali lineari T_f definiti in (1) definiscono delle distribuzioni. Questo significa possiamo identificare ogni funzione localmente integrabile f con una distribuzione, ponendo

$$\langle f, \phi \rangle := T_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}.$$

Il fatto che per funzioni localmente integrabili si possa scrivere l'azione della distribuzione associata tramite integrale giustifica l'abuso di notazione spesso utilizzato per indicare la relazione di dualità tra distribuzioni e funzioni test tramite l'utilizzo del simbolo di integrazione,

$$\int T(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x := \langle T, \phi \rangle.$$

Esempio 2.2. Il funzionale lineare $\delta\colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}$, già definito nell'esempio 1.3 ponendo $\delta(\phi) = \phi(0)$ è una distribuzione. La continuità segue dal fatto che la convergenza uniforme di una successione di funzioni test implica la convergenza puntuale in 0. Tale distribuzione è detta delta di Dirac concentrata nell'origine. Più in generale per ogni punto $p \in \mathbb{R}$, la distribuzione *delta di Dirac* concentrata nel punto p è la distribuzione δ_p definita da

$$\langle \delta_p, \phi \rangle := \phi(p).$$

Per quanto discusso nell'esempio 1.3, le distribuzioni di Dirac non corrispondono a nessuna funzione localmente integrabile, ma con abuso di notazione possiamo scrivere

$$\int \delta_p(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \phi(p),$$

e l'interpretazione che possiamo dare a questa formula è quella di pensare (alla maniera dei fisici) a δ_p come fosse una "funzione" che concentra una massa unitaria nel solo punto p e che si annulla in tutti gli altri punti.

Sappiamo che per un operatore lineare tra spazi normati la nozione di continuità è equivalente a una stima di limitatezza per la norma dell'operatore. La nozione di convergenza definita sullo spazio $\mathcal{D}$ non è compatibile con nessuna norma, ma può essere messa in relazione con una famiglia di seminorme su $\mathcal{D}$: per ogni K compatto e per ogni $m \in \mathbb{N}_0$ definiamo la seminorma $p_{K,m}$ su $\mathcal{D}$ ponendo

$$p_{K,m}(\phi) := \max_{\substack{x\in\mathbb{K} \\ 0\leqslant j\leqslant m}} \left|\partial^j \phi(x)\right|. \tag{2}$$

La proprietà di continuità sequenziale per un funzionale lineare su $\mathcal{D}$ risulta essere equivalente ad una famiglia di stime operatoriali descritte tramite queste seminorme.

Teorema 2.3. *Sia $T\colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ un funzionale lineare. le seguenti proposizioni sono tra loro equivalenti:*

(A) *T è sequenzialmente continuo.*
(B) *Per ogni compatto K di $\mathbb{R}$, esistono un indice $m \in \mathbb{N}_0$ e una costante $C \geqslant 0$ tali che per ogni funzione test $\phi \in \mathcal{D}$ con supporto contenuto in K si ha che*

$$|\langle T, \phi \rangle| \leqslant C\, p_{K,m}(\phi) = \max_{\substack{x\in\mathbb{K} \\ 0\leqslant j\leqslant m}} \left|\partial^j \phi(x)\right|.$$

[2]Per non confonderci con la notazione del prodotto scalare scriveremo esplicitamente $\langle f, g \rangle_H$ quando ci riferiamo al prodotto interno di un qualche spazio di Hilbert H.

Dimostrazione. Il fatto che (B) implica (A) segue immediatamente dal fatto che se $(\phi_n)_n$ converge a zero in $\mathcal{D}$ allora per ogni seminorma abbiamo che la successione $(p_{K,m}(\phi_n))_n$ converge a zero.

Per provare che (A) implica (B) facciamo vedere che se (B) è falsa allora anche (A) è falsa. Negare (B) equivale a dire che esiste un compatto K per il quale per ogni $m \in \mathbb{N}_0$ e ogni costante $C \geqslant 0$ esiste una funzione test $\phi \in \mathcal{D}$ con supporto contenuto in K per la quale vale

$$|\langle T, \phi \rangle| > C\, p_{K,m}(\phi).$$

Questo significa che scegliendo $C = m$, possiamo scegliere una successione $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ di funzioni test con supporto in K per le quali vale

$$|\langle T, \phi_m \rangle| > m \cdot p_{K,m}(\phi_m).$$

Definiamo una nuova successione di funzioni test $(\psi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ponendo

$$\psi_m(x) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{p_{K,m}(\phi_m)} \cdot \phi_m(x).$$

Quando $m \geqslant j$ abbiamo che

$$\sup_{x\in K} \left|\partial^j \psi_m(x)\right| \leqslant \frac{1}{m} \cdot \frac{\sup \left|\partial^j \phi_m\right|}{p_{K,m}(\phi_m)} \leqslant \frac{1}{m},$$

e dunque $(\psi_m)_m$ converge a zero in $\mathcal{D}$ per $m \to \infty$. Mentre invece

$$|\langle T, \psi_m \rangle| = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{p_{K,m}(\phi_m)} \cdot |\langle T, \phi_m \rangle| > 1,$$

e quindi la successione $(\langle T, \psi_m \rangle)_m$ non può convergere a zero. Ciò significa che T non può essere sequenzialmente continuo in zero. □

Dunque le distribuzioni coincidono con i funzionali lineari per i quali vale la condizione (B) del teorema.

Definizione 2.4. Quando l'indice m che compare nella condizione (B) del teorema 2.3 può essere scelto in modo indipendente dalla scelta del compatto K allora diremo che la distribuzione T ha *ordine* minore o uguale a m. Diremo che la distribuzione T ha ordine esattamente uguale a m quando T ha ordine minore o uguale a m, ma non ha ordine minore o uguale a $m-1$. Diremo che T ha ordine infinito quando non è possibile scegliere un indice m indipendente dal compatto K.

Ad esempio, le funzioni localmente integrabili possono essere considerate come distribuzioni di ordine 0. Infatti, data $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ e $\phi \in \mathcal{D}$ con supporto in K abbiamo

$$|\langle f, \phi \rangle| \lesssim \int_K |f(x)| \cdot |\phi(x)| \; dx \leqslant \|f\|_{L^1(K)}\, p_{K,0}(\phi).$$

Anche la delta di Dirac è una distribuzione di ordine zero, in quanto

$$|\langle \delta, \phi \rangle| = |\phi(0)| = p_{\{0\},0}(\phi).$$

Esempio 2.5 (Valore principale di $1/x$)**.** La funzione $\frac{1}{x}$ non è integrabile negli intorni dell'origine, dunque non è una funzioe localmente integrabile. È comunque integrabile fuori da intorni dell'origine. Per ogni $\phi \in \mathcal{D}$ e ogni $\varepsilon > 0$, integrando per parti abbiamo

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{x}\phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\phi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x}\phi(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= [\log|x|\,\phi(x)]_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \log|x|\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x + [\log|x|\,\phi(x)]_{\varepsilon}^{+\infty} - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \log|x|\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= (\log\varepsilon)\big(\phi(-\varepsilon) - \phi(\varepsilon)\big) - \int_{|x|>\varepsilon} \log|x|\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Utilizzando l'approssimazione

$$\phi(x) = \phi(0) + \phi'(0)x + o(x), \quad \text{per } x \to 0,$$

nel limite $\varepsilon \to 0^+$ otteniamo che

$$(\log\varepsilon)\big(\phi(-\varepsilon) - \phi(\varepsilon)\big) = (\log\varepsilon)\big(-2\phi'(0)\varepsilon + o(\varepsilon)\big) \to 0.$$

Essendo $\log|x| \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ abbiamo che

$$\int_{|x|>\varepsilon} \log|x|\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}} \log|x|\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dunque ricaviamo che

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{x}\phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \log|x|\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \langle \log|x|\,, \phi'\rangle.$$

Tale limite definisce una distribuzione di ordine minore o uguale a 1, in quanto se ϕ ha supporto in K abbiamo

$$|\langle \log|x|\,, \phi'\rangle| \leqslant \big\|\log|x|\big\|_{L^1(K)} p_{K,0}(\phi') \leqslant \big\|\log|x|\big\|_{L^1(K)} p_{K,1}(\phi).$$

Tale distribuzione è detta *valore principale di* $\frac{1}{x}$ e la indichiamo con p.v.$\frac{1}{x}$,

$$\langle \text{p.v.}\frac{1}{x}, \phi\rangle := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{x}\phi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Verifichiamo che si tratta di una distribuzione di ordine esattamente 1 facendo vedere che non può essere di ordine minore o uguale a 0. Per ogni $\lambda \in]0,1[$ consideriamo una funzione test $\psi_\lambda \in \mathcal{D}$ tale che

- $\psi_\lambda(x) = 0$ per $x \leqslant \frac{1}{2}\lambda$ oppure $x \geqslant 2$;
- $\psi_\lambda(x) = 1$ per $\lambda \leqslant x \leqslant 1$;
- $0 \leqslant \psi_\lambda(x) \leqslant 1$ per ogni x.

Siccome ψ_λ si annulla in un intorno dell'origine, e sul suo supporto abbiamo $\frac{1}{x}\psi_\lambda(x) \geqslant 0$, ricaviamo che

$$\langle \text{p.v.}\frac{1}{x}, \psi_\lambda\rangle = \int_{\frac{1}{2}\lambda}^{+\infty} \frac{1}{x}\psi_\lambda(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{\lambda}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log\frac{1}{\lambda},$$

mentre

$$p_{[0,2],0}(\psi_\lambda) = \max_{[0,2]} \psi_\lambda = 1.$$

Se p.v.$\frac{1}{x}$ avesse ordine minore o uguale a 0 dovrebbe esistere una costante $C \geqslant 0$ tale che

$$\log\frac{1}{\lambda} \leqslant \langle \text{p.v.}\frac{1}{x}, \psi_\lambda\rangle \leqslant C p_{[0,2],0}(\psi_\lambda) = C,$$

ma facendo tendere $\lambda \to 0^+$ si vede che ciò non è possibile in quanto il logaritmo non è limitato.

3. Esercizi

3.1. **Funzioni test.**

Esercizio 3.1. Dimostra che se $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni test che converge a $\phi_\star$ in $\mathcal{D}$ allora tale successione converge a $\phi_\star$ anche in norma L^p per ogni $p \in [1,\infty]$.

Esercizio 3.2. Verifica che gli operatori descritti nell'osservazione 1.10 trasformano funzioni test in funzioni test e sono sequenzialmente continui rispetto alla nozione di convergenza definita su $\mathcal{D}$.

Esercizio 3.3. Dimostra che per ogni compatto K e ogni $m \in \mathbb{N}_0$, la funziona $p_{K,m}$ definita in (2) definisce una seminorma su $\mathcal{D}$.

3.2. **Distribuzioni.**

Esercizio 3.4. Quali tra i seguenti funzionali $T_j \colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ definiscono delle distribuzioni?

$$T_1(\phi) := \int_{-1}^{1} \phi(2x)\,\mathrm{d}x, \qquad T_2(\phi) := \int_{-1}^{1} \phi''(x^2)\,\mathrm{d}x,$$

$$T_3(\phi) := \int_{-1}^{1} \big(\phi(x)\big)^2\,\mathrm{d}x, \qquad T_4(\phi) := \int_{-1}^{1} \sin\Big(\frac{1}{x}\Big)\phi'(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$T_5(\phi) := \int_{-1}^{1} \sin(\phi(x))\,\mathrm{d}x, \qquad T_6(\phi) := \int_{-1}^{1} \frac{\phi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Esercizio 3.5. Dato $k \in \mathbb{N}$ verifica che

$$\langle T, \phi\rangle := \partial^k \phi(0), \quad \forall \phi \in \mathcal{D},$$

definisce una distribuzione $T \in \mathcal{D}'$ di ordine k.

Esercizio 3.6. Verifica che

$$\langle T, \phi\rangle := \sum_{k=0}^{\infty} \partial^k \phi(k), \quad \forall \phi \in \mathcal{D},$$

definisce una distribuzione $T \in \mathcal{D}'$ di ordine infinito.

Esercizio 3.7. Per ogni $r > 0$, considera il funzionale lineare T_r definito da

$$\langle T_r, \phi\rangle := \int_{|x|<r} \frac{\phi(x)-\phi(0)}{|x|}\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\geqslant r} \frac{\phi(x)}{|x|}\,\mathrm{d}x, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}.$$

- Verifica che $T_r \in \mathcal{D}'$.
- Determina l'ordine di T_r.
- Verifica che per ogni $r, s > 0$ la differenza $T_r - T_s$ è un multiplo della distribuzione delta di Dirac.