ANALISI 3 - L02:
SPAZI NORMATI DI DIMENSIONE FINITA E INFINITA

Nella precedente lezione abbiamo visto come l'introduzione di una norma su uno spazio vettoriale determina una struttura metrica e topologica. In questa lezione discutiamo alcune fondamentali differenze tra il caso di spazi di dimensione finita e il caso di spazi di dimensione infinita. Già nella precedente lezione abbiamo visto un esempio di uno spazio di dimensione infinita su cui era possibile definire due norme non equivalenti, e dunque con diversa topologia. In dimensione finita risulta invece che tutte le norme su uno stesso spazio sono equivalenti tra loro e dunque tutte inducono la stessa topologia.

1. Spazi di dimensione finita

Tutti gli spazi vettoriali di dimensione finita d definiti su un campo $\mathbb{K}$ sono algebricamente isomorfi allo spazio modello $\mathbb{K}^d$. Cerchiamo di capire allora cosa succede quando confrontiamo tra loro norme diverse definite su $\mathbb{K}^d$. Vediamo il caso reale, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, e lasciamo come esercizio di verificare che gli stessi risultati valgono anche per il caso complesso, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, con piccole e naturali modifiche ai passaggi nella dimostrazione.

Proposizione 1.1. *Sia $d \in \mathbb{N}$. Tutte le norme su $\mathbb{R}^d$ sono equivalenti alla norma euclidea.*

Essendo l'equivalenza tra norme una relazione di equivalenza, per la proprietà transitiva, dalla proposizione otteniamo immediatamente il seguente corollario.

Corollario 1.2. *Tutte le norme su $\mathbb{R}^d$ sono equivalenti tra loro.*

Indichiamo la norma euclidea di un vettore $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ con

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^{d} x_j^2},$$

e ricordiamo la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per il prodotto scalare su $\mathbb{R}^d$,

$$\sum_{j=1}^{d} x_j y_j \leqslant \|x\|_2 \, \|y\|_2 \,, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d. \tag{1}$$

Dimostrazione della proposizione 1.1. Sia $\|\cdot\|_\star$ una norma su $\mathbb{R}^d$. Siano $e_1, \dots, e_d$ i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^d$. Possiamo scrivere ogni vettore $x \in \mathbb{R}^d$ come combinazione lineare dei vettori della base canonica usando le coordinate come coefficienti $x = \sum_{j=1}^{d} x_j e_j$. Applicando la disuguaglianza triangolare e la proprietà di omogeneità per la norma $\star$ e poi la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (1), otteniamo

$$\|x\|_\star \leqslant \sum_{j=1}^{d} \|x_j e_j\|_\star \leqslant \sum_{j=1}^{d} |x_j| \, \|e_j\|_\star \leqslant \|x\|_2 \sqrt{\sum_{j=1}^{d} \|e_j\|_\star^2}.$$

Dunque se poniamo $A := \sqrt{\sum_{j=1}^{d} \|e_j\|_\star^2}$ otteniamo che $\|x\|_\star \leqslant A \, \|x\|_2$ per ogni vettore x; ovvero la norma euclidea domina la norma $\star$.

Date: ultimo aggiornamento, 1 ottobre 2020.

Per provare il viceversa, Consideriamo la funzione $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f(x) := \|x\|_\star$. Per la disuguaglianza triangolare rovesciata per la norma $\star$ abbiamo che

$$|f(x) - f(y)| = \big|\|x\|_\star - \|y\|_\star\big| \leqslant \|x-y\|_\star \leqslant A\,\|x-y\|_2\,, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d,$$

ciò prova che f è lipschitziana e quindi continua. La sfera unitaria euclidea

$$U = \big\{u \in \mathbb{R}^d\colon\ \|u\|_2 = 1\big\}$$

è un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^d$ rispetto alla topologia euclidea; per il teorema di Heine-Borel ne segue che U è un compatto. Per il teorema di Weierstrass, la funzione continua f possiede un punto di minimo sul compatto U, e dunque esiste un punto $u_\star \in U$ tale che

$$\min_{u\in U} \|u\|_\star = \min_{u\in U} f(u) = f(u_\star) = \|u_\star\|_\star\,.$$

Tale valore minimo $B := \|u_\star\|_\star > 0$ è strettamente positivo in quanto $u_\star$ è un vettore non nullo, essendo $\|u_\star\|_2 = 1$. Per ogni x non nullo abbiamo che $\frac{1}{\|x\|_2}x \in U$ e dunque

$$\|x\|_\star = \|x\|_2 \left\|\frac{1}{\|x\|_2}x\right\|_\star \geqslant \|x\|_2\,B.$$

Dunque $\|x\|_2 \leqslant \frac{1}{B}\|x\|_\star$ per ogni vettore x; ovvero la norma $\star$ domina la norma euclidea. $\square$

Sia ora $(V, \|\cdot\|_V)$ uno spazio normato reale di dimensione finita e sia $B = \{b_1, \ldots, b_d\}$ una base algebrica per V. Sappiamo che ogni vettore $v \in V$ si può scrivere in modo unico come combinazione lineare dei vettori di B,

$$v = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j b_j,$$

con $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$. L'applicazione $\phi\colon \mathbb{R}^d \to V$ che a λ fa corrispondere il vettore

$$\phi(\lambda) := \sum_j \lambda_j b_j \tag{2}$$

è un isomorfismo lineare tra gli spazi vettoriali $\mathbb{R}^d$ e V. Grazie a questo isomorfismo possiamo far corrispondere alla norma su V una norma definita su $\mathbb{R}^d$ ponendo

$$\|\lambda\|_\star := \|\phi(\lambda)\|_V\,, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^d. \tag{3}$$

Lasciamo per esercizio al lettore il compito di verificare che $\|\cdot\|_\star$ così definita è effettivamente una norma su $\mathbb{R}^d$.

Teorema 1.3. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Tutte le norme su V sono equivalenti tra loro.*

Dimostrazione. Siano $\|\cdot\|_\flat$ e $\|\cdot\|_\sharp$ due norme su V. Sia $d \in \mathbb{N}$ la dimensione di V. Tramite l'applicazione ϕ definita sopra possiamo definire su $\mathbb{R}^d$ due norme corrispondenti alle norme su V ponendo

$$\|\lambda\|_{\flat\star} := \|\phi(\lambda)\|_\flat\,, \quad \|\lambda\|_{\sharp\star} := \|\phi(\lambda)\|_\sharp\,, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^d.$$

Per il corollario 1.2 le due norme $\|\cdot\|_{\flat\star}$ e $\|\cdot\|_{\sharp\star}$ sono equivalenti, ovvero esistono due costanti $A, B > 0$ tali che

$$A\,\|\lambda\|_{\flat\star} \leqslant \|\lambda\|_{\sharp\star} \leqslant B\,\|\lambda\|_{\flat\star}\,, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^d.$$

Essendo ϕ un isomorfismo, quindi suriettivo, le ultime disuguaglianze si possono riscrivere come

$$A\,\|v\|_\flat \leqslant \|v\|_\sharp \leqslant B\,\|v\|_\flat\,, \quad \forall v \in V,$$

ovvero le due norme $\|\cdot\|_\flat$ e $\|\cdot\|_\sharp$ sono equivalenti. $\square$

Osservazione 1.4. Il fatto che su uno spazio di dimensione finita tutte le norme siano equivalenti significa che su tale spazio esiste di fatto una sola topologia metrica compatibile con la struttura lineare ed è quella determinata dalla metrica euclidea. In particolare abbiamo che tutti gli spazi normati di dimensione finita sono completi, ovvero spazi di Banach, essendo isomorfi dal punto di vista metrico a $\mathbb{R}^d$ (o $\mathbb{C}^d$).

2. Spazi di dimensione infinita

In dimensione infinita non tutte le norme su uno stesso spazio sono equivalenti. Ad esempio, nella precedente lezione, abbiamo visto che lo spazio $C[0,1]$ con la norma uniforme $\|f\|_\infty := \max|f|$ è uno spazio di Banach, mentre lo stesso spazio con la norma della massa $\|f\|_1 := \int_0^1 |f|$ non è completo. Dunque le due norme non sono equivalenti in quanto inducono su $C[0,1]$ due topologie differenti.

Un'altra caratteristica importante che differenzia gli spazi di dimensione infinita da quelli di dimensione finita è che in dimensione infinita non vale più la caratterizzazione dei compatti del teorema di Heine-Borel, non tutti gli insiemi chiusi limitati sono compatti. In particolare la sfera unitaria $U := \{u \in V \colon \|u\| = 1\}$ non è mai compatta in dimensione infinita. Per dimostrarlo utilizziamo il seguente lemma che ci permetterà di costruire una successione in U che non possiede alcuna sottosuccessione convergente.

Lemma 2.1 (Riesz)**.** *Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio normato, sia S un suo sottospazio vettoriale non denso in V e sia $\varepsilon > 0$. Allora esiste un vettore $u \in V$ tale che*

$$\|u\| = 1, \qquad \operatorname{dist}(u, S) > 1 - \varepsilon. \tag{4}$$

Ricordiamo che un sottoinsieme E di uno spazio metrico M si dice *denso* quando ogni intorno di ogni punto di M contiene punti di E, ovvero quando ogni palla metrica di M contiene almeno un punto di E; ciò equivale anche a dire che la chiusura di E in M coincide con M. Quindi un insieme E non è denso in M se e solo se esiste in M una palla che non interseca E, ovvero esiste in M un punto che ha una distanza strettamente positiva da E.

Ricordiamo inoltre che la distanza tra un punto p e un sottoinsieme E in uno spazio metrico è data da

$$\operatorname{dist}(p, E) = \inf_{x \in E} \operatorname{dist}(p, x).$$

Possiamo dare una interpretazione geometrica del lemma 2.1 se osserviamo che la proprietà (4) esprime una condizione di "quasi ortogonalità" di u rispetto ad S (nel caso di norma euclidea u sarebbe effettivamente un vettore ortogonale ad S se la condizione valesse per ogni $\varepsilon > 0$). Dunque il lemma di Riesz ci dice che finché il sottospazio S non è denso in V è sempre possibile trovare una direzione quasi ortogonale ad S.

Dimostrazione. Siccome S non è denso in V esisterà un vettore $v \in V$ esterno ad S con distanza positiva da S,

$$d := \operatorname{dist}(v, S) := \inf_{x \in S} \|v - x\| > 0.$$

Poiché $(1+\varepsilon)d > \operatorname{dist}(v, S)$, esisterà un vettore $w \in S$ tale che

$$d \leqslant \|v - w\| < (1+\varepsilon)d.$$

Poniamo $u = \frac{v-w}{\|v-w\|}$, così $\|u\| = 1$. Siccome l'applicazione $x \mapsto w + \|v-w\| x$ è una biezione su S, abbiamo che

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(u,S) &= \inf_{x\in S}\|u-x\| = \inf_{x\in S}\left\|\frac{v-w}{\|v-w\|} - x\right\| = \inf_{x\in S}\left\|\frac{v-w-\|v-w\|x}{\|v-w\|}\right\| = \\ &= \frac{1}{\|v-w\|}\inf_{x\in S}\big\|v-(w+\|v-w\|x)\big\| = \frac{1}{\|v-w\|}\inf_{y\in S}\|v-y\| = \\ &\qquad\qquad = \frac{d}{\|v-w\|} > \frac{1}{1+\varepsilon} > 1-\varepsilon.\end{aligned}$$

□

Lemma 2.2. *Sia S un sottospazio di uno spazio normato V. Se S ha dimensione finita allora è chiuso in V.*

Dimostrazione. Il sottospazio S con la norma di V è uno spazio normato di dimensione finita e dunque è completo (vedi osservazione 1.4), e quindi è chiuso. □

Lemma 2.3. *Sia S un sottospazio chiuso e denso in uno spazio normato V allora $S = V$.*

Dimostrazione. Se S è chiuso allora S coincide con la sua chiusura $\overline{S}$. Se S è denso allora la sua chiusura $\overline{S}$ coincide con tutto V. □

Dal lemma precedente segue che un sottospazio di dimensione finita non è mai denso in uno spazio normato di dimensione infinita.

Proposizione 2.4. *Se V è uno spazio normato di dimensione infinita allora esiste una successione di vettori $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tali che:*

- $\|u_n\| = 1$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$;
- $\|u_n - u_m\| \geqslant 1/2$ *per ogni* $n, m \in \mathbb{N}$ *con* $n \neq m$.

Prima di dimostrare la proposizione vediamo subito la sua applicazione.

Teorema 2.5. *In uno spazio normato di dimensione infinita la sfera unitaria non è mai compatta.*

Dimostrazione. La successione fornita dalla proposizione 2.4 è una successione di vettori della sfera unitaria tale che ogni sua sottosuccessione non può essere di Cauchy e dunque nessuna sua sottosuccessione può essere convergente. Dunque la sfera unitaria non è compatta. □

Dato un sottoinsieme E di uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$ indichiamo con $\operatorname{span} E$ il sottospazio di V generato da E, ovvero l'insieme di tutte le combinazioni lineari di un numero finito di vettori di E, ovvero il più piccolo sottospazio di V che contiene E,

$$\operatorname{span} E = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j \colon n\in\mathbb{N},\ \lambda_j \in \mathbb{K}, v_j \in V,\ j = 1,\dots,n \right\}.$$

Dimostrazione della proposizione 2.4. Sia V uno spazio normato di dimensione infinita e sia $U = \{u \in V\colon\ \|u\| = 1\}$ la sua sfera unitaria.

Partiamo scegliendo un qualsiasi vettore unitario $u_1 \in U$. Sia $S_1 := \operatorname{span}\{u_1\}$. Il sottospazio S_1 ha dimensione 1 e dunque non è denso in V. Per il lemma di Riesz esisterà un vettore $u_2 \in U$ tale che $\operatorname{dist}(u_2, S_1) \geqslant 1/2$ e dunque in particolare avremo che $\|u_2 - u_1\| \geqslant 1/2$.

Iterando il procedimento possiamo costruire la successione cercata in modo induttivo. Supponiamo infatti di avere n vettori $u_1, \dots, u_n \in U$ tali che $\|u_j - u_k\| \geqslant 1/2$

per ogni coppia di indici con $1 \leqslant j < k \leqslant n$, per un certo $n \in \mathbb{N}$. Consideriamo il sottospazio $S_n := \operatorname{span}\{u_1, \dots u_n\}$; esso, avendo dimensione finita, non è denso in V. Per il lemma di Riesz esisterà un vettore $u_{n+1} \in U$ tale che $\operatorname{dist}(u_{n+1}, S_n) \geqslant 1/2$ e dunque in particolare avremo anche che $\|u_{n+1} - u_k\| \geqslant 1/2$ per ogni $k = 1, \dots n$. □

3. Spazi di successioni

Una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a valori nel campo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ non è altro che una funzione $x \colon \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ che ad ogni indice naturale $n \in \mathbb{N}$ associa un valore scalare $x_n \in \mathbb{K}$. Possiamo immaginarlo anche come una sequenza infinita, ma numerabile, di valori:

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)\,.$$

L'insieme di tutte le successioni a valori in $\mathbb{K}$ non è altro che l'insieme di tutte le funzioni da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{K}$ e lo denotiamo con $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si tratta di uno spazio vettoriale, dove la somma di due successioni e il prodotto per scalare sono definiti in modo naturale da

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} := (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}\,, \qquad \lambda(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,$$

per ogni $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ e ogni $\lambda \in \mathbb{K}$.

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ indichiamo con e_k la successione che ha tutte le componenti nulle tranne la k-esima che poniamo uguale a 1,

$$e_k = (e_{k,n})_{n\in\mathbb{N}} := \big(0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pos. } k}}{1}, 0, \dots\big), \qquad e_{k,n} = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq k, \\ 1, & \text{se } n = k. \end{cases} \tag{5}$$

Osservazione 3.1. Attenzione l'insieme $E := \{e_k \colon k \in \mathbb{N}\}$ di tutte le successioni e_k definite in (5) è un insieme di vettori linearmente indipendenti, ma non forma una base algebrica (base di Hamel) per lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Lo spazio $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ è uno spazio enorme sul quale è difficile definire norme adatte ad applicazioni interessanti. Spesso risulta più interessante considerare dei suoi sottospazi più piccoli, ma sempre di dimensione infinita, formati da successioni che verificano qualche condizione di regolarità (come ad esempio l'essere limitate, o avere limite, o essere sommabili). Vediamone alcuni:

- spazio delle successioni definitivamente nulle:
$$c_{00} := \big\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \colon \exists n_\star \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_\star, x_n = 0\big\}\,;$$
- spazio delle successioni infinitesime:
$$c_0 := \Big\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \colon \lim_{n\to\infty} x_n = 0\Big\}\,;$$
- spazio delle successioni convergenti:
$$c := \Big\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \colon \exists \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{K}\Big\}\,;$$
- spazio delle successioni limitate:
$$\ell^\infty := \Big\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \colon \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty\Big\}\,;$$
- spazio delle successioni assolutamente sommabili:
$$\ell^1 := \Big\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \colon \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty\Big\}\,;$$

- spazio delle successioni di quadrato sommabile:

$$\ell^2 := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \colon \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 < +\infty \right\}.$$

Proposizione 3.2. *Tra gli spazi vettoriali di successioni definiti sopra valgono le seguenti inclusioni strette :*

$$c_{00} \subset \ell^1 \subset \ell^2 \subset c_0 \subset c \subset \ell^\infty \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}.$$

Dimostriamo l'inclusione

$$\ell^1 \subset \ell^2, \tag{6}$$

e lasciamo la verifica delle rimanenti come esercizio. Se $x \in \ell^1$ significa che la serie $S := \sum_{n=1}^\infty |x_n| < \infty$ è convergente, quindi la successione $|x_n|$ risulta essere infinitesina e dunque è limitata. Sia $M := \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty$, abbiamo allora che

$$\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 \leqslant \sum_{n=1}^\infty M\,|x_n| = MS < \infty,$$

e dunque $x \in \ell^2$.

La successione armonica

$$a = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$$

appartiene a ℓ^2 ma non a ℓ^1, in quanto $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ converge, mentre $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ diverge. Ciò prova che l'inclusione (6) è un'inclusione stretta.

3.1. **Norma uniforme.** Sugli spazi ℓ^∞, c e c_0 si usa solitamente considerare la norma uniforme:

$$\|(x_n)\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|\,;$$

nel caso dello spazio c_0 questo "sup" è di fatto un "max". La verifica delle proprietà di norma per la norma uniforme è semplice; vediamo qui la disuguaglianza triangolare, che segue facilmente dalle proprietà dell'estremo superiore: date due successioni (x_n) e (y_n) abbiamo

$$|x_k + y_k| \leqslant |x_k| + |y_k| \leqslant \sup_n |x_n| + \sup_n |y_n|\,, \quad \forall k,$$

da cui segue che

$$\sup_k |x_k + y_k| \leqslant \sup_n |x_n| + \sup_n |y_n|\,.$$

Teorema 3.3. *Gli spazi normati* $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$, $(c, \|\cdot\|_\infty)$ *e* $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ *sono spazi di Banach.*

Dimostrazione. Diamo la dimostrazioni solo per ℓ^∞ e lasciamo gli altri due come esercizio.

Dobbiamo provare che ogni successione di Cauchy (rispetto alla norma uniforme) di elementi in ℓ^∞ converge ad un elemento di ℓ^∞.

Attenzione: Stiamo parlando di una successione i cui termini sono essi stessi delle successioni; dunque una successione di successioni! Cerchiamo di non fare confusione con gli indici che usiamo.

Sia dunque $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in ℓ^∞ con la norma uniforme. Ciò significa che ogni termine x_k è una successione di valori scalari,

$$x_k = (x_{k,n})_{n\in\mathbb{N}} = (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n}, \dots)\,;$$

inoltre abbiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per $j, k \geqslant k_\varepsilon$ si ha

$$\sup_n |x_{j,n} - x_{k,n}| = \|x_j - x_k\|_\infty < \varepsilon. \tag{7}$$

Ne deduciamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$, la successione $(x_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$ delle n-esime coordinate è una successione di Cauchy in $\mathbb{K}$. Essendo $\mathbb{K}$ completo allora abbiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste il limite

$$x_{\star,n} := \lim_{k\to\infty} x_{k,n} \in \mathbb{K}. \tag{8}$$

Questo ci permette di definire una successione $x_\star := (x_{\star,n})_{n\in\mathbb{N}}$. Siccome la successione $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in ℓ^∞, essa è anche una successione limitata in ℓ^∞, e dunque esiterà una costante finita M tale che

$$\sup_{k,n\in\mathbb{N}} |x_{k,n}| = \sup_{k\in\mathbb{N}} \|x_k\|_\infty \leqslant M. \tag{9}$$

Da (8) e (9) ricaviamo che

$$|x_{\star,n}| \leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_{k,n}| \leqslant M, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e dunque $x_\star \in \ell^\infty$ con $\|x_\star\|_\infty \leqslant M$. Passando al limite per $k \to \infty$ nella disuguaglianza (7) otteniamo che quando $j \geqslant k_\varepsilon$ si ha $|x_{j,n} - x_{\star,n}| < \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e dunque $\|x_j - x_\star\|_\infty < \varepsilon$. Ciò implica che la successione $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge a $x_\star$ rispetto alla norma uniforme. □

3.2. **Norma ℓ^1.** Sullo spazio ℓ^1 la norma canonica è quella della massa, o dell'assoluta sommabilità:

$$\|(x_n)\|_1 := \sum_n |x_n| \,.$$

La disuguaglianza triangolare segue dal fatto che se due successioni hanno serie convergenti anche la successione somma ha serie convergente alla somma delle due serie:

$$\sum_n |x_n + y_n| \leqslant \sum_n (|x_n| + |y_n|) = \sum_n |x_n| + \sum_n |y_n| \,.$$

Lemma 3.4. *Su ℓ^1 la norma della somma domina la norma uniforme:*

$$\|\cdot\|_\infty \leqslant \|\cdot\|_1 \,.$$

Dimostrazione. La verifica è immediata, in quanto

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n| \leqslant \sum_n |x_n| = \|x\|_1$$

per ogni successione $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$. □

Teorema 3.5. *Lo spazio normato $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Sia $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy di successioni in ℓ^1 rispetto alla norma della massa: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per $j, k \geqslant k_\varepsilon$ si ha $\|x_k - x_j\|_1 < \varepsilon$. In particolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la successione $(x_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ delle n-esime coordinate è di Cauchy in $\mathbb{K}$, in quanto

$$|x_{k,n} - x_{j,n}| \leqslant \|x_k - x_j\|_\infty \leqslant \|x_k - x_j\|_1 \,,$$

essendo $\mathbb{K}$ completo esiste allora il limite $x_{\star,n} := \lim_{k\to\infty} x_{k,n}$.

Verifichiamo che la successione $x_\star = (x_{\star,n})_{n\in\mathbb{N}}$ appartiene a ℓ^1. Procediamo approssimando ℓ^1 con spazi di dimensione finita. Sia $d \in \mathbb{N}$. Siccome $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy è anche limitata in ℓ^1 e dunque esiste una costante M tale che

$$\sum_{n=1}^d |x_{k,n}| \leqslant \|x_k\|_1 \leqslant M, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Passando al limite per $k \to \infty$ otteniamo che $\sum_{n=1}^d |x_{\star,n}| \leqslant M$, con M indipendente da d; passando al limite per $d \to \infty$ ricaviamo che $\|x_\star\|_1 \leqslant M$ e quindi $x_\star \in \ell^1$.

Ora verifichiamo che $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $x_\star$ rispetto alla norma della massa. Quando $j, k \geqslant k_\varepsilon$ abbiamo

$$\sum_{n=1}^{d} |x_{k,n} - x_{j,n}| \leqslant \|x_k - x_j\|_1 < \varepsilon.$$

Passando al limite per $j \to \infty$ ricaviamo che

$$\sum_{n=1}^{d} |x_{k,n} - x_{\star,n}| \leqslant \varepsilon,$$

per ogni d, e per ogni $k \geqslant k_\varepsilon$; passando al limite per $d \to \infty$ ricaviamo che $\|x_k - x_\star\|_1 \leqslant \varepsilon$ per ogni $k \geqslant k_\varepsilon$. Ciò significa che x_k converge a $x_\star$ per $k \to \infty$ rispetto allo norma della massa. $\square$

3.3. **Norma ℓ^2.** Sullo spazio ℓ^2 la norma canonica è quella euclidea (nella sua versione infinito dimensionale):

$$\|(x_n)\|_2 := \sqrt{\sum_n |x_n|^2}.$$

La disuguaglianza triangolare la si può ottenere dalla caso di dimensione finita, passando al limite:

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^2} = \lim_{d\to\infty} \sqrt{\sum_{n=1}^{d} |x_n + y_n|^2} \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{d\to\infty} \sqrt{\sum_{n=1}^{d} |x_n|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{d} |y_n|^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2}.$$

Teorema 3.6. *Lo spazio normato $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ è uno spazio di Banach.*

Lasciamo la dimostrazione come esercizio.

4. Esercizi

4.1. **Spazi di dimensione finita.**

Esercizio 4.1. Sia $d \in \mathbb{N}$. Dimostra che tutte le norme su $\mathbb{C}^d$ sono equivalenti tra loro.

Esercizio 4.2. Dimostra che la norma definita in 3 gode di tutte le proprietà di una norma.

Esercizio 4.3. Spiega perché la mappa ϕ definita in (2) trasforma successioni di Cauchy di $\mathbb{R}^d$ in successioni di Cauchy di V e trasforma compatti di $\mathbb{R}^d$ in compatti di V.

Esercizio 4.4. Spiega perchè il teorema di Heine-Borel, ovvero che ogni ogni insieme chiuso e limitato è compatto, vale in ogni spazio normato di dimensione finita.

4.2. **Spazi di dimensione infinita.**

Esercizio 4.5. Dimostra che in uno spazio normato di dimensione infinita nessuna palla metrica può avere chiusura compatta.

Esercizio 4.6. Spiega perchè un sottoinsieme compatto di uno spazio normato di dimensione infinita non può avere punti interni.

4.3. **Spazi di successioni.**

Esercizio 4.7. Dimostra l'affermazione riportata nell'osservazione 3.1 e identifica chi è lo spazio $\operatorname{span}(E)$ generato dall'insieme E.

Esercizio 4.8. È possibile definire una norma sullo spazio $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ di tutte le successioni a valori in $\mathbb{K}$?

Esercizio 4.9. Verifica che $c_{00}, \ell^1, \ell^2, c_0, c, \ell^\infty, \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sono effettivamente degli spazi vettoriali.

Esercizio 4.10. Spiega perché quando $x \in c_0$ abbiamo che $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

Esercizio 4.11. Completa la dimostrazione della proposizione 3.2

Esercizio 4.12. Verifica che la formula $\|(x_n)\|_\flat := \sum_n n^{-2} |x_n|$ definisce una norma su ℓ^∞ (e dunque anche su tutti i suoi sottospazi).

Esercizio 4.13. Verifica che la formula $\|(x_n)\|_\flat := \sum_n n^{2} |x_n|$ definisce una norma su c_{00} ma non su ℓ^1.

Esercizio 4.14. Dimostra che $(c, \|\cdot\|_\infty)$ e $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ sono spazi di Banach. (Basta verificare che c e c_0 sono sottospazi chiusi di ℓ^∞ rispetto alla topologia della norma uniforme.)

Esercizio 4.15. Dimostra che $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ è uno spazio di Banach.