Prova scritta di Analisi Matematica II
Corso di Laurea Triennale in Matematica

15 febbraio 2017

1. Trovare l'insieme di convergenza della serie di potenze:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3}$$
e calcolarne la somma.

2. Sia $f : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ la funzione definita da:
$$f(x,y) = \frac{x^2\,y}{\sqrt{x^4+y^4}} \qquad \text{se } (x,y) \neq (0,0) \text{ e } f(0,0) = 0$$
Dire
   i) Dire se f è continua in $(0,0)$,
   ii) dire se f è differenziabile in $(0,0)$,
   iii) calcolare la derivata direzionale:
$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1), \quad \text{dove } v \text{ è data da } \; v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

3. Calcolare il volume del solido
$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3,\; x^2+y^2+z^2 \geq 4,\; x^2+y^2+\frac{z^2}{16} \leq 1,\; z \geq 0\right\}$$

4. Calcolare il valore massimo ed il valore minimo della funzione $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-x+1$ sull'insieme: $K = \{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3,\; x^2+y^2+z^2 \leq 1,\; x+y+z = 0\}$.

5. Dire se l'equazione $x^3 - y^3 + z^3 - x^2\,z - y\,z^2 = 0$ definisce nell'intorno del punto $P = (1,1,0)$ una superficie $\mathcal{S}$. In caso affermativo, trovare di $\mathcal{S}$ nel punto P il piano tangente e la curvatura media.

Correzione

1. Trovare l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3}$$

e calcolarne la somma.

Essendo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+3}} = 1$$

il raggio di convergenza della serie di potenze è $r = 1$. Inoltre la serie diverge per $x = 1$ e converge per $x = -1$. Pertanto l'insieme di convergenza e $[-1, 1)$. Posto infine

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3}, \quad x \in (-1, 1)$$

$$x^3\ s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{n+3}$$

e quindi

$$\big(x^3\ s(x)\big)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} = \frac{x^2}{1-x}$$

Infine integrando, si ottiene

$$x^3\ s(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1-t}\, dt = -\int_0^x \left(t + 1 + \frac{1}{t-1}\right) dt = -\left(\frac{x^2}{2} + x + \log(1-x)\right)$$

Possiamo quindi concludere che $\forall x \in (-1, 1),\ x \neq 0$

$$s(x) = -\frac{\frac{x^2}{2} + x + \log(1-x)}{x^3}$$

2. Sia $f\ : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ la funzione definita da:

$$f(x, y) = \frac{x^2\, y}{\sqrt{x^4 + y^4}} \qquad \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \text{ e } f(0, 0) = 0$$

Dire

i) Dire se f è continua in $(0, 0)$,

ii) dire se f è differenziabile in $(0, 0)$,

iii) calcolare la derivata direzionale:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 1), \quad \text{dove } v \text{ è data da } \ v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Notiamo che

$$\left|\frac{x^2\ y}{\sqrt{x^4+y^4}}\right| = |y|\sqrt{\frac{x^4}{x^4+y^4}} \leq |y|$$

Pertanto la funzione è continua in $(0,0)$. D'altra parte $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ e quindi la funzione f è differenziabile in $(0,0)$, se e solo se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sigma(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\ y}{\sqrt{x^4+y^4}\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

D'altra parte se $x > 0$

$$\sigma(x,x) = \frac{x^3}{2\ x^3} = \frac{1}{2}$$

Pertanto f non è differenziabile in $(0,0)$. Infine se $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f_x = \left(2xy\sqrt{x^4+y^4} - x^2\, y\frac{2\, x^3}{\sqrt{x^4+y^4}}\right)\frac{1}{x^4+y^4}$$

$$f_y = \left(x^2\sqrt{x^4+y^4} - x^2\, y\frac{2\, y^3}{\sqrt{x^4+y^4}}\right)\frac{1}{x^4+y^4}$$

e quindi

$$f_x(1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad f_y(1,1) = 0$$

Allova

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = \frac{1}{2}$$

3. Calcolare il volume del solido

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 \geq 4,\ x^2+y^2+\frac{z^2}{16} \leq 1,\ z \geq 0\right\}$$

Deve essere

$$4 - x^2 - y^2 \leq z^2 \leq 16(1-x^2-y^2)$$

Qui di posto $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ si ha $4-\rho^2 \leq 16(1-\rho^2)$, ossia

$$0 \leq \rho \leq \sqrt{\frac{4}{5}} = \rho_0$$

Otteniamo quindi

$$\mathcal{L}_3(M) = \int\!\!\int_{B_{\rho_0}} \left(4\sqrt{1-x^2-y^2} - \sqrt{4-x^2-y^2}\right) dxdy$$

e passando in coordinate polari

$$\mathcal{L}_3(M) = 2\,\pi\int_0^{\rho_0}\rho\left(4\sqrt{1-\rho^2} - \sqrt{4-\rho^2}\right)d\rho = 2\,\pi\left[-\frac{4}{3}(1-\rho^2)^{3/2} + \frac{1}{3}(4-\rho^2)^{3/2}\right]\Bigg|_0^{\rho_0} =$$

$$= 2\,\pi\left[-\frac{4}{3}(1-\frac{4}{5})^{3/2} + \frac{1}{3}(4-\frac{4}{5})^{3/2} + \frac{4}{3} - \frac{8}{3}\right] = \frac{8\,\pi(3-\sqrt{5})}{3\sqrt{5}}$$

4. Calcolare il valore massimo ed il valore minimo della funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - x + 1$ sull'insieme: $K = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x + y + z = 0\}$.

   Studiamo prima la funzione col vincolo $x + y + z = 0$. Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 2\,x - 1 - \lambda = 0 \\ 2\,y - \lambda = 0 \\ 2\,z - \lambda = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

   Dalla seconda equazione si ottiene $\lambda = 2\,y$ e dalla prima e dalla terza $x = \frac{1+2\,y}{2}$ e $z = y$. Infine dalla quarta equazione $y = -1/6$. Pertanto si ottiene il punto

$$P_1 = \left(\frac{2}{6},\ -\frac{1}{6},\ -\frac{1}{6}\right) \quad \text{e vale} \quad f(P_1) = \frac{4}{36} + \frac{2}{36} - \frac{2}{6} + 1 = \frac{5}{6}$$

   Studiando ora la funzione con i due vincoli $x + y + z = 0$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 2\,x - 1 - \lambda - 2\,\mu\,x = 0 \\ 2\,y - \lambda - 2\,\mu\,y = 0 \\ 2\,z - \lambda - 2\,\mu\,z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

   Ora dalla seconda e dalla terza equazione, ottengo $\lambda = 2\,y - 2\,\mu\,y$ e $2z - 2y + 2\mu y - 2\mu z = 0$ ossia $(y - z)(\mu - 1) = 0$. Ora se fosse $\mu = 1$ si avrebbe $\lambda = 0$ e la prima equazione diventerebbe $-1 = 0$. Pertanto deve essere $y = z$ e dalla quarta e dalla quinta equazione $x = -2z$ e $z = \pm 1/\sqrt{6}$. Otteniamo quindi gli altri due punti

$$P_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \quad P_3 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

   Infine

$$f(P_2) = 2 + \frac{2}{\sqrt{6}}, \quad f(P_3) = 2 - \frac{2}{\sqrt{6}}$$

   Possiamo quindi concludere che il punto di massimo è P_2, mentre il punto di minimo è P_1.

5. Dire se l'equazione $x^3 - y^3 + z^3 - x^2\,z - y\,z^2 = 0$ definisce nell'intorno del punto $P = (1, 1, 0)$ una superficie $\mathcal{S}$. In caso affermativo, trovare di $\mathcal{S}$ nel punto P il piano tangente e la curvatura media.

   Risulta

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - x^2 - 2zy$$

   e quindi

$$\frac{\partial F}{\partial z}(1, 1, 0) = -1 \neq 0$$

   Possiamo quindi applicare il teorema del Dini ed ottenere nell'intorno del punto $(1, 1)$ la funzione implicita $z(x, y)$. Derivando rispetto ad x e rispetto ad y, si ottiene

$$\begin{cases} 3x^2 + 3z^2 z_x - 2xz - x^2 z_x - 2yzz_x = 0 \\ -3y^2 + 3z^2 z_y - x^2 z_y - z^2 - 2yzz_y = 0 \end{cases}$$

e nel punto $(1,1,0)$

$$\begin{cases} 3 - z_x(1,1) = 0 \\ -3 - z_y(1,1) = 0 \end{cases}$$

Pertanto $z_x(1,1) = 3$, $z_y(1,1) = -3$. Il piano tangente ad $\mathcal{S}$ in P è il piano di equazione $-3(x-1) + 3(y-1) + z = 0$.

Derivando una seconda volta si ottiene

$$\begin{cases} 6x + 6zz_x^2 + 3z^2 z_{x\,x} - 2z - 2xz_x - 2xz_x - x^2 z_{x\,x} - 2yz_x^2 - 2yzz_{x\,x} = 0 \\ 6zz_y z_x + 3z^2 z_{x\,y} - 2xz_y - x^2 z_{x\,y} - 2zz_x - 2yz_y z_x - 2yzz_{x\,y} = 0 \\ -6y + 6zz_y^2 + 3z^2 z_{y\,y} - x^2 z_{y\,y} - 2zz_y - 2zz_y - 2yz_y^2 - 2yzz_{y\,y} = 0 \end{cases}$$

Nel punto P

$$\begin{cases} 6 - 6 - 6 - z_{x\,x}(1,1) - 18 = 0 \\ 6 - z_{x\,y}(1,1) + 18 = 0 \\ -6 - z_{y\,y}(1,1) - 18 = 0 \end{cases}$$

Ne deriva $z_{x\,x}(1,1) = 24$, $z_{x\,y}(1,1) = -24$, $z_{xy\,y}(1,1) = 24$.

Ricordando infine la formula per la curvatura media di un grafico si ha

$$H(1,1) = \frac{1}{2} \; \frac{(1+9)\,24 - 18 \cdot 24 - (1+9)\,24}{(1+18)^{3/2}} = -\frac{9 \cdot 24}{(19)^{3/2}}$$