ANALISI 3 - L08:
CONVOLUZIONI

In questa lezione introduciamo un'operazione tra funzioni detta prodotto di convoluzione che consiste nell'associare ad una coppia di funzioni f e g definite su $\mathbb{R}^d$ una nuova funzione $f * g$ definita su $\mathbb{R}^d$ tramite l'integrale

$$(f * g)(x) = \int f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Vedremo nella prossima lezione come questa operazione di convoluzione ci permetterà di ottenere approssimazioni di funzioni L^p con funzioni di classe C^∞. L'integrale che definisce la convoluzione non è detto che sia sempre ben definito; ci interesserà allora determinare alcune condizioni sufficienti per la sua buona positura, e in particolare cercheremo di capire a quale classe L^p appartiene $f * g$ in relazione alle classi L^p di appartenza di f e g. Dovendo studiare norme L^p, che significa calcolare integrali, di funzioni definite tramite integrali, ci troveremo in situazioni dove compariranno integrali multipli e in alcuni casi ci tornerà comodo effettuare uno scambio nell'ordine di integrazione. Ripassiamo dunque i teoremi di Tonelli e di Fubini che ci indicano quando è lecito scambiare l'ordine di integrazione.

1. Scambio dell'ordine di integrazione

Partiamo con un esempio per capire come non sia sempre permesso scambiare l'ordine di integrazione in un integrale multiplo.

Esempio 1.1. Consideriamo la funzione $f(x,y) := \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ per $(x,y) \in]0,1]\times]0,1]$ e calcoliamo i seguenti due integrali, che differiscono tra loro solo per l'ordine di integrazione,

$$A := \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y, \quad B := \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Osserviamo che

$$f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right),$$

e quindi per il teorema fondamentale del calcolo abbiamo

$$\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{x^2+y^2}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{1+y^2}, \quad \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y = \left[\frac{-y}{x^2+y^2}\right]_{y=0}^{y=1} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Integrando ulteriormente troviamo

$$A = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = [\arctan y]_{y=0}^{y=1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4},$$
$$B = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = -[\arctan x]_{x=0}^{x=1} = -\arctan 1 = -\frac{\pi}{4}.$$

In questo caso cambiando l'ordine di integrazione si ottengono due valori differenti.

Osserviamo anche che la funzione $f(x,y)$ non è una funzione di classe L^1 sul quadrato $Q :=]0,1]\times]0,1]$. Infatti abbiamo che $|f(x,y)| = f(x,y)$ per $0 < x \leqslant y \leqslant 1$,

Date: ultimo aggiornamento, 1 febbraio 2021.

e $|f(x,y)| = -f(x,y)$ per $0 < y \leqslant x \leqslant 1$; sfruttando i calcoli fatti prima troviamo che

$$\begin{aligned}\iint_Q |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \Big(\int_0^y f(x,y)\,\mathrm{d}x - \int_y^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \Big(\frac{y}{y^2+y^2} - \frac{0}{0^2+y^2} - \frac{1}{1^2+y^2} + \frac{y}{y^2+y^2}\Big)\,\mathrm{d}y = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \Big(\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y^2}\Big)\,\mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big(-\log\varepsilon - \frac{\pi}{4} + \arctan\varepsilon\Big) = +\infty.\end{aligned}$$

Il fatto che i valori degli integrali A e B siano differenti è proprio collegato alla mancanza di integrabilità di $|f|$.

Supponiamo che Ω sia un insieme misurabile (rispetto alla misura di Lebesgue) in $\mathbb{R}^d$ e che Γ sia un insieme misurabile (rispetto alla misura di Lebesgue) in $\mathbb{R}^k$. Il prodotto cartesiano $\Omega\times\Gamma$ è un insieme misurabile in $\mathbb{R}^{d+k}$. Sia f una funzione misurabile definita su $\Omega\times\Gamma$, che indicheremo con $f(x,y)$ sottointendendo che $x\in\Omega$ e $y\in\Gamma$. Ci chiediamo sotto quali condizioni i seguenti tre integrali siano ben definiti, e sotto quali ipotesi i loro valori coincidano

$$\begin{aligned}I_0(f) &:= \iint_{\Omega\times\Gamma} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\\ I_1(f) &:= \int_\Gamma\Big(\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y,\\ I_2(f) &:= \int_\Omega\Big(\int_\Gamma f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

La risposta ci è data dai teoremi di Tonelli e di Fubini.

Teorema 1.2 (Tonelli). *Se $f\colon\Omega\times\Gamma\to[0,+\infty]$ è una funzione misurabile a valori non negativi allora i tre integrali coincidono $I_0(f) = I_1(f) = I_2(f)$ (nel senso che o convergono tutti allo stesso valore finito, o sono tutti e tre divergenti).*

Teorema 1.3 (Fubini). *Se $f\colon\Omega\times\Gamma\to\mathbb{C}$ è una funzione misurabile tale che gli integrali $I_j(|f|)$ abbiano valore finito per $j=0,1,2$ (basta verificare che uno di essi sia finito, essendo $|f|$ una funzione misurabile a valori non negativi il teorema di Tonelli ci garantisce che questi tre valori coincidono), allora sono finiti anche gli integrali $I_j(f)$ per $j=0,1,2$, e i loro valori coincidono $I_0(f) = I_1(f) = I_2(f)$.*

In sintesi Tonelli ci dice che è indifferente l'ordine di integrazione quando $f\geqslant 0$, mentre Fubini ci dice che è indifferente l'ordine di integrazione quando $f\in L^1(\Omega\times\Gamma)$. Nel caso della funzione dell'esempio 1.1 nessuna delle due ipotesi è verificata.

Il teorema di Tonelli e il teorema di Fubini sono validi non solo per la misura di Lebesgue, ma continuano a valere anche nel caso di misure astratte, purché siano σ-finite (ovvero quando lo spazio su cui sono definite è unione numerabile di insiemi di misura finita).

2. Disuguaglianza integrale di Minkowski

Per una funzione integrabile, il modulo di un integrale è minore o uguale dell'integrale del modulo,

$$\Big|\int_\Gamma f(y)\,\mathrm{d}y\Big| \leqslant \int_\Gamma |f(y)|\,\mathrm{d}y. \tag{1}$$

Per somme di funzioni di classe L^p, per la disuguaglianza triangolare abbiamo che la norma di una somma è minore della somma delle norme,

$$\Big\|\sum_{j=1}^{n} f_j\Big\|_p \leqslant \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_p .$$

Una formula analoga vale anche quando al posto della sommatoria sostituiamo un integrale.

Teorema 2.1 (Disuguaglianza integrale di Minkowski)**.** *Sia $f\colon \Omega\times\Gamma\to\mathbb{C}$ una funzione misurabile. Sia $p\in[1,+\infty]$. Supponiamo che la funzione $y\mapsto \|f(x,y)\|_{L^p(\Omega,\,\mathrm{d}x)}$ sia integrabile su Γ. Allora per quasi ogni $x\in\Omega$ la funzione $y\mapsto f(x,y)$ è integrabile su Γ, ed inoltre abbiamo che*

$$\Big\|\int_\Gamma f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big\|_{L^p(\Omega,\,\mathrm{d}x)} \leqslant \int_\Gamma \|f(x,y)\|_{L^p(\Omega,\,\mathrm{d}x)}\,\mathrm{d}y. \tag{2}$$

Possiamo dimostrare il teorema utilizzando il metodo di dualità per stimare la norma L^p dell'integrale.

Osservazione 2.2 (Metodo di dualità per stime L^p). Ricordiamo, come abbiamo visto nella lezione 6, che vale la seguente caratterizzazione della norma L^p: se p' è l'esponente coniugato di p allora

$$\|f\|_p = \sup_{g\neq 0}\frac{\left|\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right|}{\|g\|_{p'}}.$$

Questo significa che per ottenere la disuguaglianza $\|f\|_p\leqslant C$ è sufficiente provare che vale la seguente stima per l'operatore di dualità

$$\left|\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant C\,\|g\|_{p'}\,,\quad \forall g\in L^{p'}.$$

Dimostrazione del teorema 2.1. Sia $G\colon\Omega\to[0,\infty]$ la funzione

$$G(x) := \int_\Gamma |f(x,y)|\,\mathrm{d}y,$$

definita per ogni $x\in\Omega$ a valori in $[0,+\infty]$. Vogliamo stimare la norma L^p di G tramite il metodo di dualità. Sia p' l'esponente coniugato di p e sia $H\in L^{p'}(\Omega)$; Applicando Tonelli abbiamo

$$\left|\int_\Omega G(x)H(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_\Omega\int_\Gamma |f(x,y)|\,\mathrm{d}y\,|H(x)|\,\mathrm{d}x = \int_\Gamma\Big(\int_\Omega |f(x,y)|\,|H(x)|\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y.$$

Possiamo poi applicare la disuguaglianza di Hölder nell'integrale interno

$$\int_\Omega |f(x,y)|\,|H(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \|f(\cdot,y)\|_{L^p(\Omega)}\,\|H\|_{L^{p'}(\Omega)}\,,$$

ottenendo così

$$\left|\int_\Omega G(x)H(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_\Gamma \|f(\cdot,y)\|_{L^p(\Omega)}\,\mathrm{d}y\cdot\|H\|_{L^{p'}(\Omega)}\,.$$

Per dualità, come spiegato nell'osservazione 2.2, ciò implica che

$$\|G\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \int_\Gamma \|f(\cdot,y)\|_{L^p(\Omega)}\,\mathrm{d}y.$$

In particolare abbiamo che G è una funzione con valori finiti quasi ovunque, dunque la funzione $y\mapsto f(x,y)$ è integrabile quasi ovunque, e la disuguaglianza di Minkowski (2) si ottiene per monotonia dell'integrale, osservando che $\left|\int_\Gamma f(x,y)\,\mathrm{d}y\right|\leqslant G(x)$ per quasi ogni $x\in\Omega$. □

3. Prodotto di convoluzione

Definizione 3.1. Siano $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ due funzioni misurabili. Dato $x \in \mathbb{R}^d$, se la funzione $y \mapsto f(x-y)g(y)$ è integrabile su $\mathbb{R}^d$ definiamo il prodotto di convoluzione di f e g nel punto x come il valore dell'integrale

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Osservazione 3.2. Osserviamo che, quando è definito, il prodotto di convoluzione è commutativo, $f * g = g * f$, infatti con il cambio di variabile $y \mapsto z = x - y$ abbiamo $\mathrm{d}y = \mathrm{d}z$ e

$$\int f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int f(z)g(x-z)\,\mathrm{d}z = \int g(x-z)f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Osservazione 3.3. Indichiamo con $\tau_h(x) = x + h$ la traslazione di passo h, e con $f_R(x) := f(-x)$ la funzione "rovesciata" ottenuta cambiando segno alla variabile indipendente. Abbiamo che

$$f(x-y) = (f_R \circ \tau_{-x})(y) = (f \circ \tau_x)_R(y),$$

e dunque possiamo anche scrivere

$$(f * g)(x) = \int (f_R \circ \tau_x)(y) \cdot g(y)\,\mathrm{d}y. \tag{3}$$

Osservazione 3.4. Traslando una delle due funzioni si trasla il prodotto di convoluzione, $(f \circ \tau_h) * g = (f * g) \circ \tau_h$, infatti

$$\begin{aligned}\big((f \circ \tau_h) * g\big)(x) &= \int f((x-y)+h)g(y)\,\mathrm{d}y = \\ &= \int f((x+h)-y)g(y)\,\mathrm{d}y = (f*g)(x+h) = \big((f*g)\circ\tau_h\big)(x).\end{aligned}$$

Osservazione 3.5. Dalle proprietà di linearità dell'integrale segue che il prodotto di convoluzione è lineare rispetto a ciascuno dei suo argomenti,

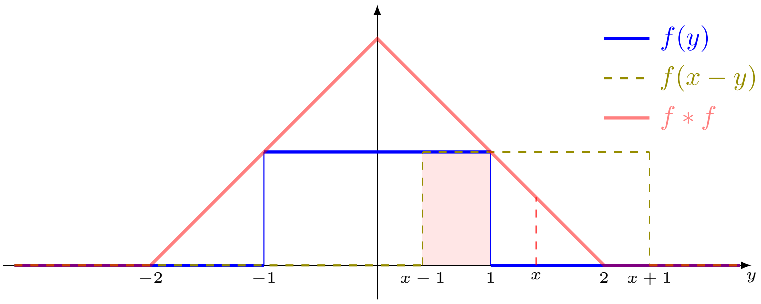
$$\begin{aligned}(f_1 + f_2) * g &= (f_1 * g) + (f_2 * g), &\qquad (\lambda f) * g &= \lambda(f * g),\\ f * (g_1 + g_2) &= (f * g_1) + (f * g_2), & f * (\lambda g) &= \lambda(f * g),\end{aligned}$$

per ogni scalare $\lambda \in \mathbb{C}$ e per ogni scelta di funzioni per cui le convoluzioni sono definite.

3.1. **Esempi di convoluzioni.**

Esempio 3.6. Se consideriamo $f(x) := \chi_{[-1,1]}(x)$, la funzione caratteristica dell'intervallo $[-1,1]$ in $\mathbb{R}$, allora la convoluzione $f * f$ è sempre ben definita e abbiamo

$$\begin{aligned}\left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right)(x) &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-1,1]}(x-y)\chi_{[-1,1]}(y)\,\mathrm{d}y = \\ &= \mu\big([x-1, x+1] \cap [-1,1]\big) = (2 - |x|)_+.\end{aligned}$$



Esempio 3.7. Consideriamo la funzione gaussiana $f(x) := \mathrm{e}^{-x^2}$. Calcoliamo $f * f$,

$$(f * f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-y)^2} \mathrm{e}^{-y^2} \, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2+2xy-2y^2} \, \mathrm{d}y.$$

Osserviamo che $-2y^2 + 2xy = -2\left(y - \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{x^2}{2}$, e dunque con il cambio di variabile $t = \sqrt{2}\left(y - \frac{x}{2}\right)$ otteniamo

$$(f * f)(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\left(y-\frac{x}{2}\right)^2} \, \mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$

che è ancora una funzione di tipo gaussiano.

Esempio 3.8. Consideriamo le funzioni

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x \leqslant 0, \end{cases} \qquad g(x) := f(-x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \geqslant 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-x}}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Calcoliamo la convoluzione $f * f$. Quando $x \leqslant 0$ abbiamo $(f * f)(x) = 0$, infatti per ogni $y \in \mathbb{R}$ le quantità $x - y$ e y non sono mai entrambe positive e dunque la quantità $f(x-y)f(y)$ è sempre nulla. Quando $x > 0$ utilizzando il cambio di variabile $t \mapsto y = \frac{1}{2}x(1+t)$ dentro l'integrale,

$$(f * f)(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \, \mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \pi.$$

Dunque la convoluzione $f * f$ coincide quasi ovunque con la funzione πH, dove $H = \chi_{[0,+\infty[}$ è la funzione *gradino* di Heaviside.

Per la convoluzione $g * f$ abbiamo invece che per ogni $x \in \mathbb{R}$ l'integrale diverge,

$$(g * f)(x) = \int_{\max\{0,x\}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{y-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \, \mathrm{d}y = +\infty,$$

in quanto la funzione integranda è asintoticamente equivalente a $1/y$ per $y \to +\infty$ e dunque non integrabile.

Esempio 3.9. Sia $r > 0$. Indichiamo con M_r l'operatore lineare che ad ogni funzione f, definita su $\mathbb{R}^d$ e localmente integrabile (ovvero integrabile su ogni compatto), associa la funzione $M_r(f)$ il cui valore nel punto x coincide con il valore medio di f nella palla di centro x e raggio r,

$$M_r(f)(x) := \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y) \, \mathrm{d}y.$$

La funzione caratteristica della palla $B(x,r)$ non è altro che una traslazione della funzione caratteristica della palla con centro nell'origine $B(0,r)$,

$$\chi_{B(x,r)}(y) = \chi_{B(0,r)}(y-x) = \chi_{B(0,r)}(x-y),$$

e la traslazione non cambia il volume delle palle. Abbiamo allora che

$$M_r(f)(x) := \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{B(x,r)}(y) f(y) \, \mathrm{d}y = \frac{1}{\mu(B(0,r))} \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{B(0,r)}(x-y) f(y) \, \mathrm{d}y,$$

ovvero l'operatore di calcolo delle medie mobili M_r si puo scrivere in forma di convoluzione,

$$M_r(f) = K_r * f, \qquad K_r(x) = \frac{1}{\mu(B(0,r))} \chi_{B(0,r)}(x).$$

4. Stime L^p per convoluzioni

Quando f e g sono funzioni continue e una delle due ha supporto compatto, allora per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ la funzione $y \mapsto f(x-y)g(y)$ è una funzione continua a supporto compatto, quindi integrabile su $\mathbb{R}^d$, e dunque $f * g$ è ben definita in ogni punto. Quando f e g stanno in qualche classe L^p non è più garantito che l'integrale che definisce la convoluzione $f * g$ sia convergente (vedi l'esempio 3.8). Vediamo alcune condizioni sufficienti che ci garantiscono che la convoluzione sia ben definita come funzione almeno quasi ovunque.

Lo spazio L^1 è chiuso rispetto all'operazione di convoluzione.

Proposizione 4.1. *Quando $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ allora la convoluzione $f * g$ è definita quasi ovunque, inoltre $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e vale la stima*

$$\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1 .$$

Dimostrazione. Usando il teorema di Tonelli e il cambio di variabile $x \mapsto z = x - y$ abbiamo che

$$\begin{aligned}\int \Big(\int |f(x-y)g(y)| \, \mathrm{d}y \Big) \, \mathrm{d}x &= \int \Big(\int |f(x-y)| \, |g(y)| \, \mathrm{d}x \Big) \, \mathrm{d}y = \\ &= \int \Big(\int |f(z)| \, |g(y)| \, \mathrm{d}z \Big) \, \mathrm{d}y = \int |f(z)| \, \mathrm{d}z \int |g(y)| \, \mathrm{d}y = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty.\end{aligned}$$

Dunque l'integrale $\int |f(x-y)g(y)| \, \mathrm{d}y$ ha un valore finito per quasi ogni x, e quindi l'integrale $\int f(x-y)g(y) \, \mathrm{d}y$ è definito per quasi ogni x. Inoltre

$$\begin{aligned}\|f * g\|_1 &= \int \Big| \int f(x-y)g(y) \, \mathrm{d}y \Big| \, \mathrm{d}x \leqslant \\ &\leqslant \int \Big(\int |f(x-y)g(y)| \, \mathrm{d}y \Big) \, \mathrm{d}x = \|f\|_1 \|g\|_1 .\end{aligned}$$

□

Convoluzioni di funzioni in spazi L^p coniugati producono funzioni continue e limitate.

Proposizione 4.2. *Siano p e q due esponenti coniugati, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Allora per ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ abbiamo che $f * g$ è una funzione limitata e continua su tutto $\mathbb{R}^d$ e vale la stima*

$$\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \|g\|_q . \tag{4}$$

Inoltre quando $p, q > 1$ si ha che $\lim_{|x| \to \infty} (f * g)(x) = 0$.

Dimostrazione. La stima (4), e dunque la limitatezza della convoluzione, è una conseguenza immediata della disuguaglianza di Hölder,

$$\big|(f * g)(x)\big| \leqslant \int |(f_R \circ \tau_x)(y)| \, |g(y)| \, \mathrm{d}y \leqslant \|f_R \circ \tau_x\|_p \|g\|_q = \|f\|_p \|g\|_q .$$

Per verificare la continuità consideriamo la differenza tra i valori della convoluzione in due punti vicini, per linearità abbiamo

$$(f * g)(x+h) - (f * g)(x) = \big((f \circ \tau_h) * g\big)(x) - (f * g)(x) = \big((f \circ \tau_h - f) * g\big)(x),$$

Applicando la stima precedente troviamo che

$$|(f * g)(x+h) - (f * g)(x)| \leqslant \|f \circ \tau_h - f\|_p \|g\|_q .$$

La continuità di $f * g$ nel punto x segue dal fatto che, come abbiamo visto nella lezione precedente, le norme L^p con $1 \leqslant p < \infty$ sono continue rispetto alle traslazioni, ovvero $\lim_{h \to 0} \|f \circ \tau_h - f\|_p = 0$; nel caso in cui $p = \infty$, e dunque $q = 1$, utilizziamo il fatto che il prodotto di convoluzione è commutativo e scambiamo il ruolo di f e g applicando la continuità della norma L^1 rispetto alle traslazioni di g, ovvero $\lim_{h\to 0} \|g \circ \tau_h - g\|_1 = 0$.

Il fatto che $(f * g)(x)$ sia infinitesimo per $|x| \to \infty$ nei casi in cui $p, q > 1$ può essere dimostrato facendo vedere prima che quando f e g sono funzioni continue a supporto compatto la convoluzione $f * g$ ha supporto compatto, e poi per il caso generale procedendo per approssimazioni utilizzando la densità delle funzioni continue a supporto compatto in L^p (cosa che abbiamo dimostrato nelle lezioni precedenti). Lasciamo i dettagli come esercizio. □

Proposizione 4.3. *Quando $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $p \in [1, +\infty]$, la convoluzione $f * g$ è definita quasi ovunque, inoltre $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ e vale la stima*

$$\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p .$$

Dimostrazione. Il caso $p = 1$ corrisponde alla proposizione 4.1; il caso $p = \infty$ è incluso nella proposizione 4.2, in quanto ∞ è l'esponente coniugato di 1. Quando $1 < p < \infty$ abbiamo che $L^p \subset L^1 + L^\infty$, nel senso che ogni funzione $g \in L^p$ può essere decomposta come somma di una funzione L^1 e di una funzione L^∞, ad esempio $g = g_1 + g_\infty$ dove $g_1 \in L^1$ e $g_\infty \in L^\infty$ sono definite da

$$g_1(x) := \begin{cases} g(x), & \text{se } |g(x)| > 1, \\ 0, & \text{se } |g(x)| \leqslant 1, \end{cases} \qquad g_\infty(x) := \begin{cases} 0, & \text{se } |g(x)| > 1, \\ g(x), & \text{se } |g(x)| \leqslant 1. \end{cases} \tag{5}$$

Per linearità, abbiamo che $f * g = f * g_1 + f * g_\infty$ è definita quasi ovunque in quanto la convoluzione $f * g_1$ è definita quasi ovunque per la proposizione 4.1 e la convoluzione $f * g_\infty$ è definita e continua ovunque per la proposizione 4.2. Per quanto riguarda la stima della norma, utilizziamo la disuguaglianza di Minkowski (2), e il fatto che le norme L^p su $\mathbb{R}^d$ sono invarianti per traslazioni,

$$\begin{aligned} \|f * g\|_p &= \left\| \int f(y) g(x-y)\, \mathrm{d}y \right\|_{L^p_x} \leqslant \int \left\| f(y)(g \circ \tau_{-y})(x) \right\|_{L^p_x} \mathrm{d}y = \\ &= \int |f(y)| \, \|g \circ \tau_{-y}\|_p \, \mathrm{d}y = \int |f(y)| \, \mathrm{d}y \, \|g\|_p = \|f\|_1 \|g\|_p . \end{aligned}$$

□

Tutti i casi visti finora sono compresi e generalizzati nelle stime di Young per convoluzioni descritte dal seguente teorema.

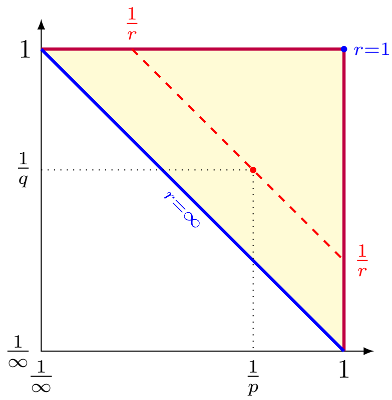
Teorema 4.4 (Young)**.** *Siano $p, q, r \in [1, +\infty]$ tali che*

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Quando $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ la convoluzione $f * g$ è definita quasi ovunque, inoltre $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ e vale la stima

$$\|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q . \tag{6}$$

Osservazione 4.5. Rappresentiamo nel piano cartesiano i punti $(1/p, 1/q)$, al variare di $p, q \in [1, \infty]$ tali punti descrivono il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ nel primo quadrante.



La proposizione 4.1 corrisponde al caso $p = q = r = 1$ rappresentato dal punto $(1, 1)$. La proposizione 4.2 corrisponde al caso $r = \infty$ con p e q coniugati rappresentato dal segmento che congiunge i punti $(0, 1)$ e $(1, 0)$. La proposizione 4.3 corrisponde al caso $p = 1$ e $r = q$, rappresentato dal segmento verticale che congiunge i punti $(1, 0)$ e $(1, 1)$, e per la proprietà commutativa anche al caso $q = 1$ e $r = p$, rappresentato dal segmento orizzontale che congiunge i punti $(0, 1)$ e $(1, 1)$. Il teorema 4.4 ci dice che la convoluzione $f * g$ è ben definita (quasi ovunque) anche in tutti i casi corrispondenti ai punti interni del triangolo con vertici $(0, 1)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$.

Dimostrazione del teorema 4.4. Indichiamo con p' l'esponente coniugato di p. I casi estremi corrispondenti a $p = 1$, o $q = 1$, o $q = p'$, sono stati trattati nelle proposizioni precedenti. Nel caso in cui $1 < q < p' < \infty$, abbiamo che $L^q \subset L^1 + L^{p'}$, nel senso che la funzione $g \in L^q$ può essere decomposta come somma di una funzione L^1 e di una funzione $L^{p'}$, ad esempio $g = g_1 + g_\infty$, dove $g_1 \in L^1$ e $g_\infty \in L^{p'}$ possono essere definite come in (5). Il fatto che $f * g = f * g_1 + f * g_\infty$ sia definita quasi ovunque segue dal fatto che la convoluzione $f * g_1$ è definita quasi ovunque per la proposizione 4.1 e la convoluzione $f * g_\infty$ è definita e continua ovunque per la proposizione 4.2.

Procedendo per dualità la stima (6) risulta essere equivalente alla seguente disuguaglianza

$$\left| \int (f * g)(x) h(x) \, \mathrm{d}x \right| \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q \, \|h\|_s \,, \quad \forall f \in L^p, g \in L^q, h \in L^s,$$

dove $s = r'$ è l'esponente coniugato di r. Osserviamo inoltre che la condizione $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ equivale a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{s} = 2$. Siccome $|f * g| \leqslant |f| * |g|$ e $\|f\|_p = \big\||f|\big\|_p$ non è restrittivo assumere che f, g e h siano funzioni a valori non negativi, possiamo così alleggerire la scrittura evitando di mettere i valori assoluti. Supponiamo quindi che $f, g, h \geqslant 0$; dobbiamo dimostrare che

$$\iint f(x - y) g(y) h(x) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q \, \|h\|_s \,,$$

quando

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{s} = 2. \tag{7}$$

Poniamo

$$\begin{aligned} F(x, y) &:= g(y)^{q/p'} h(x)^{s/p'}, \\ G(x, y) &:= f(x - y)^{p/q'} h(x)^{s/q'}, \\ H(x, y) &:= f(x - y)^{p/s'} g(y)^{q/s'}. \end{aligned}$$

Per la condizione (7) abbiamo che

$$\frac{p}{q'} + \frac{p}{s'} = \frac{q}{p'} + \frac{q}{s'} = \frac{s}{p'} + \frac{s}{q'} = 1,$$

e dunque $F(x,y)G(x,y)H(x,y) = f(x-y)g(y)h(x)$. Siccome $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} + \frac{1}{s'} = 1$, possiamo applicare la disuguaglianza di Hölder generalizzata e ottenere

$$\iint F(x,y)G(x,y)H(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \|F\|_{p'}\,\|G\|_{q'}\,\|H\|_{s'}\,.$$

Per concludere basta osservare che

$$\|F\|_{p'} = \Big(\iint g(y)^q h(x)^s\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{p'}} = \Big(\int g(y)^q\,\mathrm{d}y\cdot\int h(x)^s\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p'}} = \|g\|_q^{\frac{q}{p'}}\,\|h\|_s^{\frac{s}{p'}}\,,$$

$$\|G\|_{q'} = \Big(\iint f(x-y)^p h(x)^s\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{q'}} = \Big(\int f(z)^p\,\mathrm{d}z\cdot\int h(x)^s\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q'}} = \|f\|_p^{\frac{p}{q'}}\,\|h\|_s^{\frac{s}{q'}}\,,$$

$$\|H\|_{s'} = \Big(\iint f(x-y)^p g(y)^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{s'}} = \Big(\int f(z)^p\,\mathrm{d}z\cdot\int g(y)^q\,\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{s'}} = \|f\|_p^{\frac{p}{s'}}\,\|g\|_q^{\frac{q}{s'}}\,.$$

□

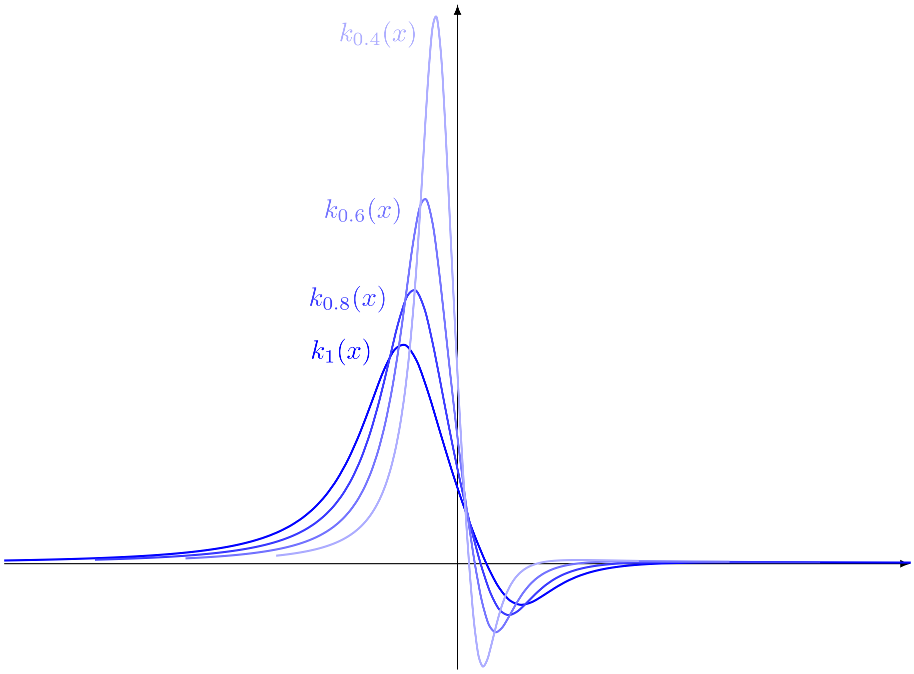
4.1. **Approssimazioni dell'identità.** Data un funzione $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$, indichiamo con $(k_t)_{t>0}$ la famiglia di riscalamenti della funzione k definiti da

$$k_t(x) := t^{-d}k\Big(\frac{x}{t}\Big), \quad \forall t>0, x\in\mathbb{R}^d.$$

In questo modo, per ogni $t>0$ abbiamo che

$$\int k_t(x)\,\mathrm{d}x = \int k\Big(\frac{x}{t}\Big)\frac{\mathrm{d}x}{t^d} = \int k(y)\,\mathrm{d}y,$$

in quanto con il cambio di variabile $y \mapsto x = ty$ l'elemento di volume è dato da $\mathrm{d}y = t^d\,\mathrm{d}x$. Analogamente $\|k_t\|_1 = \|k\|_1$. Quando $t\to 0^+$ le funzioni riscalate k_t conservano la loro massa facendola "concentrare" sempre di più intorno all'origine.



Il seguente teorema ci dice che tramite convoluzioni con nuclei L^1 riscalati possiamo approssimare qualsiasi funzione di L^p. Vedremo nella prossima lezione che è possibile scegliere questi nuclei in modo che la convoluzione abbia buone proprietà di regolarità e ciò ci permetterà di approssimare funzioni L^p con funzioni molto regolari.

Teorema 4.6. *Sia $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$ tale che $\int k(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Per ogni $t > 0$ consideriamo il nucleo riscalato $k_t(x) := t^{-d}k\left(\frac{x}{t}\right)$. Sia $1 \leqslant p < \infty$. Data $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, quando $t \to 0^+$ la convoluzione $k_t * f$ converge alla funzione f in norma L^p .*

Dimostrazione. Siccome $\int k_t(x)\,\mathrm{d}x = \int k(x)\,\mathrm{d}x = 1$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}(k_t * f)(x) - f(x) &= \int k_t(y) f(x-y)\,\mathrm{d}y - \int k_t(y)\,\mathrm{d}y\, f(x) = \\ &= \int k_t(y)\big(f(x-y) - f(x)\big)\,\mathrm{d}y = \int k(z)\big(f(x-tz) - f(x)\big)\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Applicando la disuguaglianza integrale di Minkowksi otteniamo

$$\|(k_t * f) - f\|_p \leqslant \int |k(z)| \left\|f \circ \tau_{(-tz)} - f\right\|_p \mathrm{d}z.$$

Per la proprietà di continuità della norma L^p rispetto alle traslazioni, per ogni z abbiamo che

$$\lim_{t\to 0^+} |k(z)| \left\|f \circ \tau_{(-tz)} - f\right\|_p = 0;$$

inoltre, per la disuguaglianza triangolare e l'invarianza delle norme L^p rispetto alle traslazioni, vale la stima

$$|k(z)| \left\|f \circ \tau_{(-tz)} - f\right\|_p \leqslant |k(z)| \left(\left\|f \circ \tau_{(-tz)}\right\|_p + \|f\|_p\right) = 2\,\|f\|_p\,|k(z)|\,,$$

la quantità a destra, essendo $k \in L^1$, è integrabile e non dipende da t. Possiamo allora applicare il teorema della convergenza dominata di Lebesgue e concludere che

$$\lim_{t\to 0^+} \int |k(z)| \left\|f \circ \tau_{(-tz)} - f\right\|_p \mathrm{d}z = 0,$$

e quindi anche $\|(k_t * f) - f\|_p$ tende a zero. □

5. Esercizi

5.1. Disuguaglianza integrale di Minkowski.

Esercizio 5.1. Nel caso di una funzione a valori reali la disuguaglianza (1) (con $|\cdot|$ che indica il valore assoluto di una quantità reale) è una conseguenza immediata delle proprietà di monotonia dell'integrale, in quanto da $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ segue che $-\int |f| \leqslant \int f \leqslant \int |f|$. Dimostra che (1) vale anche nel caso di una funzione a valori complessi (con $|\cdot|$ che indica il modulo di una quantità complessa).

Esercizio 5.2. Dimostra i casi $p = \infty$ e $p = 1$ della disuguaglianza integrale di Minkowski (teorema 2.1).

5.2. Prodotto di convoluzione.

Esercizio 5.3. Consideriamo convoluzioni di funzioni caratteristiche di intervalli.

(1) Descrivi come è fatto il grafico della convoluzione $\chi_{[a,+\infty[} * \chi_{[c,+\infty]}$ di due funzioni caratteristiche di due intervalli illimitati a destra.
(2) Descrivi come è fatto il grafico della convoluzione $\chi_{[a,b]} * \chi_{[c,+\infty]}$ delle funzioni caratteristiche di un intervallo limitato e di un intervallo illimitato a destra.
(3) Descrivi come è fatto il grafico della convoluzione $\chi_{[a,b]} * \chi_{[c,d]}$ di due funzioni caratteristiche di due intervalli limitati.

Esercizio 5.4. Per ogni $\mu \in \mathbb{R}$ e $\lambda > 0$ considera la funzione gaussiana

$$\gamma_{\mu,\lambda}(x) = \mathrm{e}^{-\lambda(x-\mu)^2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Verifica che la convoluzione di due gaussiane è un multiplo di una gaussiana,

$$\gamma_{\mu_1,\lambda_1} * \gamma_{\mu_2,\lambda_2} = C\gamma_{\mu_3,\lambda_3},$$

e determina delle formule per calcolare C, μ_3, λ_3 in funzione di $\mu_1, \lambda_1, \mu_2, \lambda_2$.

Esercizio 5.5. Calcola la convoluzione $f * g$ per le seguenti coppie di funzioni

(1) $f(x) = (1 - |x|)_+$, $g(x) = \chi_{[1,2]}(x)$;
(2) $f(x) = g(x) = (1 - |x|)_+$;
(3) $f(x) = g(x) = \mathrm{e}^{-x}\chi_{[0,+\infty[}(x)$;
(4) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\chi_{[0,+\infty[}(x)$, $g(x) = \mathrm{e}^{x}\chi_{]-\infty,0]}(x)$;
(5) $f(x) = g(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$;
(6) $f(x) = x\chi_{[0,+\infty[}(x)$, $g(x) = \sin(x)\chi_{[0,+\infty[}(x)$.

Esercizio 5.6. Sia $H(x) = \chi_{[0,+\infty[}(x)$ la funzione gradino di Heaviside. Definiamo la successione di funzioni $(E_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ in modo ricorsivo ponendo $E_1 = H$ e $E_{n+1} = H * E_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

- Calcola esplicitamente $E_n(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ogni $x \in \mathbb{R}$.
- Calcola il limite $\lim_{n\to\infty} E_n(x)$.
- Determina la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} E_n(x)$

Esercizio 5.7. Dimostra che dalla convoluzione tra un polinomio e una funzione continua a supporto compatto si ottiene ancora un polinomio.

5.3. **Stime L^p per convoluzioni.**

Esercizio 5.8. Verifica che il prodotto di convoluzione definisce su $L^1(\mathbb{R}^d)$ un'operazione $*\colon L^1 \times L^1 \to L^1$ che è associativa e commutativa, ma che non possiede elemento neutro. *[Per far vedere che non esiste elemento neutro, supponi per assurdo che esista e valuta cosa succede alle sue convoluzioni con le funzioni caratteristiche delle palle $B(0,n)$ e delle regioni $B(0,n) \setminus B(0,1/n)$ al tendere di $n \to \infty$.]*

Esercizio 5.9. Dimostra che quando $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, dove p e q sono esponenti coniugati con $p, q > 1$, allora la convoluzione $f*g$ è infinitesima all'infinito, ovvero $\lim_{|x|\to\infty}(f * g)(x) = 0$.

Esercizio 5.10. Per ogni coppia di esponenti $p, q \in [1, +\infty]$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$ fornisci un esempio di funzioni $f \in L^p(\mathbb{R})$ e $g \in L^q(\mathbb{R})$ tali che la convoluzione non sia definita in alcun punto. *[Puoi ispirarti alle funzioni utilizzate nell'esempio 3.8.]*

Esercizio 5.11. Siano $p \in [1, \infty[$, $\alpha, \beta > 0$. Considera l'operatore lineare

$$Tf(x) := \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{|x-y|^{\alpha}\,|1-x+y|^{\beta}}\,\mathrm{d}y$$

Determina dei valori di α e β per i quali si abbia che:

- $T\colon L^p \to L^p$ è continuo;
- $T\colon L^p \to L^\infty$ è continuo;
- $T\colon L^p \to L^{2p}$ è continuo.

Esercizio 5.12. Sia $p \in [1, \infty[$, $\alpha > 0$. Considera l'operatore lineare

$$Tf(x) := \int_0^{\infty} \frac{\sin(y)\log(y)}{y^{\alpha}} f(x-y)\,\mathrm{d}y$$

Determina dei valori di α per i quali si abbia che:

- $T\colon L^p \to L^{p+1}$ è continuo;
- $T\colon L^3 \to L^2$ è continuo.