Progetto Lauree Scientifiche — Laboratorio di matematica

Le sezioni coniche dei Greci

Riccardo Bellé e Pier Daniele Napolitani

1 Introduzione

Per il laboratorio di storia delle matematiche all'interno del progetto Lauree Scientifiche abbiamo scelto di proporre le sezioni coniche "alla maniera" degli antichi Greci per almeno due ordini di motivi. Il primo è che le coniche sono argomento di studio nella scuola superiore (e quindi per i partecipanti al progetto non si tratta di una novità assoluta) ma nella scuola, usualmente, vengono trattati in una maniera completamente diversa dalla nostra proposta. Vi è pertanto la possibilità di far intravedere che gli oggetti matematici sono passibili di più interpretazioni e possono essere presentati sotto punti di vista anche *sostanzialmente* differenti. Secondariamente, il modo di "fare matematica" sviluppato in Grecia a partire dal V secolo a. C. e più in generale, nel mondo ellenico ed ellenistico, è quello sul quale si è formato ed evoluto anche il *nostro* modo di fare matematica. È importante, in questo senso, dal punto di vista della "cultura" matematica, vedere e provare—almeno una volta—-a fare matematica come i Greci. Nella scuola secondaria questo stesso approccio può essere forse rintracciato nello studio della geometria piana. Ovviamente, si tratta in parte di finzione e non abbiamo certo la pretesa in pochi incontri di far comprendere la matematica greca ai partecipanti al progetto "Lauree Scientifiche", ma crediamo di poter fornire spunti e riflessioni per aiutarli a capire che cos'è la matematica e soprattutto cosa abbia significato nel tempo.

Abbiamo scelto di limitare la discussione ai concetti elementari della teoria (definizione di cono e di diametro di una sezione) e all'analisi dettagliata del solo caso della parabola. Nonostante questa scelta abbiamo inserito alcuni spunti per ellisse e iperbole, tracce che potranno eventualemente essere sviluppate con l'aiuto dell'insegnante (perché no?), anche in classe, al ritorno a scuola.

Segue una seconda parte dedicata al concetto di retta tangente e alla sua costruzione nel caso della circonferenza e della parabola. Perché proseguire con la tangente? Fondamentalmente per due esigenze: la prima mostrare come le nozioni elaborate nella prima parte possano essere utilizzate per ricavare ulteriori proprietà delle curve stesse; la seconda presentare la tangente dal punto di vista dei Greci. Il concetto di retta tangente, infatti, pone difficoltà a livello di presentazione nella scuola secondaria superiore e si chiarisce forse solo nell'ultimo anno, con l'introduzione della derivata. Abbiamo tentato quindi una proposta diversa che potesse incuriosire e soprattutto far riflettere sulle diverse "definizioni" di tangente proposte. Inoltre, attraverso un confronto fra la tangente alla circonferenza (come introdotta da Euclide negli *Elementi*) e la tangente alla parabola della teoria apolloniana, è possibile farsi un'idea di come lo stesso concetto si modifichi in virtù dei diversi oggetti con i quali si ha a che fare. Non ultimo, il concetto di tangente ben mostra come la matematica non sia affatto una disciplina ferma e "fuori dalla storia".

2 Le coniche

In questo libretto verrà presentata la teoria delle sezioni coniche (o meglio una sua piccola—ma crediamo comunque significativa—parte) come ci è giunta attraverso l'opera del matematico greco Apollonio di Perga *Le coniche* (seconda metà del III secolo a. C.). Si tratta di un'opera che, nella sua prima parte, presenta in maniera organica e strutturata una serie di risultati già noti e acquisiti dalla matematica greca precedente. In particolare, fecero uso della teoria delle coniche pre-apolloniana matematici del livello di Euclide e Archimede, che giunsero a dimostrare importanti e significativi risultati anche in questo settore.[1]

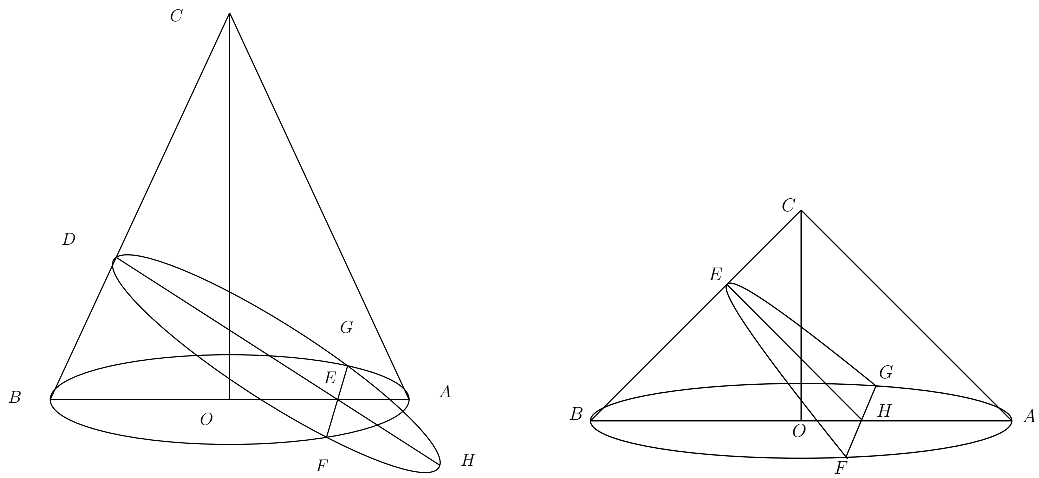
La teoria delle sezioni coniche in Grecia cioè, comincia ben prima di Apollonio. In particolare può essere importante accennare brevemente a quale fosse la maniera attraverso la quale venivano ricavate le sezioni coniche prima di Apollonio soprattutto per comprendere la grande innovazione che l'opera del matematico di Perga introdusse nello studio di questo settore della geometria.

2.1 Le coniche prima di Apollonio

Prima di tutto è necessario partire dalla definizione di cono. Per questo possiamo riferirci a Euclide che tratta dei coni nel libro XI della sua opera principale gli *Elementi*, il testo di riferimento per la geometria "elementare" (ma neanche troppo!) almeno fino a tutto il XVIII secolo. La definizione XI.18 introduce il cono come la figura che si ottiene facendo ruotare un triangolo rettangolo attorno a un cateto.[2] A questo punto le sezioni coniche (che in seguito saranno chiamate ellisse, parabola e iperbole) si ottengono come sezioni con un piano perpendicolare al lato del cono, rispettivamente quando il cono è acutangolo, rettangolo o ottusangolo. Ai tempi di Euclide,

[1]Le opere di Euclide sul tema sono oggi perdute, nelle opere di Archimede che ci sono pervenute, invece, sono contenuti molti risultati sulle coniche, in particolare nella *Quadratura della parabola* calcola, come diremmo con linguaggio moderno, l'"area" del segmento di parabola.

[2]A seconda che il cateto fisso sia quello minore o quello maggiore si ottiene, secondo la definizione di Euclide, un cono rispettivamente *ottusangolo* o *acutangolo* (in base cioè, all'angolo al vertice del cono). Se invece il triangolo rettangolo che viene ruotato è isoscele si ottiene un cono *rettangolo*.



(a) oxytome (b) orthotome

Figura 1: Le sezioni coniche prima di Apollonio

quindi, le sezioni coniche erano chiamate oxytome, orthotome e amblytome.[3] Quindi per dirla in breve, si ottengono sezioni diverse al variare del cono che viene tagliato, mentre il taglio viene sempre effettuato con un piano perpendicolare al lato del cono stesso. Una figura potrà chiarire meglio la situazione.

In particolare vogliamo mettere in risalto tre aspetti che si riveleranno fondamentali nell'evoluzione apolloniana della teoria:

- tutti i coni sono retti, cioè l'asse del cono è perpendicolare alla base;
- tutti i coni hanno una sola falda (e quindi anche l'iperbole ha un solo ramo);
- i coni sono non solo finiti, ma "nascono" finiti e non estendibili;
- non è possibile ottenere sezioni di tipo differente nello stesso cono.

[3] Dai termini greci adoperati per indicare rispettivamente l'angolo acuto (ὀξύς), retto (ὀρθός) e ottuso (ἀμβλύς). Si veda la figura 1.

2.2 Come introduce le coniche Apollonio

Con Apollonio le cose cambiano subito, a partire dalla definizione di cono. Una definizione diversa, come vedremo subito, implica anche un diverso modo di generare le sezioni. Per Apollonio il cono si ottiene (libro I, def. 1) a partire da una circonferenza data (detta "base") e da un punto (non complanare alla circonferenza) dato. Se da questo punto (che viene chiamato "vertice") si traccia una retta che lo congiunga con la circonferenza (e la retta si prolunga da tutte e due le parti rispetto al punto stesso) e, tenendo fisso il punto, si fa muovere la retta lungo la circonferenza, la retta descrive una superficie che viene detta "cono". Si tratta di una superficie composta da due parti (dette "falde"), opposte rispetto al vertice. Ciascuna di queste due falde cresce verso l'infinito quando la retta che le descrive viene prolungata verso l'infinito. L'asse del cono è la retta passante per il vertice e il centro della circonferenza.

Si tratta di una definizione senza dubbio più complicata della precedente, ma ha vari pregi che vedremo subito. Prima di tutto il cono può essere anche obliquo (cioè il suo asse può formare un angolo qualsiasi con il piano di base), abbiamo due falde (e quindi due rami di iperbole), il cono può essere prolungato verso l'infinito, ma soprattutto possiamo ottenere tutti e tre i tipi di sezioni *nello stesso cono*, variando semplicemente l'inclinazione del piano secante (che non è più costretto, come prima, a essere perpendicolare a un lato del cono).

2.3 Le "prime" sezioni di cono

Le prime sezioni che Apollonio prende in esame sono quelle per così dire "banali", quelle che non sono sezioni coniche propriamente dette. Vediamo cosa intendiamo. La proposizione 3 afferma: "Se un cono viene tagliato con un piano passante per l'asse, la sezione che si ottiene è un triangolo". Si tratta di un triangolo fondamentale nel prosieguo della teoria: il "triangolo per l'asse".

Vi è un altro genere di sezioni "banali" nel cono: le circonferenze.

***Coniche*, proposizione I.4**

Tutte le sezioni di un cono parallele alla base sono circonferenze.

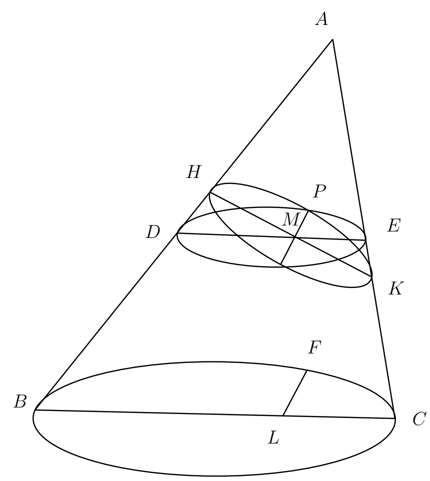


Figura 2: La sezione subcontraria

Fin qui si tratta di risultati davvero semplici, ma ecco subito un risultato abbastanza sorprendente. Le circonferenze non si ottengono solamente come sezioni con piani paralleli alla base ma anche con quella che viene detta *sezione subcontraria*. Vediamo come si genera. Si consideri un piano *perpendicolare* al piano di base BC e sia ABC il triangolo per l'asse generato da questo piano (figura 2).

Si immagini ora un altro piano HK perpendicolare al piano del triangolo ABC che tagli un triangolo AHK simile ad ABC ma posto in senso contrario, tale che cioè $\widehat{AKH}$ sia uguale a $\widehat{ABC}$. Tale sezione del cono viene detta *sezione subcontraria*.

***Coniche*, proposizione I.5**

La sezione subcontraria è una circonferenza.
Dimostrazione. Sia P un qualunque punto dell'intersezione fra la superficie conica e il piano HK (subcontrario) e sia F un qualunque punto sulla circonferenza della circonferenza di base BC.

Si traccino i segmenti PM e FL perpendicolari al piano del triangolo ABC; questi segmenti incontreranno le rette HK e BC in due punti, che chiameremo rispettivamente M e L. I segmenti PM e FL saranno paralleli. Si tracci per il punto M la retta DE, parallela a BC; il piano definito da DME e PM è parallelo alla base del cono.

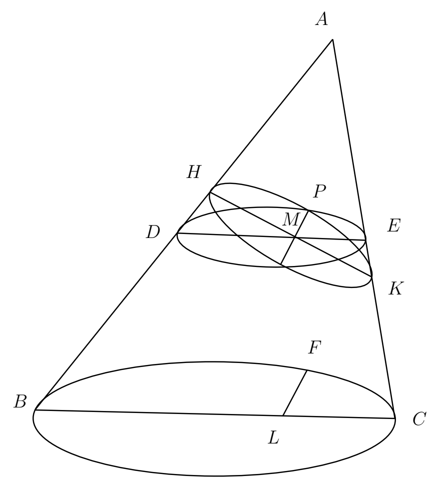


Figura 3: La sezione subcontraria

Di conseguenza (prop. 4) la sezione DPE che si ottiene saràa(=— un cerchio e il rettangolo costruito su DM e ME ($DM \times ME$) saràa(=— uguale al quadrato costruito su PM (PM^2).

Ma poiché DE è parallelo a BC, l'angolo $\widehat{ADE}$ è uguale all'angolo $\widehat{ABC}$ (uguale, per ipotesi, a $\widehat{AKH}$).

Dunque, nei triangoli HDM e EKM gli angoli $\widehat{HDM}$ e $\widehat{EKM}$ sono uguali, così come gli angoli in M, opposti al vertice.

Quindi i triangoli HDM e EKM sono simili; e, per similitudine di triangoli:

$$HM : MD = EM : MK \tag{1}$$

e possiamo scrivere:

$$HM \times MK \quad = \quad DM \times ME = PM^2 \tag{2}$$

Siccome P è un punto qualunque sull'intersezione del piano HK e della superficie conica, la sezione subcontraria sarà una circonferenza, dato che ogni suo punto soddisfa la proprietà (2).

■

Attività 1 Dimostrare che:

1. se P appartiene a una circonferenza soddisfa la proprietà (2);
2. se P è fuori dalla circonferenza non la soddisfa.

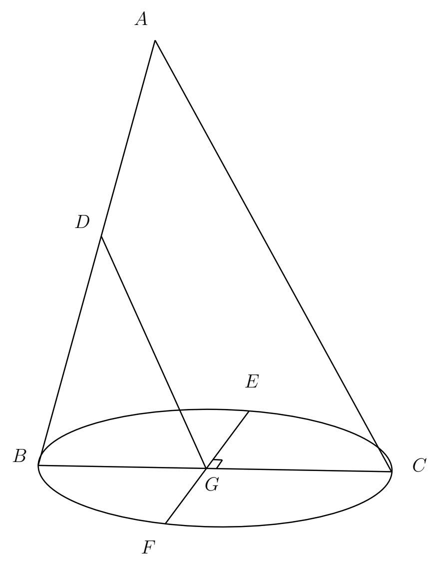


Figura 4: La sezione di cono

2.4 Le sezioni di cono in generale

Osservazione 1

Nelle proposizioni successive (propp. 6–10) Apollonio dimostra che un piano secante il cono che non passi per il vertice e tale che l'intersezione (EF) fra il piano secante e la base del cono sia perpendicolare alla base del triangolo per l'asse (BC), individua sempre un *diametro* della sezione (DG), determinato dall'intersezione fra il piano secante e il triangolo per l'asse, e una "direzione delle ordinate" (EF) definita dall'intersezione fra piano secante e piano di base del cono. Il diametro, per definizione (def. 4), è quel segmento che biseca tutte le corde di una curva tracciate parallelamente a una direzione (detta "direzione delle ordinate"). Tale diametro sarà l'*asse* della sezione (ovvero l'angolo che forma con le ordinate sarà retto) se, e solo se, il piano del triangolo per l'asse risulta perpendicolare al piano di base; cosa che si verifica sempre nel caso particolare che il *cono sia retto*.

Osservazione 2

Apollonio dimostra inoltre che se la sezione non è né subcontraria né parallela si ottengono tre tipi di curve, diverse dalla circonferenza. Le distingue a seconda che:

1. il piano secante incontri entrambi i lati del triangolo per l'asse nella

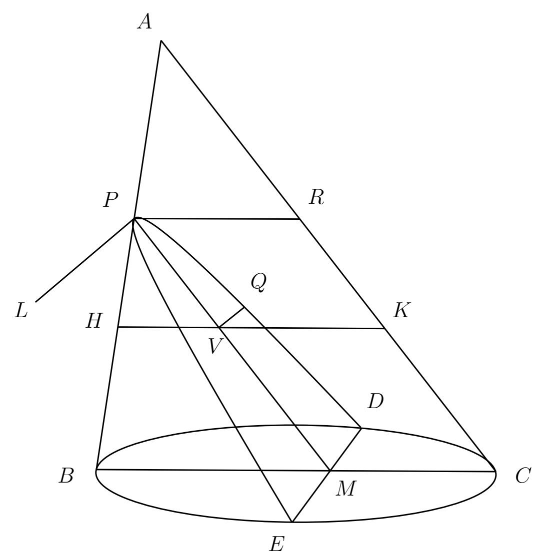


Figura 5: Il sintomo della parabola

stessa falda del cono (ellisse);

2. sia parallelo a uno dei lati del triangolo (parabola);

3. incontri entrambi i lati, ma uno in una falda e uno in un'altra (iperbole).

Nel primo caso la curva-sezione che si ottiene sarà limitata, negli altri due prolungabile indefinitamente con il cono.

A questo punto Apollonio passa a determinare una proprietà caratteristica delle tre curve suddette. Vediamo il caso della parabola.

2.5 Il "sintomo" della parabola

Coniche, proposizione I.11

Dato il cono ABC di vertice A e base BC si consideri un piano secante che generi una sezione il cui diametro PM sia parallelo a uno dei lati del triangolo per l'asse. Sia QV un'ordinata relativa al diametro PM.

Se si traccia una retta PL perpendicolare a PM nel piano della sezione, tale che

$$PL : PA \;=\; BC^2 : BA \times AC$$

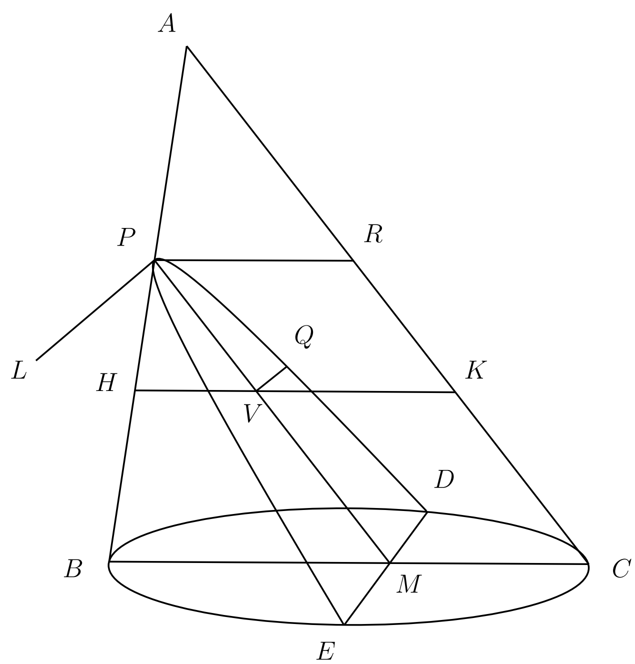


Figura 6: Il sintomo della parabola

allora

$$QV^2 = PL \times PV \tag{3}$$

La sezione così ottenuta si chiama parabola *e la retta fissa PL (rispetto alla quale si realizza l'uguaglianza fra il quadrato di una qualsiasi ordinata e il rettangolo costruito sull'ascissa e tale retta fissa) è detta* lato retto *della parabola.*

Dimostrazione. Sia BC il diametro del cerchio di base del cono; DE l'intersezione fra il piano secante e cerchio di base. Sia HK una parallela a BC passante per il punto V. Poiché l'ordinata QV è anche parallela a DE, il piano passante per i tre punti H, Q, K sarà parallelo alla base del cono e lo taglierà in un cerchio di diametro HK.

Inoltre dato che QV è perpendicolare a HK (per l'osservazione 1), ne segue che

$$HV \times VK = QV^2 \tag{4}$$

Inoltre, per similitudine di triangoli:

$$\begin{aligned} BC : AC &= HV : PV \\ BC : AB &= VK : PA \end{aligned}$$

(per la seconda proporzione, si consideri il parallelogramma $PRKV$ costruito tracciando PR, parallela ad HK passante per P).
Di conseguenza,

$$BC^2 : AC \times AB = HV \times VK : PV \times PA. \tag{5}$$

Per (4), inoltre, avremo

$$HV \times VK : PA \times PV = QV^2 : PA \times PV$$

E quindi, per (5)

$$BC^2 : AC \times AB = QV^2 : PA \times PV.$$

Ma, per come abbiamo definito PL, si ha

$$PL : PA = BC^2 : BA \times AC \tag{6}$$

quindi

$$QV^2 : PA \times PV = PL : PA.$$

D'altra parte è ovvio che

$$PL : PA = PL \times PV : PA \times PV$$

e quindi si ottiene la tesi:

$$QV^2 = PL \times PV.$$

■

Corollario (*Coniche*, prop. I.20)

Nella parabola i quadrati delle ordinate sono proporzionali alle ascisse.
Cioè, se Q_1 e Q_2 sono due punti sulla parabola e le rispettive ordinate sono Q_1V_1 e Q_2V_2, allora:

$$Q_1{V_1}^2 : Q_2{V_2}^2 = PV_1 : PV_2.$$

2.6 Da dove viene il nome "parabola"?

In particolare, da quanto visto, possiamo capire da dove derivi il nome *parabola*. Esaminiamo la tesi dimostrata nella proposizione 11, cioè, con le notazioni là assunte, $QV^2 = PL \times PV$. Questo risultato può essere riformulato nel seguente modo: il quadrato delle ordinate (QV^2) rispetto a un diametro fissato, è uguale al rettangolo avente come lati un segmento fisso (PL) e l'ascissa (PV) corrispondente all'ordinata QV. Questa operazione nella matematica greca veniva detta "applicare" un'area (QV^2) a un segmento dato (PL, detto "lato retto"), ricavando cioè l'altezza di un rettangolo (con base data) equivalente al quadrato iniziale.

E cosa c'entra tutto questo con la parola parabola? Beh, il termine tecnico adoperato in greco per "applicare" in questo contesto è proprio παραβάλλειν.

Da dove derivano allora ellisse e iperbole? Basta riflettere su ciò che ellisse e iperbole significano anhce in italiano. Ellisse significa "diminuzione, mancanza" (la famosa "frase ellittica del verbo" incontrata in grammatica ...) e iperbole "esagerazione, eccesso" (esiste anche una figura retorica con questo nome). Non è quindi difficile immaginare a cosa si riferiscano i due termini nella teoria dell'applicazione delle aree: l'area del quadrato delle ordinate (QV^2) deve essere uguale a quella di un rettangolo avente come altezza l'ascissa (PV) ma come base (per la parabola esattamente uguale al "lato retto") un segmento minore (nel caso dell'ellisse) o maggiore (per l'iperbole) del lato retto. Quindi possiamo dire che si tratta di applicazioni di un area a un segmento con un difetto o con un eccesso.

A questo punto probabilmente quanto detto su ellisse e iperbole è poco chiaro, dal momento che per queste curve non abbiamo ricavato il *sintomo*, cioè la proprietà che le descrive, come abbiamo fatto per la parabola. Non c'è problema: lasciamo un suggerimento per un futuro approfondimento. Si esaminino i tre schemi nella pagina seguente e si scrivano le relazioni di proporzionalità ricavabili in base alla similitudine di adeguati triangoli.

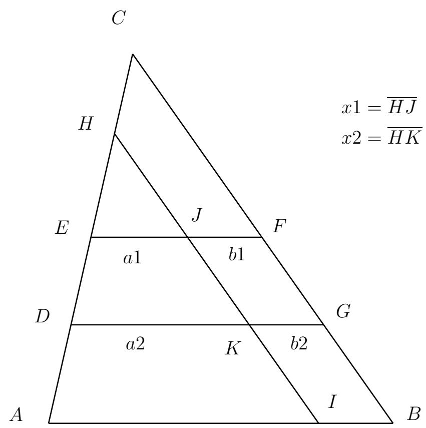


Figura 7: Parabola

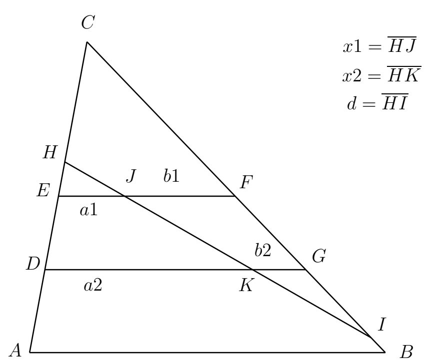


Figura 8: Ellisse

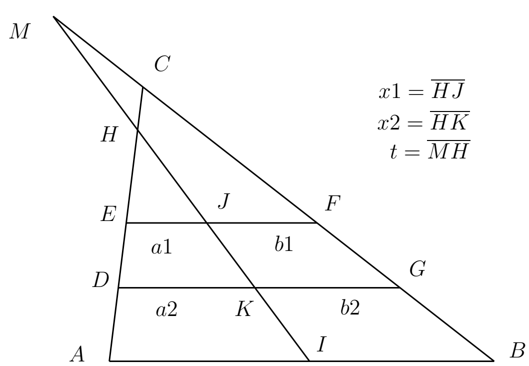


Figura 9: Iperbole

3 La tangente nella matematica greca

Il concetto di tangente si presta a varie interpretazioni e può essere introdotto in maniera diversa a seconda dei contesti. Se la retta tangente, quindi, fa il suo ingresso—almeno a livello intuitivo—con la geometria piana, è solo con il calcolo infinitesimale e l'introduzione della derivata che si chiarisce e si completa la definizione di retta tangente. In questa sezione introdurremo alcuni aspetti della retta tangente come veniva affrontata nella matematica greca. Faremo quindi uso dei risultati della sezioni precedenti per la determinazione della retta tangente alla parabola.

Per i Greci la nozione di contatto, di tangente è completamente topologica, cioè a dire, legata alla posizione e alla disposizione delle figure che intervengono. Coerentemente in Euclide troviamo la seguente definizione di tangente alla circonferenza: "si dice che una retta è tangente alla circonferenza quando incontra la circonferenza e prolungata non la taglia".[4] La tangente è quindi legata all'incontro (secondo certe modalità) fra retta e figura curva. A questo proposito possiamo aggiungere che anche oggi vi sono varie possibili definizioni di retta tangente a seconda dei contesti e degli usi: come limite delle rette secanti, come retta con pendenza uguale alla derivata nel punto, come retta avente la stessa direzione della curva o come la retta che meglio approssima la curva e altre ancora.

Ma torniamo ai Greci. La definizione di Euclide nel caso della circonferenza funziona benissimo, possiamo anzi riformularla (snaturandola un po') dicendo che una retta è tangente a una circonferenza se la incontra in un solo punto. Ma allarghiamo ora lo spettro di indagine e passiamo alle coniche (in particolare alla parabola). Va ancora bene la definizione euclidea? Si potrà notare che una qualsiasi retta parallela all'asse (o più in generale al diametro) di una parabola incontra la curva in un solo punto, ma nessuno accetterà di considerare queste rette come tangenti. Quindi la parabola ci pone di fronte a un altro problema: ecco che ci rendiamo conto che l'incontrarsi in un solo punto non è più sufficiente per definire la retta tangente, ci vuole qualcos'altro. Ma che cosa? Nel caso della parabola è necessario aggiungere che la retta tangente lasci la curva tutta da una parte.

[4] Possiamo notare incidentalmente che Euclide nell'originale greco fa uso di tre termini diversi per "è tangente", "incontra" e "taglia", cosa che abbiamo conservato nella nostra traduzione.

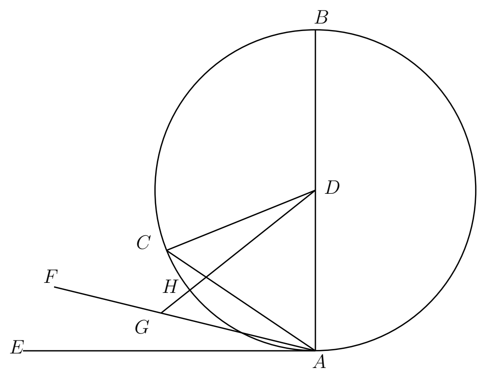


Figura 10: La tangente alla circonferenza (Euclide, *Elementi*, III.16)

3.1 La tangente alla circonferenza

Il libro III degli *Elementi* è dedicato allo studio della circonferenza. Per i nostri interessi, in particolare, sono importanti le proposizioni dalla 16 alla 19 ma soprattutto la 16, proposizione cardine nella teoria euclidea dalla tangenza. Si tratta di un enunciato abbastanza complesso che possiamo per comodità suddividere in due parti:

Enunciato parte 1. *La retta perpendicolare al diametro di una circonferenza in un suo estremo cadrà fuori dal cerchio.*

Enunciato parte 2. *Nello spazio fra la retta e la circonferenza non può essere inserita un'altra retta.*

Dimostrazione parte 1. Sia ABC una circonferenza di centro D e diametro AB. Sia EA la perpendicolare ad AB in A. Dico che EA cadrà fuori del cerchio. Supponiamo per assurdo che cada all'interno come CA. Ora siccome $DA = DC$ il triangolo DAC ha due angoli retti il che è assurdo. In questa proposizione in pratica la nozione di tangenza viene enunciata come "cadere fuori", siccome la retta EA cade fuori dal cerchio ma lo incontra anche in A è proprio la tangente, secondo la definizione euclidea riportata sopra.

Dimostrazione parte 2. Supponiamo per assurdo che sia possibile inserire un'altra retta FA tra la circonferenza e la retta EA. Si tracci dal centro D la retta DG perpendicolare a FA e sia H il punto in cui DG taglia la circonferenza. A questo punto, consideriamo il triangolo DAG. Abbiamo che AD è maggiore di GD (perché opposto ad angolo maggiore) ma $AD = HD$ e quindi HD è maggiore di GD il che è assurdo (perché?).

$\blacksquare$

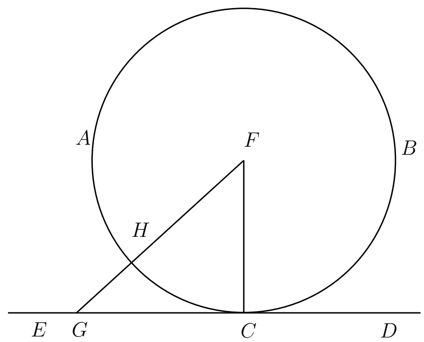


Figura 11: La tangente alla circonferenza (Euclide, *Elementi*, III.18)

Nella proposizione successiva (III.17) Euclide insegna come tracciare la tangente a una circonferenza data, nella III.18, infine, dimostra che il segmento tracciato dal centro della circonferenza (quindi un raggio) al punto di contatto è perpendicolare alla tangente.

Dimostrazione.

Sia DE la tangente alla circonferenza ABC di centro F nel punto C e si tracci FC. Dico che FC è perpendicolare a DE. Supponiamo per assurdo che non sia così, si tracci allora da F il segmento FG perpendicolare a DE e sia H la sua intersezione con la circonferenza. Allora FC è maggiore di FG (perché $\widehat{FGC}$ è maggiore di $\widehat{FCG}$) e quindi anche FH è maggiore di FG il che è impossibile.

■

Riassumendo, Euclide prima definisce la tangente come la retta che incontra la circonferenza in un solo punto, dopodiché dimostra:

1. la perpendicolare al diametro condotta per un suo estremo è una tangente (nel senso detto prima, cioè tutta esterna alla circonferenza tranne in un punto); inoltre

2. è unica, cioè che non esiste un'altra retta che passi per lo stesso punto e che sia tutta esterna alla circonferenza.

Le proposizioni successive servono solo a caratterizzare in maniera operativa la tangente. Ma il cuore concettuale sta nella III.16. Vedremo nella prossima sezione come questi passaggi siano ripresi, estesi e adeguati alla nuova situazione da Apollonio per poter affrontare la tangente nel caso della parabola.

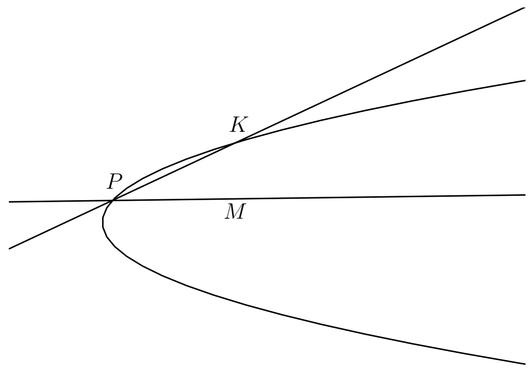


Figura 12: La tangente alla parabola (Apollonio, *Coniche*, I.17)

3.2 La tangente alla parabola

Facciamo precedere ai teoremi sulla tangente alla parabola una proposizione (senza soffermarci sulla dimostrazione) dedicata a stabilire la convessità della sezione conica.

Coniche, proposizione I.10 *Se si prendono due punti su una sezione conica, la retta che li congiunge cadrà all'interno della sezione, il suo prolungamento cadrà tutto all'esterno.*

3.3 Coniche, proposizioni I.17 e I.32

Se si traccia una retta passante per l'estremo del diametro di una qualsiasi conica, parallela alle ordinate relative a quel diametro, allora:

1. *la retta sarà tangente alla conica (nel senso che "cadrà tutta fuori");*
2. *nessun altra retta potrà essere inserita nello spazio fra la tangente e la conica.*

Dimostrazione, parte 1. Per prima cosa dimostriamo che la linea retta così tracciata cade fuori della conica. (prop. 17)

Se così non fosse, supponiamo che la retta intersechi la conica, come il segmento PK, e sia PM il diametro dato. Allora la retta KP, tracciata da un punto K sulla conica in maniera parallela alle ordinate relative a PM, incontrerà il diametro PM e ne sarà bisecata in P. La linea PK, però, se

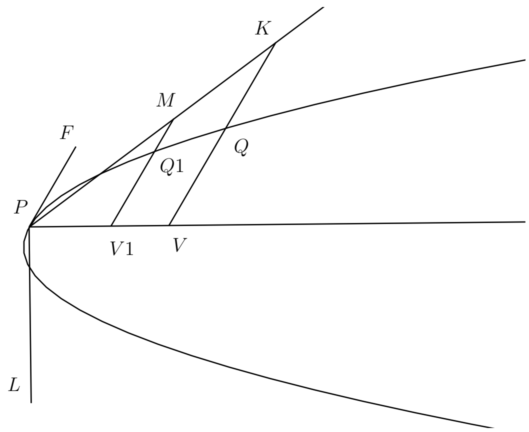


Figura 13: La tangente alla parabola (Apollonio, *Coniche*, I.32)

prolungata, cadrà fuori della conica (prop. 10) e quindi non è possibile che sia bisecata in P.

La linea retta PK deve perciò cadere tutta fuori della sezione conica.

■

Dimostrazione, parte 2. Rimane da dimostrare che nessuna altra retta può cadere tra la retta tracciata come detto e la sezione conica. (prop. 32)

Considereremo solo il caso della parabola.

Sia PL il lato retto della parabola. Sia PF la retta parallela alle ordinate relative al diametro PV. Si supponga che sia possibile inserire una retta PK tra PF e la parabola, e si tracci KV parallelamente alle ordinate e KV incontri la parabola in Q. Si avrà:

$$\begin{aligned} KV^2 : PV^2 &> QV^2 : PV^2 = && (KV > QV) \\ &= PL \times PV : PV^2 = && (\text{prop. } 11) \\ &= PL : PV. \end{aligned}$$

Si prenda il punto V_1 sul diametro PV tale che $KV^2 : PV^2 = PL : PV_1$. Si tracci ora la retta V_1Q_1M parallela a QV, che incontri la parabola nel punto Q_1 e la retta PK nel punto M. Allora

$$KV^2 : PV^2 = PL : PV_1$$

$$\begin{aligned} &= PL \times PV_1 : PV_1^2 \\ &= Q_1V_1^2 : PV_1^2 \qquad \text{(prop. 11);} \end{aligned}$$

e, per parallelismo, $KV^2 : PV^2 = MV_1^2 : PV_1^2$.

Quindi:

$$MV_1^2 : PV_1^2 = Q_1V_1^2 : PV_1^2$$

da cui $MV_1 = Q_1V_1$.

Quindi PK interseca la parabola in Q_1 e non cade fuori di essa, contrariamente a quanto supposto. Di conseguenza nessuna retta può cadere fra PF e la parabola.

■

Si può notare lo stretto parallelismo con quanto visto in Euclide: la tangente come nozione di retta che "cade tutta fuori" dalla curva, ma subito descrizione della retta tangente come retta "più vicina" alla sezione (nel senso che nessun altra retta può stare nello spazio fra retta e curva). Apollonio deve adesso fornire un metodo pratico per la determinazione della tangente. A questo problema sono dedicate le proposizioni 33 e 35.

Coniche, proposizioni I.33 e I.35

Se si prende un punto T sul diametro di una parabola, fuori della curva, tale che $TP = PV$ (dove V è il piede dell'ordinata tracciata dal punto Q al diametro PV) allora la retta TQ è tangente alla parabola (prop. 33). Viceversa, se la retta TQ è tangente alla parabola, $TP = PV$ (prop. 35)[5].

Dimostrazione. Dimostriamo che, se $TP = PV$, la retta TQ (o il suo prolungamento) non cade dentro la parabola da nessuna parte rispetto a Q.

Se fosse possibile, sia K un punto su TQ (o sul suo prolungamento) interno alla curva, e per K si tracci Q_1KV_1 parallelamente a un'ordinata e che incontri il diametro nel punto V_1 e la curva nel punto Q_1. Allora:

[5] Si usa anche esprimere questa proprietà della tangente alla parabola dicendo che la *sottotangente* (TV) è doppia del *piede dell'ordinata* (PV).

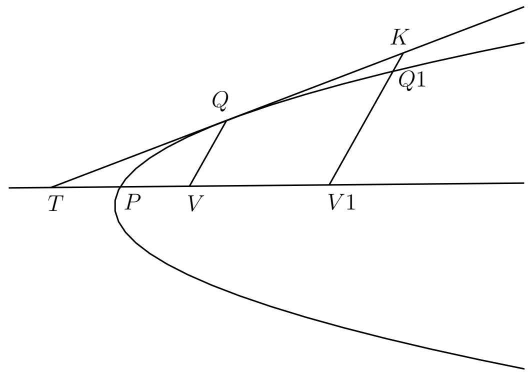


Figura 14: La tangente alla parabola (Apollonio, *Coniche*, I.33-35)

$$\begin{aligned} Q_1V_1^2 : QV^2 &> KV_1^2 : QV^2 = && \text{(per ipotesi)} \\ &= TV_1^2 : TV^2 && \text{(triangoli simili);} \end{aligned}$$

e quindi dato che $Q_1V_1^2 : QV^2 = PV_1 : PV$ (prop. 11) otteniamo:

$$PV_1 : PV \quad > \quad TV_1^2 : TV^2.$$

L'ultima relazione può essere scritta in questa forma:

$$4\,TP \times PV_1 : 4\,TP \times PV > TV_1^2 : TV^2,$$

e dato che $TP = PV$, si ottiene $4\,(TP \times PV) = TV^2$; da cui:

$$4\,(TP \times PV_1) \quad > \quad TV_1{}^2.$$

Ma, poiché per ipotesi TV_1 non è bisecato in P,

$$4\,(TP \times PV_1) \quad < \quad TV_1^2.$$

che è assurdo[6]. Perciò nessun punto della retta TQ può cadere dentro la parabola, e quindi TQ è tangente.

■

[6]Infatti se W è un punto qualunque del diametro, $4(TP \times PW)$ ha il suo massimo per $TP = PW$ e questo massimo è proprio $(TP + PW)^2 = TW^2$. Ma $TP = PW$ per $W = V$ e $V_1 \neq V$.