

# Meccanica dei Fluidi

Alessandra Borrelli  
Dipartimento di Matematica e Informatica  
Università degli Studi di Ferrara  
brs@unife.it

2015/2016, 2016/17



# Indice

<b>1</b>	<b>Corpi continui deformabili: cinematica</b>	<b>1</b>
1.1	Definizione di corpo continuo . . . . .	1
1.2	Cinematica dei corpi continui . . . . .	3
1.3	Traiettorie, linee di flusso, moto stazionario. . . . .	22
1.4	Teorema del trasporto della circolazione, moti piani . . . . .	32
<b>2</b>	<b>Corpi continui deformabili: cinetica, dinamica e termodinamica</b>	<b>43</b>
2.1	Cinetica. . . . .	43
2.2	Dinamica . . . . .	49
2.3	Termodinamica . . . . .	58
2.4	Problema termomeccanico per un corpo continuo . . . . .	67
<b>3</b>	<b>Fluidi perfetti</b>	<b>71</b>
3.1	Fluidi propriamente detti e fluidi perfetti . . . . .	71
3.2	Problema del moto per un fluido perfetto . . . . .	77
3.3	Fluidi perfetti barotropici e gas perfetti . . . . .	82
3.4	Alcune proprietà dei fluidi perfetti in quiete. . . . .	85
3.5	Altre proprietà dei fluidi perfetti. . . . .	93
<b>4</b>	<b>Fluidi viscosi classici</b>	<b>99</b>
4.1	Equazioni costitutive dei fluidi viscosi classici. . . . .	99
4.2	Compatibilità delle equazioni costitutive dei fluidi viscosi classici con il II assioma della termodinamica. . . . .	103
4.3	Impostazione del problema del moto per un fluido viscoso classico compressibile. . . . .	109
4.4	Impostazione del problema del moto per un fluido viscoso classico incompressibile. Differenze di comportamento rispetto ai fluidi perfetti incompressibili. . . . .	113

<b>5</b>	<b>Problema ai limiti classico per un fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo</b>	<b>119</b>
5.1	Impostazione del problema. . . . .	119
5.2	Risultati preliminari. . . . .	120
5.3	Teorema di unicità. . . . .	123
5.4	Teorema di stabilità. . . . .	131
<b>6</b>	<b>Moto di Poiseuille e di Poiseuille-Couette per un fluido newtoniano incomprimibile</b>	<b>135</b>
6.1	Premesse. . . . .	135
6.2	Moto di Poiseuille tra due piani paralleli. . . . .	136
6.3	Moto di Poiseuille-Couette tra due piani paralleli. . . . .	144
<b>7</b>	<b>Moti indotti da un piano rotante per un fluido newtoniano incomprimibile</b>	<b>151</b>
7.1	Premesse . . . . .	151
7.2	Soluzioni non simmetriche . . . . .	155
<b>8</b>	<b>Moti con punti di ristagno per un fluido newtoniano</b>	<b>167</b>
8.1	Premesse . . . . .	167
8.2	Moto piano ortogonale con punti di ristagno per un fluido perfetto incomprimibile . . . . .	168
8.3	Moto piano ortogonale con punti di ristagno per un fluido newtoniano incomprimibile: impostazione del problema . . . . .	172
8.4	Moto piano ortogonale con punti di ristagno per un fluido newtoniano : risultati analitici e numerici . . . . .	178
<b>9</b>	<b>Magnetofluidodinamica</b>	<b>187</b>
9.1	Brevi richiami di elettromagnetismo . . . . .	187
9.2	Elementi di magnetofluidodinamica . . . . .	191
9.3	Moto di Hartmann per un fluido newtoniano incomprimibile . . .	196
9.4	Appendice sulle unità di misura. . . . .	207

# Capitolo 1

## Corpi continui deformabili: cinematica

### 1.1 Definizione di corpo continuo

La Fisica Matematica si propone di ricondurre lo studio dei fenomeni fisici a problemi matematici, cioè problemi che si affrontano mediante strumenti dell'Analisi, della Geometria, dell'Algebra, dell'Analisi Numerica. Un particolare fenomeno fisico studiato dalla Fisica matematica è il moto dei corpi reali; a tal fine vengono introdotti dei modelli matematici atti a schematizzarne il comportamento. Un modello importante è quello del corpo continuo che è applicabile ai corpi reali quando si studiano fenomeni fisici nei quali non interviene la natura particellare della materia.

Vediamo di dare la definizione di *corpo continuo tridimensionale*.

Teniamo presente che i corpi reali sono caratterizzati dal fatto che occupano determinate regioni dello spazio fisico e che sono dotati di una particolare struttura materiale. Dunque una definizione matematica di corpo continuo deve tenere conto di queste due proprietà.

**Definizione 1.1.** *Definiamo corpo continuo tridimensionale ogni terna  $(\mathcal{C}, \mathcal{A}, m)$ , dove:*

- $\mathcal{C}$  è uno spazio topologico dotato di una famiglia  $\Phi$  di omomorfismi del tipo  
 $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow S_\varphi$  con  $S_\varphi$  chiusura di un aperto dello spazio geometrico;
- $\mathcal{A}$  è la  $\sigma$ -algebra di Borel dello spazio topologico  $\mathcal{C}$ ;
- $m$  è una misura, che prende il nome di distribuzione di massa.

Ogni omeomorfismo  $\varphi$  è detto *configurazione possibile* per il corpo continuo,  $S_\varphi = \varphi(\mathcal{C})$  è detta *regione occupata da  $\mathcal{C}$  nella configurazione  $\varphi$*  e  $\Phi$  rappresenta la *famiglia delle configurazioni possibili del corpo continuo*.

(Per le definizioni di spazio topologico,  $\sigma$ -algebra,  $\sigma$ -algebra di Borel e misura si rimanda all'Appendice 2).

**Osservazione 1.1.** Si noti che aver associato a  $\mathcal{C}$  la famiglia delle sue possibili configurazioni tiene conto del fatto che i corpi reali occupano determinate regioni dello spazio geometrico, mentre la distribuzione di massa  $m$  è correlata alla struttura materiale del corpo reale che rappresentiamo con il modello del corpo continuo.

Osserviamo inoltre che la distribuzione di massa di un corpo continuo è indipendente dalle sue possibili configurazioni.

**Definizione 1.2.** *Preso un sottoinsieme  $A \in \mathcal{A}$ , definiamo  $m(A)$  massa di  $A$  e, in particolare,  $m(\mathcal{C})$  è detta massa totale del corpo continuo.*

Nel seguito per brevità denoteremo un corpo continuo semplicemente con  $\mathcal{C}$ .

**Definizione 1.3.** *Un sottocorpo di un corpo continuo  $\mathcal{C}$  è un qualsiasi suo sottoinsieme  $\mathcal{C}^*$  che sia la chiusura di un aperto.*

Si prova che ad ogni sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  si può far assumere la struttura di corpo continuo tridimensionale.

**Definizione 1.4.** *Gli elementi di un corpo continuo  $\mathcal{C}$  sono detti particelle di  $\mathcal{C}$  e li denoteremo con  $X, Y, Z, \dots$*

**Definizione 1.5.** *Se  $\varphi$  è una configurazione possibile per il corpo continuo  $\mathcal{C}$  e  $X$  è una particella di  $\mathcal{C}$ , il punto  $P = \varphi(X) \in S_\varphi$  è detto *posizione occupata dalla particella  $X$  nella configurazione  $\varphi$* .*

Essendo  $\varphi$  un omeomorfismo, si ha:

$$P = \varphi(X) \iff X = \varphi^{-1}(P).$$

Si potrebbe dare anche la definizione di corpo continuo bidimensionale o unidimensionale, ma su ciò non insistiamo.

**Definizione 1.6.** *Diciamo che il corpo continuo  $\mathcal{C}$ , dotato della famiglia  $\Phi$  delle sue possibili configurazioni, è rigido se  $\forall \varphi, \varphi' \in \Phi$ , si ha:*

$$|\varphi(X) - \varphi(X^*)| = |\varphi'(X) - \varphi'(X^*)| \quad \forall X, X^* \in \mathcal{C}.$$

Dunque se  $\mathcal{C}$  è un corpo rigido, prese due sue qualsiasi configurazioni possibili, per ogni coppia di particelle la distanza tra le posizioni che queste occupano in entrambe le configurazioni è la stessa.

**Definizione 1.7.** *Se il corpo continuo  $\mathcal{C}$  non è rigido, diciamo che  $\mathcal{C}$  è un corpo continuo deformabile.*

Noi ci occuperemo della meccanica dei corpi continui deformabili.

## 1.2 Cinematica dei corpi continui

Per studiare il moto di un corpo continuo occorre in primo luogo fissare un osservatore. Sia  $[O, (\vec{e}_i)]$  il riferimento cartesiano ortonormale associato all'osservatore.

**Definizione 1.8.** *Dato un corpo continuo  $\mathcal{C}$ , chiamiamo moto di  $\mathcal{C}$  nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  rispetto all'osservatore fissato una qualsiasi famiglia di possibili configurazioni  $\{\varphi_t\}_{t \in [t_0, t_1]}$ .*

La regione occupata da  $\mathcal{C}$  all'istante  $t$ , ossia nella configurazione  $\varphi_t$ , con  $t \in [t_0, t_1]$ , è denotata con  $S(t)$ .

Ovviamente il moto di  $\mathcal{C}$  è noto se ad ogni istante è nota la posizione occupata da ogni sua particella.

Dunque il moto di  $\mathcal{C}$  nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  è descritto dall'equazione puntuale:

$$P = \varphi_t(X) \quad \forall X \in \mathcal{C}, \forall t \in [t_0, t_1]$$

che fornisce la posizione occupata dalla particella  $X$  all'istante  $t$ .

Nel seguito per motivi di convenienza useremo la seguente notazione:

$$\varphi(X, t) = \varphi_t(X)$$

per cui  $t$  non viene più riguardato come un parametro, ma come una variabile indipendente. Dunque l'equazione precedente assume la forma:

$$P = \varphi(X, t) \quad \forall (X, t) \in \mathcal{C} \times [t_0, t_1]. \quad (1.2.1)$$

D'altra parte, presa una qualsiasi particella  $X$ , siano  $\varphi_i(X, t)$   $i = 1, 2, 3$  le applicazioni (a valori reali) che forniscono le coordinate  $x_i$  della posizione occupata dalla particella  $X$  all'istante  $t$ .

Allora il moto di  $\mathcal{C}$  nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  può anche essere descritto mediante le tre equazioni scalari:

$$x_i = \varphi_i(X, t) \quad \forall (X, t) \in \mathcal{C} \times [t_0, t_1] \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.2.2)$$

Inoltre, presa una qualsiasi particella  $X$ , possiamo anche introdurre il vettore posizione rispetto ad  $O$  della posizione  $P$  occupata da  $X$  all'istante  $t$ :

$$P - O = \varphi_i(X, t) \vec{e}_i =: \vec{\varphi}(X, t)$$

dove  $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(X, t)$  è un'applicazione vettoriale definita in  $\mathcal{C} \times [t_0, t_1]$ . Perciò il moto di  $\mathcal{C}$  nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  può anche essere descritto mediante l'equazione vettoriale:

$$P - O = \vec{\varphi}(X, t) \quad \forall (X, t) \in \mathcal{C} \times [t_0, t_1]. \quad (1.2.3)$$

In conclusione il moto del corpo continuo può essere descritto in uno dei tre modi seguenti

- mediante l'equazione puntuale:

$$P = \varphi(X, t) \quad \forall (X, t) \in \mathcal{C} \times [t_0, t_1]$$

che ci fornisce direttamente la posizione occupata all'istante  $t$  dalla particella  $X$ ;

- mediante l'equazione vettoriale

$$P - O = \vec{\varphi}(X, t) \quad \forall (X, t) \in \mathcal{C} \times [t_0, t_1].$$

che ci dà il vettore posizione rispetto all'origine del riferimento della posizione occupata all'istante  $t$  dalla particella  $X$ ;

- mediante le tre equazioni scalari

$$x_i = \varphi_i(X, t) \quad \forall (X, t) \in \mathcal{C} \times [t_0, t_1] \quad i = 1, 2, 3$$

che forniscono le coordinate cartesiane della posizione occupata all'istante  $t$  dalla particella  $X$ .

Tutte le funzioni al secondo membro delle equazioni scritte sopra hanno come variabili indipendenti  $X$  e  $t$ . Tuttavia è conveniente assumere come variabile indipendente non la generica particella del corpo continuo, ma la sua posizione in una configurazione fissata, detta *configurazione di riferimento*.

Fissiamo dunque una configurazione  $\varphi_0 \in \Phi$  che assumiamo come configurazione di riferimento. Tale configurazione non deve necessariamente coincidere con una configurazione assunta dal corpo continuo durante il moto, ma è del tutto arbitraria. Talvolta può essere opportuno scegliere come configurazione di riferimento

la configurazione di  $\mathcal{C}$  all'istante  $t_0$ , cioè all'istante iniziale del moto.

La configurazione di riferimento  $\varphi_0$  sia l'applicazione

$$\begin{aligned}\varphi_0 : \mathcal{C} &\longrightarrow S_0 \\ X &\longmapsto P_0 = \varphi_0(X).\end{aligned}$$

Poiché, per definizione di configurazione,  $\varphi_0$  è un omeomorfismo, ammette inversa ed abbiamo:

$$P_0 = \varphi_0(X) \iff X = \varphi_0^{-1}(P_0).$$

Ciò consente di far comparire nella (5.1), anziché la generica particella  $X$ , la posizione  $P_0$  che questa occupa nella configurazione di riferimento.

Infatti poniamo:

$$\forall (P_0, t) \in S_0 \times [t_0, t_1] \quad x(P_0, t) = \varphi(\varphi_0^{-1}(P_0), t).$$

Allora la (5.1) si può scrivere come:

$$P = x(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in S_0 \times [t_0, t_1].$$

Se poi, per brevità, introduciamo la notazione:

$$\mathcal{S}_0 := S_0 \times [t_0, t_1],$$

l'equazione puntuale assume la forma:

$$P = x(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0.$$

Analogamente si può operare per l'equazione vettoriale (1.2.2). In tal caso si pone:

$$\forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \quad \vec{x}(P_0, t) = \vec{\varphi}(\varphi_0^{-1}(P_0), t).$$

Allora la (1.2.2) si può scrivere come:

$$P - O = \vec{x}(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0.$$

Consideriamo la rappresentazione analitica del campo vettoriale dipendente da una variabile reale  $\vec{x} = \vec{x}(P_0, t)$ , definito in  $\mathcal{S}_0$ :

$$\vec{x} = \vec{x}(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t)$$

dove  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$  è la terna delle coordinate del punto  $P_0$  ed abbiamo ommesso, per brevità, l'apice  $^o$  con il quale contraddistinguiamo usualmente la rappresentazione analitica in un riferimento cartesiano di un campo scalare, vettoriale o

tensoriale (Vedi Appendice 1).

Ricordiamo che, fissato il riferimento  $[O, (\vec{e}_i)]$ , resta definita l'applicazione:

$$\begin{aligned} \xi : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P(x_i) &\longmapsto x = (x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Ovviamente avremo:

$$P_0(x_{0i}) \in S_0 \implies (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in \xi(S_0) \subset \mathbb{R}^3.$$

Dunque  $\vec{x} = \vec{x}(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t)$  è una funzione vettoriale di quattro variabili reali definita in  $\xi(S_0) \times [t_0, t_1]$ .

Per brevità poniamo:

$$\xi(\mathcal{S}_0) := \xi(S_0) \times [t_0, t_1].$$

A questo punto, nelle equazioni scalari (1.2.2) al secondo membro sostituiamo le componenti della rappresentazione analitica del campo  $\vec{x} = \vec{x}(P_0, t)$  per cui, in luogo delle (1.2.2), possiamo scrivere le tre equazioni:

$$x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \quad \forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \in \xi(\mathcal{S}_0).$$

In conclusione, se viene fissata una configurazione di riferimento, un moto di un corpo continuo può essere descritto in uno dei tre modi seguenti

- mediante l'equazione puntuale:

$$P = x(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \quad (1.2.4)$$

che ci fornisce direttamente la posizione occupata all'istante  $t$  dalla particella che nella configurazione di riferimento occupa la posizione  $P_0$ ;

- mediante l'equazione vettoriale

$$P - O = \vec{x}(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \quad (1.2.5)$$

che ci dà il vettore posizione rispetto all'origine del riferimento della posizione occupata all'istante  $t$  dalla particella che nella configurazione di riferimento occupa la posizione  $P_0$ ;

- mediante le tre equazioni scalari

$$x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \in \xi(\mathcal{S}_0) \quad (1.2.6)$$

che forniscono le coordinate cartesiane della posizione occupata all'istante  $t$  dalla particella che nella configurazione di riferimento occupa la posizione di coordinate cartesiane  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$ .

**Osservazione 1.2.** Fissato  $t \in [t_0, t_1]$ , indichiamo con  $x(., t)$  l'applicazione:

$$\begin{aligned} x(., t) : S_0 &\longrightarrow S(t) \\ P_0 &\longmapsto P = x(P_0, t). \end{aligned}$$

Tale applicazione è un omeomorfismo, essendo ottenuta componendo due omeomorfismi:

$$x(., t) = \varphi(\varphi_0^{-1}(.), t) = \varphi_t \circ \varphi_0^{-1}(.)$$

Quindi, per ogni  $t$  fissato in  $[t_0, t_1]$ , l'applicazione  $x(., t)$  ammette inversa  $x^{-1}(., t)$ , per cui

$$\forall t \text{ fissato in } [t_0, t_1] \quad P = x(P_0, t) \iff P_0 = x^{-1}(P, t).$$

**Definizione 1.9.** Il moto di un corpo continuo è detto regolare se sono soddisfatte le due seguenti condizioni:

- 1)  $\vec{x} \in \mathcal{C}^2(\mathcal{S}_0)$  o equivalentemente  $x_i \in \mathcal{C}^2(\xi(\mathcal{S}_0))$   $i = 1, 2, 3$ ;
- 2)  $J(P_0, t) = \det \left[ \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}} \right] (x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) > 0 \quad \forall P_0(x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in S_0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]$ .

Nel seguito considereremo sempre moti regolari.

**Osservazione 1.3.** Se  $\varphi_0 = \varphi_{t_0}$ , ossia se si assume come configurazione di riferimento quella iniziale del moto e vale la 1), alla condizione 2) possiamo sostituire la condizione:

$$2') \quad J(P_0, t) \neq 0 \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0.$$

Infatti, come ora proveremo, dalla 2') discende la 2).

Consideriamo  $J(P_0, t_0)$  e teniamo presente che, essendo  $\varphi_0 = \varphi_{t_0}$ , abbiamo dalle (1.2.6):

$$x_{0i} = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t_0).$$

Dunque all'istante  $t = t_0$  le funzioni  $x_i$  assumono il valore  $x_{0i}$  per  $i = 1, 2, 3$  e perciò:

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}}(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t_0) = \delta_{ij} \quad \forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in \xi(S_0).$$

Segue

$$J(P_0, t_0) = 1 \quad \forall P_0 \in S_0.$$

D'altra parte, valendo la condizione 1),  $J \in \mathcal{C}(\mathcal{S}_0)$ , per cui, grazie alla continuità, se  $J$  è positivo in  $S_0$  all'istante iniziale  $t_0$  e sussiste la 2'),  $J$  si manterrà positivo

in  $S_0 \forall t \in [t_0, t_1]$ , come volevamo dimostrare.

**Osservazione 1.4.** Come abbiamo precedentemente osservato, fissato  $t \in [t_0, t_1]$ , l'applicazione  $x(\cdot, t)$  è un omeomorfismo e quindi stabilisce una corrispondenza biunivoca tra  $S_0$  e  $S(t)$ . Ne segue che le (1.2.6) vengono a stabilire una corrispondenza biunivoca tra  $\xi(S_0)$  e  $\xi(S(t))$ . Se il moto è regolare, noti risultati di Analisi Matematica ci consentono di concludere che, fissato  $t \in [t_0, t_1]$ , le equazioni  $x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t)$  sono invertibili e possiamo quindi esprimere le  $x_{0i}$  in funzione di  $(x_1, x_2, x_3, t)$ :

$$x_{0i} = x_{0i}(x_1, x_2, x_3, t) \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \xi(S(t)), \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Le funzioni  $x_{0i}$  godono delle stesse proprietà di regolarità delle  $x_i$ , ovviamente con le opportune modifiche.

Dato un corpo continuo in moto nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , introduciamo per brevità le seguenti notazioni:

$$\mathcal{S} = \{(P, t) \in \mathcal{E} \times \mathbb{R} \mid P \in S(t), t \in [t_0, t_1]\};$$

$$\xi(\mathcal{S}) = \{(x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^4 \mid (x_1, x_2, x_3) \in \xi(S(t)), t \in [t_0, t_1]\}.$$

Sia  $\mathcal{C}$  un corpo continuo in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ . Come abbiamo visto, il moto può essere descritto mediante l'equazione:

$$P - O = \vec{x}(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0.$$

**Definizione 1.10.** *Definiamo velocità all'istante  $t$  della particella  $X$  del corpo continuo che nella configurazione di riferimento occupa la posizione  $P_0$  la derivata rispetto al tempo del campo vettoriale  $\vec{x}$  in  $(P_0, t)$ :*

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}(P_0, t) =: \dot{\vec{x}}(P_0, t).$$

Poiché  $\vec{x} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S}_0)$ , istante per istante possiamo considerare la velocità di ogni particella. Risulta quindi definito in  $\mathcal{S}_0$  il campo vettoriale dipendente dalla variabile reale  $t$ :

$$\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}(P_0, t),$$

che ad ogni istante  $t$  durante il moto fornisce la velocità di ogni particella del corpo continuo in funzione della posizione che questa occupa nella configurazione di riferimento.

D'altra parte, al campo vettoriale  $\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}(P_0, t)$  definito in  $\mathcal{S}_0$  possiamo associare un nuovo campo vettoriale  $\vec{v} = \vec{v}(P, t)$  definito in  $\mathcal{S}$  nel modo seguente:

$$\forall (P, t) \in \mathcal{S} \quad \vec{v}(P, t) = \dot{\vec{x}}(x^{-1}(P, t), t),$$

essendo  $P$  la posizione occupata all'istante  $t$  dalla particella che nella configurazione di riferimento occupa la posizione  $P_0$ .

Mettiamo in rilievo la differenza tra i due campi  $\vec{x}$  e  $\vec{v}$ :

$\vec{x}(P_0, t)$  è la velocità all'istante  $t$  della particella che nella configurazione di riferimento occupa la posizione  $P_0$ , mentre  $\vec{v}(P, t)$  è la velocità all'istante  $t$  della particella che in tale istante occupa la posizione  $P$ .

Poichè  $\vec{x}$  e  $\vec{v}$  sono campi vettoriali, dipendenti anche da  $t$ , possiamo considerarne la rappresentazione analitica nel riferimento associato all'osservatore:

$$\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t),$$

funzione vettoriale di quattro variabili reali definita in  $\xi(\mathcal{S}_0)$ ;

$$\vec{v} = \vec{v}(x_1, x_2, x_3, t),$$

funzione vettoriale di quattro variabili reali definita in  $\xi(\mathcal{S})$ .

Ovviamente delle rappresentazioni analitiche si possono prendere in considerazione anche le componenti:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \dot{x}_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) & \forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \in \xi(\mathcal{S}_0), \\ v_i &= v_i(x_1, x_2, x_3, t) & \forall (x_1, x_2, x_3, t) \in \xi(\mathcal{S}). \end{aligned}$$

Abbiamo dunque mostrato che la velocità delle particelle nel moto di un corpo continuo si può rappresentare mediante un campo vettoriale, dipendente da  $t$ , definito in  $\mathcal{S}_0$  o un campo vettoriale, dipendente da  $t$ , definito in  $\mathcal{S}$ .

Ciò che abbiamo visto riguardo la velocità delle particelle si può estendere a qualsiasi grandezza fisica scalare, vettoriale o tensoriale legata al moto del corpo continuo.

Ogni grandezza infatti si può rappresentare mediante un campo (scalare, vettoriale o tensoriale), dipendente anche da  $t$ , definito in  $\mathcal{S}_0$  o definito in  $\mathcal{S}$ . Nel primo caso, nello studio del moto si utilizzano come variabili indipendenti la posizione  $P_0$  occupata dalla generica particella nella configurazione di riferimento e il tempo  $t$ ; nel secondo caso le variabili indipendenti sono la posizione  $P$  occupata dalla generica particella all'istante  $t$  e il tempo  $t$ . Se ci rifacciamo alle rappresentazioni analitiche dei campi, nel primo caso le variabili indipendenti sono la successione  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$  delle coordinate cartesiane della posizione  $P_0$  occupata dalla generica particella nella configurazione di riferimento e il tempo  $t$ , mentre nel secondo sono la successione  $(x_1, x_2, x_3)$  delle coordinate cartesiane della posizione  $P$  occupata dalla generica particella all'istante  $t$  e il tempo  $t$ .

**Definizione 1.11.** *Ogni campo scalare, vettoriale o tensoriale, che interviene nello studio del moto del corpo continuo, definito in  $\mathcal{S}_0$  o in un suo sottoinsieme,*

è detto *campo materiale* (o *lagrangiano*).

Ogni campo scalare, vettoriale o tensoriale, che interviene nello studio del moto del corpo continuo, definito in  $\mathcal{S}$  o in un suo sottoinsieme, è detto *campo spaziale* (o *euleriano*).

Vediamo di meglio comprendere la differenza tra campo materiale e campo spaziale.

Sia dato un corpo continuo  $\mathcal{C}$  in moto nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ .

Rivolgiamo la nostra attenzione ad una grandezza fisica scalare legata a tale moto rappresentata mediante il campo scalare materiale:  $g = g(P_0, t)$ , definito in  $\mathcal{S}_0$ . Fissiamo  $P_0 \in \mathcal{S}_0$ , ossia fissiamo la particella del corpo continuo che nella configurazione di riferimento occupa la posizione  $P_0$ , e consideriamo la funzione del tempo  $g(P_0, \cdot)$  facendo variare  $t$  in  $[t_0, t_1]$ . Tale funzione ci dice come varia la grandezza scalare rappresentata mediante il campo  $g$  al trascorrere del tempo per la particella che occupa la posizione  $P_0$  nella configurazione di riferimento.

Assumiamo ora che la grandezza scalare considerata prima sia rappresentata mediante il campo scalare spaziale  $f = f(P, t)$ , definito in  $\mathcal{S}$ . Fissiamo un punto  $P$  nella regione dello spazio geometrico in cui si muove  $\mathcal{C}$  e consideriamo la funzione del tempo  $f(P, \cdot)$  facendo variare  $t$  in  $[t_0, t_1]$ . Tale funzione ci dice come varia la grandezza scalare rappresentata mediante il campo  $f$  al trascorrere del tempo nel punto  $P$  fissato, che verrà occupato via via da particelle diverse del corpo continuo.

Ciò che abbiamo detto per i campi scalari si estende ovviamente a campi vettoriali e tensoriali.

E' evidente che se una grandezza è rappresentata mediante un campo materiale è sempre possibile rappresentarla mediante un campo spaziale, così come abbiamo visto per la velocità delle particelle. Vale naturalmente anche il viceversa: se una grandezza è rappresentata mediante un campo spaziale possiamo sempre rappresentarla anche mediante un campo materiale.

Vediamo dapprima come si passa dalla rappresentazione materiale a quella spaziale.

Sia data una grandezza scalare rappresentata mediante il campo materiale  $g = g(P_0, t)$ , definito in  $\mathcal{S}_0$ . Vogliamo dedurre la rappresentazione spaziale; questa è il campo spaziale che denotiamo con  $g_s = g_s(P, t)$ , definito in  $\mathcal{S}$ , che si ottiene nel modo seguente:

$$\forall (P, t) \in \mathcal{S} \quad g_s(P, t) = g(x^{-1}(P, t), t),$$

dove abbiamo tenuto presente che per ogni  $t$  fissato in  $[t_0, t_1]$

$$P = x(P_0, t) \quad \iff \quad P_0 = x^{-1}(P, t).$$

Viveversa, sia data una grandezza scalare rappresentata mediante il campo spaziale  $f = f(P, t)$ , definito in  $\mathcal{S}$ . Vogliamo dedurne la rappresentazione materiale; questa è il campo materiale che denotiamo con  $f_m = f_m(P_0, t)$ , definito in  $\mathcal{S}_0$ , che si ottiene nel modo seguente:

$$\forall(P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \quad f_m(P_0, t) = f(x(P_0, t), t).$$

Ciò che abbiamo visto per una grandezza scalare si estende a grandezze vettoriali e tensoriali.

E' facile dimostrare la seguente

**Proposizione 1.1.** *Dato un corpo continuo in moto, se  $f$  è un campo spaziale e  $g$  è un campo materiale, si ha:*

$$(f_m)_s = f \quad e \quad (g_s)_m = g.$$

**Definizione 1.12.** *Se nello studio del moto di un corpo continuo le grandezze che intervengono sono rappresentate dal punto di vista materiale si dice che il moto è studiato dal punto di vista materiale (o lagrangiano).  
Se nello studio del moto di un corpo continuo le grandezze sono rappresentate dal punto di vista spaziale si dice che il moto è studiato dal punto di vista spaziale (o euleriano).*

Quando si studia il moto di un corpo continuo dal punto di vista materiale si segue il moto di ogni particella, mentre quando lo si studia dal punto di vista spaziale si osserva come variano le grandezze legate al moto al trascorrere del tempo in punti fissati della regione dello spazio geometrico in cui il corpo si muove.

E' evidente che se si affrontano problemi tecnici ed ingegneristici si segue il punto di vista spaziale.

Tenendo presente la differenza tra i due punti di vista risultano naturali le due seguenti definizioni.

**Definizione 1.13.** *Si chiamano equazioni del moto di un corpo continuo dal punto di vista materiale i tre tipi di equazioni che abbiamo già considerato in precedenza:*

$$\begin{aligned} P &= x(P_0, t) & \forall(P_0, t) \in \mathcal{S}_0, \\ P - O &= \vec{x}(P_0, t) & \forall(P_0, t) \in \mathcal{S}_0, \\ x_i &= x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \quad i = 1, 2, 3 & \forall(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \in \xi(\mathcal{S}_0). \end{aligned}$$

**Definizione 1.14.** *Si chiamano equazioni del moto di un corpo continuo dal punto di vista spaziale i tre tipi seguenti di equazioni:*

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}(P, t) & \forall (P, t) \in \mathcal{S}, \\ \vec{v} &= \vec{v}(x_1, x_2, x_3, t) & \forall (x_1, x_2, x_3, t) \in \xi(\mathcal{S}), \\ v_i &= v_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad i = 1, 2, 3 & \forall (x_1, x_2, x_3, t) \in \xi(\mathcal{S}). \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Rileviamo che la (1.2.7)<sub>1</sub> fornisce il campo spaziale della velocità, cioè ci dice qual è la velocità all'istante  $t$  della particella che in tale istante occupa la posizione  $P$ , la (1.2.7)<sub>2</sub> ci dà la rappresentazione analitica del campo spaziale della velocità ed infine le (1.2.7)<sub>3</sub> forniscono le componenti della rappresentazione analitica del campo spaziale della velocità.

Vediamo ora come sia possibile passare dalle equazioni del moto di un corpo continuo dal punto di vista materiale a quelle dal punto di vista spaziale e viceversa.

Consideriamo dapprima il passaggio dalle equazioni dal punto di vista materiale a quelle dal punto di vista spaziale.

Partiamo dall'equazione vettoriale:

$$P - O = \vec{x}(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0.$$

Se deriviamo rispetto al tempo il campo vettoriale  $\vec{x} = \vec{x}(P_0, t)$ , otteniamo il campo materiale della velocità:

$$\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}(P_0, t).$$

Di questo possiamo poi dare la rappresentazione spaziale, così come abbiamo visto in precedenza:

$$\vec{v}(P, t) = \dot{\vec{x}}(x^{-1}(P, t), t) \quad \forall (P, t) \in \mathcal{S}.$$

Potremmo anche partire dalle tre equazioni scalari:

$$x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \in \xi(\mathcal{S}_0). \quad (1.2.8)$$

Derivando rispetto al tempo le tre funzioni  $x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t)$ , otteniamo le tre componenti della rappresentazione analitica del campo materiale della velocità:

$$\dot{x}_i = \dot{x}_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t).$$

D'altra parte, come sappiamo, invertendo le (1.2.8), possiamo ricavare le  $x_{0i}$  in funzione di  $x_1, x_2, x_3, t$  e sostituendo tali espressioni nelle  $\dot{x}_i$ , arriviamo alle

equazioni:

$$\forall (x_1, x_2, x_3, t) \in \xi(\mathcal{S})$$

$$v_i(x_1, x_2, x_3, t) = \dot{x}_i(x_{01}(x_1, x_2, x_3, t), x_{02}(x_1, x_2, x_3, t), x_{03}(x_1, x_2, x_3, t), t).$$

Mostriamo ora come sia possibile passare dalle equazioni di moto dal punto di vista spaziale a quelle dal punto di vista materiale.

Prendiamo come configurazione di riferimento quella iniziale, cioè prendiamo  $\varphi_0 = \varphi_{t_0}$ .

Rivolgiamo la nostra attenzione alla particella che all'istante  $t_0$  si trova in  $P_0$  e denotiamo con  $P(t)$  la posizione che tale particella occupa all'istante  $t \in [t_0, t_1]$  per cui  $P(t) = x(P_0, t)$  e  $P(t_0) = P_0$ .

Essendo il moto descritto dal punto di vista spaziale, è noto il campo spaziale della velocità. Se allora la particella all'istante  $t$  si trova in  $P$ , la sua velocità, data da  $\frac{dP}{dt}$ , è uguale a  $\vec{v}(P, t)$ .

Deduciamo perciò che la curva  $P(t)$  che descrive il moto della particella è la curva soluzione del problema di Cauchy in forma vettoriale:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \vec{v}(P, t) \\ P(t_0) = P_0, \end{cases} \quad (1.2.9)$$

che è equivalente al seguente problema di Cauchy in forma scalare

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = v_i(x_1, x_2, x_3, t) & i = 1, 2, 3 \\ x_i(t_0) = x_{0i} & i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (1.2.10)$$

Il sistema è in forma normale e supponiamo che i secondi membri delle tre equazioni soddisfino alle ipotesi del teorema di esistenza ed unicità globale della soluzione del problema di Cauchy relativo all'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ . Allora per risolvere il problema di Cauchy (1.2.10) ci procuriamo dapprima la soluzione generale del sistema che, come è noto, è una terna di funzioni che dipende da tre costanti arbitrarie  $C_1, C_2, C_3$ :

$$x_i = \hat{x}_i(C_1, C_2, C_3, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Determiniamo poi i valori che devono essere attribuiti alle tre costanti in modo che vengano soddisfatte le condizioni iniziali; ovviamente tali valori dipendono dai dati iniziali  $x_{01}, x_{02}, x_{03}$ . Se nella soluzione generale sostituiamo alle tre costanti i valori trovati, otteniamo la soluzione cercata che risulta dipendere oltre che da  $t$  anche da  $x_{01}, x_{02}, x_{03}$ :

$$x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (1.2.11)$$

Le (1.2.11) sono le equazioni cartesiane del moto della particella che all'istante iniziale  $t_0$  occupa la posizione  $P_0$  avente come terna delle sue coordinate cartesiane  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$ . Se facciamo variare  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$  in  $\xi(S_0)$ , determiniamo le equazioni cartesiane del moto di tutte le particelle, ossia otteniamo le equazioni:

$$x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \in \xi(\mathcal{S}_0).$$

Sia dato un corpo continuo  $\mathcal{C}$  in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ . Consideriamo un campo materiale che per semplicità assumiamo scalare:

$$g = g(P_0, t)$$

definito in  $\mathcal{S}_0$  o in un suo sottoinsieme.

**Definizione 1.15.** *Fissato  $P_0$  in  $S_0$ , supponiamo che in corrispondenza di un certo istante  $t \in [t_0, t_1]$  esista la derivata di  $g$  fatta rispetto al tempo. Tale derivata prende il nome di derivata materiale fatta rispetto al tempo del campo materiale  $g$  in  $(P_0, t)$  e viene denotata nel modo seguente:*

$$\frac{\partial g}{\partial t}(P_0, t) =: \dot{g}(P_0, t).$$

Dunque la derivata materiale rispetto al tempo di  $g$  in  $(P_0, t)$  è la derivata rispetto al tempo del campo materiale calcolata all'istante  $t$  fissando la particella che occupa la posizione  $P_0$  nella configurazione di riferimento.

Se  $\dot{g}(P_0, t)$  è definita  $\forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0$  (oppure in un suo sottoinsieme), abbiamo un nuovo campo materiale scalare definito in  $\mathcal{S}_0$  (o in un suo sottoinsieme), il campo della derivata materiale di  $g$  fatta rispetto al tempo:

$$\dot{g} = \dot{g}(P_0, t).$$

**Definizione 1.16.** *Fissato  $t \in [t_0, t_1]$ , supponiamo che in corrispondenza di un certo  $P_0 \in S_0$  il campo  $g$  ammetta gradiente. Tale gradiente prende il nome di gradiente materiale di  $g$  in  $(P_0, t)$  e viene denotato con  $\text{grad}_m g(P_0, t)$  o  $\text{grad}_0 g(P_0, t)$ .*

Se il gradiente materiale di  $g$  esiste per ogni  $(P_0, t) \in \mathcal{S}_0$  (oppure in un suo sottoinsieme), è ivi definito un campo materiale vettoriale, il campo del gradiente materiale di  $g$ , cioè:

$$\text{grad}_m g = \text{grad}_m g(P_0, t) \quad \text{o} \quad \text{grad}_0 g = \text{grad}_0 g(P_0, t).$$

Le due definizioni date per un campo scalare materiale sussistono ovviamente anche per campi vettoriali o tensoriali materiali.

A partire dal campo del gradiente materiale applicato ad un campo vettoriale o tensoriale è possibile costruire altri operatori differenziali del primo ordine applicati a tale campo che vengono detti *operatori differenziali materiali*.

Ovviamente se il campo materiale è sufficientemente regolare, potremmo considerarne derivate materiali rispetto al tempo di ordine 2, 3, ... e gradienti materiali ed altri operatori differenziali materiali di ordine 2, 3, ....

Sia ora dato un campo spaziale, che per semplicità supponiamo scalare, definito in  $\mathcal{S}$  (oppure in un suo sottoinsieme):

$$f = f(P, t).$$

**Definizione 1.17.** *Fissato  $P$  in  $S(t)$  con  $t \in [t_0, t_1]$ , supponiamo che in corrispondenza dell'istante  $t$  esista la derivata di  $f$  rispetto al tempo. Tale derivata viene detta derivata locale di  $f$  fatta rispetto al tempo in  $(P, t)$  ed è denotata nel modo seguente:*

$$\frac{\partial f}{\partial t}(P, t) =: f'(P, t).$$

Tale derivata è detta locale perché è effettuata mettendosi in un punto fissato appartenente alla regione in cui si muove il corpo continuo senza tenere conto del fatto che al trascorrere del tempo tale punto è occupato da particelle diverse.

Se la derivata locale di  $f$  rispetto al tempo esiste per ogni  $(P, t) \in \mathcal{S}$  (o in un suo sottoinsieme), è definito in  $\mathcal{S}$  (o in un suo sottoinsieme) un nuovo campo spaziale scalare, il campo della derivata locale di  $f$  fatta rispetto al tempo:

$$f' = f'(P, t).$$

**Definizione 1.18.** *Fissato  $t \in [t_0, t_1]$ , supponiamo che in corrispondenza di un certo  $P \in S$  il campo  $f$  ammetta gradiente. Tale gradiente prende il nome di gradiente spaziale di  $f$  in  $(P, t)$  e viene denotato con  $\text{grad } f(P, t)$ .*

Se il gradiente spaziale di  $f$  esiste per ogni  $(P, t) \in \mathcal{S}$  (oppure in un suo sottoinsieme), è ivi definito un campo spaziale vettoriale, il campo del gradiente spaziale di  $f$ , cioè:

$$\text{grad } f = \text{grad } f(P, t).$$

Le definizioni date per un campo scalare spaziale si estendono ovviamente anche a campi vettoriali e tensoriali spaziali.

A partire dal campo del gradiente spaziale applicato ad un campo vettoriale o tensoriale spaziale è possibile costruire altri operatori differenziali del primo ordine applicati a tale campo che vengono detti *operatori differenziali spaziali*.

Ovviamente se il campo spaziale considerato è sufficientemente regolare, potremmo considerarne derivate locali rispetto al tempo di ordine 2, 3, ... e gradienti spaziali ed altri operatori differenziali spaziali di ordine 2, 3, ....

Sussiste la seguente

**Proposizione 1.2.** *Dato un corpo continuo in moto regolare, il campo spaziale  $f = f(P, t)$  è di classe  $\mathcal{C}^1$  in  $\mathcal{S}$  se e solo se la sua rappresentazione materiale  $f_m = f_m(P_0, t)$  è di classe  $\mathcal{C}^1$  in  $\mathcal{S}_0$ .*

Tale proposizione continua a valere se sostituiamo  $\mathcal{C}^1$  con  $\mathcal{C}^2$ , oppure  $\mathcal{S}$  con un suo sottoinsieme e  $\mathcal{S}_0$  con il sottoinsieme corrispondente e per campi vettoriali e tensoriali.

Grazie alla proposizione 1.2, deduciamo, che se un corpo continuo si muove di moto regolare, poiché il campo materiale  $\vec{x} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S}_0)$ , allora  $\vec{v} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$ .

Noi abbiamo dato la definizione di derivata materiale rispetto al tempo per un campo materiale, ma in alcune situazioni può essere conveniente determinare la derivata rispetto al tempo di un campo spaziale non tenendo fissi i punti nella regione del moto, come avviene nella derivata locale rispetto al tempo, ma tenendo fisse le particelle, ossia seguendo ogni particella nel suo moto.

**Definizione 1.19.** *Dato il campo spaziale scalare  $f$ , definiamo derivata materiale di  $f$  rispetto al tempo nel modo seguente:*

$$\dot{f} = ((f_m) \cdot)_s.$$

Dunque, presi  $(P, t) \in \mathcal{S}$  e  $(P_0, t) \in \mathcal{S}_0$  in modo tale che  $P_0 = x^{-1}(P, t)$ , abbiamo:

$$\dot{f}(P, t) = \left[ \frac{\partial f_m}{\partial t}(P_0, t) \right]_{P_0 = x^{-1}(P, t)}.$$

Analoga definizione sussiste per un campo vettoriale o tensoriale spaziale.

**Proposizione 1.3.** *La derivata materiale rispetto al tempo commuta con la rappresentazione materiale e spaziale, ossia, dati il campo spaziale  $f$  e il campo materiale  $g$ , si ha:*

$$(\dot{f})_m = (f_m) \cdot \quad (\dot{g})_s = (g_s) \cdot.$$

Per tale motivo poniamo:

$$(\dot{f})_m = (f_m) \cdot =: \dot{f}_m \quad (\dot{g})_s = (g_s) \cdot =: \dot{g}_s.$$

Stabiliamo ora il legame che sussiste tra derivata materiale e derivata locale rispetto al tempo per campi spaziali sufficientemente regolari.

**Proposizione 1.4.** *Dato un corpo continuo in moto regolare e considerato il campo spaziale scalare  $f$  di classe  $\mathcal{C}^1$  in  $\mathcal{S}$  (o in un sottoinsieme di  $\mathcal{S}$ ), si ha:*  
 $\forall (P, t) \in \mathcal{S}$  (o appartenente al sottoinsieme detto sopra)

$$\dot{f}(P, t) = f'(P, t) + \text{grad } f(P, t) \cdot \vec{v}(P, t).$$

Dimostrazione

Per definizione di derivata materiale di un campo spaziale rispetto al tempo, possiamo scrivere:

$\forall (P, t) \in \mathcal{S}$  (o appartenente al sottoinsieme detto sopra)

$$\dot{f}(P, t) = \left[ \frac{\partial f_m}{\partial t}(P_0, t) \right]_{P_0 = x^{-1}(P, t)}.$$

D'altra parte

$$\frac{\partial f_m}{\partial t}(P_0, t) = \frac{\partial f_m^o}{\partial t}(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t),$$

essendo  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$  la successione delle coordinate di  $P_0$ .

D'altra parte,

$\forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \in \xi(\mathcal{S}_0)$

$$f_m^o(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) = f^o(x_1(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t), x_2(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t), x_3(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t), t).$$

Dunque  $f_m^o$  si ottiene componendo la funzione  $f^o$  con le funzioni  $x_i$ .

Applichiamo il teorema di derivazione delle funzioni composte tenendo presente che c'è dipendenza dal tempo sia direttamente sia tramite le funzioni  $x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_m}{\partial t}(P_0, t) &= \frac{\partial f_m^o}{\partial t}(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) = \\ &= \frac{\partial f^o}{\partial t}(x_1(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t), x_2(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t), x_3(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t), t) + \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f^o}{\partial x_i}(x_1(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t), x_2(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t), x_3(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t), t) \frac{\partial x_i}{\partial t}(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(x(P_0, t), t) + \text{grad } f(x(P_0, t), t) \cdot \dot{\vec{x}}(P_0, t) = \\ &= f'(x(P_0, t), t) + \text{grad } f(x(P_0, t), t) \cdot \dot{\vec{x}}(P_0, t). \end{aligned}$$

Allora

$$\left[ \frac{\partial f_m}{\partial t}(P_0, t) \right]_{P_0 = x^{-1}(P, t)} = f'(P, t) + \text{grad } f(P, t) \cdot \vec{v}(P, t)$$

e dunque la proposizione è dimostrata.

**Osservazione 1.5.** Procedendo per componenti si dimostra che la relazione della proposizione precedente vale anche per campi vettoriali e tensoriali.

In particolare, dato un corpo continuo in moto regolare e considerato il campo

vettoriale spaziale  $\vec{u} = \vec{u}(P, t)$  di classe  $\mathcal{C}^1$  in  $\mathcal{S}$  (o in un sottoinsieme di  $\mathcal{S}$ ), si ha:

$\forall (P, t) \in \mathcal{S}$  (o appartenente al sottoinsieme detto sopra)

$$\dot{\vec{u}}(P, t) = \vec{u}'(P, t) + \text{grad } \vec{u}(P, t) \cdot \vec{v}(P, t).$$

In componenti la relazione scritta sopra fornisce:

$$\dot{u}_i = u'_i + u_{i,j} v_j.$$

Introduciamo ora una nuova definizione.

Sia  $\mathcal{C}$  un corpo continuo in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ .

**Definizione 1.20.** *Definiamo accelerazione all'istante  $t$  della particella  $X$  del corpo continuo che nella configurazione di riferimento occupa la posizione  $P_0$  la derivata seconda rispetto al tempo del campo vettoriale  $\vec{x}$  in  $(P_0, t)$ :*

$$\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial t^2}(P_0, t) =: \ddot{\vec{x}}(P_0, t).$$

Poiché  $\vec{x} \in \mathcal{C}^2(\mathcal{S}_0)$ , è definita l'accelerazione di ogni particella ad ogni istante appartenente all'intervallo di moto.

Resta così definito in  $\mathcal{S}_0$  il campo materiale:

$$\ddot{\vec{x}} = \ddot{\vec{x}}(P_0, t).$$

Di tale campo possiamo dare la rappresentazione spaziale che denotiamo con  $\vec{a} = \vec{a}(P, t)$ . Precisamente si ha:

$$\forall (P, t) \in \mathcal{S} \quad \vec{a}(P, t) = \ddot{\vec{x}}(x^{-1}(P, t), t).$$

Dunque:

$$\vec{a} = ((\dot{\vec{x}})')_s.$$

Ma poichè la rappresentazione spaziale commuta con la derivata materiale, deduciamo:

$$\vec{a} = ((\dot{\vec{x}})')_s = ((\dot{\vec{x}})_s)' = \dot{\vec{v}}.$$

L'accelerazione spaziale perciò coincide con la derivata materiale della velocità spaziale e di conseguenza è esprimibile nella forma:

$$\forall (P, t) \in \mathcal{S} \quad \vec{a}(P, t) = \vec{v}'(P, t) + \text{grad } \vec{v}(P, t) \cdot \vec{v}(P, t).$$

Enunciamo, senza dimostrarlo, un teorema che utilizzeremo spesso, il **teorema del trasporto**.

**Teorema 1.1.** *Dato un corpo continuo in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , sia  $f = f(P, t)$  una campo scalare spaziale di classe  $\mathcal{C}^1(\mathcal{S})$ . Allora per ogni sottocorpo  $\mathcal{C}^*$ , indicata con  $S^*(t)$  la regione occupata da  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t$ , si ha:*

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \frac{d}{dt} \int_{S^*(t)} f(P, t) dS = \int_{S^*(t)} \left[ \dot{f}(P, t) + f(P, t) \operatorname{div} \vec{v}(P, t) \right] dS.$$

Il teorema sussiste anche per campi vettoriali e tensoriali spaziali.

Stabiliamo ora un lemma che, come vedremo, giocherà un ruolo importante nel seguito.

**Lemma 1.1.** *Sia  $f = f(P)$  un campo scalare continuo in un aperto  $S$  dello spazio geometrico. Se*

$$\int_A f(P) dS = 0 \quad \forall A \text{ sottoinsieme aperto di } S,$$

allora

$$f(P) = 0 \quad \forall P \in S.$$

Dimostrazione

Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che  $\exists \bar{P} \in S$  tale che  $f(\bar{P}) \neq 0$ . Assumiamo, ad esempio,  $f(\bar{P}) > 0$ .

Essendo il campo  $f$  continuo in  $S$ , per il teorema della permanenza del segno, esiste in  $S$  un intorno  $U(\bar{P})$  di  $\bar{P}$  tale che

$$\forall P \in U(\bar{P}) \text{ si ha } f(P) > 0.$$

Ma allora

$$\int_{U(\bar{P})} f(P) dS > 0$$

che è in contraddizione con l'ipotesi cui soddisfa il campo  $f$ .

Dunque  $f(P) = 0 \quad \forall P \in S$  c.v.d.

Il lemma sussiste anche se si considera un campo vettoriale o tensoriale oppure se  $S$  è la chiusura di un aperto e sono nulli tutti gli integrali del campo preso in considerazione estesi a tutti i sottoinsiemi di  $S$  chiusura di un aperto.

Concludiamo il paragrafo con la definizione di moto incompressibile.

**Definizione 1.21.** Dato un corpo continuo  $\mathcal{C}$  in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , sia  $\mathcal{C}^*$  un suo qualsiasi sottocorpo occupante all'istante  $t$  la regione  $S^*(t)$  di volume  $V^*(t) = \int_{S^*(t)} dS$ . Diciamo che in  $[t_0, t_1]$  il moto di  $\mathcal{C}$  è incomprimibile se  $\forall \mathcal{C}^*$  si ha:

$$V^*(t) = \text{costante} \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Perciò in un moto incomprimibile, al trascorrere del tempo, può cambiare la forma della regione occupata da ogni sottocorpo, ma non ne cambia il volume.

**Definizione 1.22.** Diciamo che un corpo continuo è incomprimibile se gli sono consentiti solo moti incomprimibili.

E' evidente che ogni corpo continuo rigido è incomprimibile.

Determiniamo la condizione di incomprimibilità per il moto di un corpo continuo dal punto di vista spaziale.

**Teorema 1.2.** Condizione necessaria e sufficiente affinché il moto regolare di un corpo continuo sia incomprimibile nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  è che:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

#### Dimostrazione

Dimostriamo la condizione necessaria. Per ipotesi il moto è incomprimibile e dobbiamo mostrare che  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$  in  $\mathcal{S}$ .

Per definizione di moto incomprimibile, abbiamo che

$$\forall \mathcal{C}^* \quad \frac{dV^*}{dt}(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

ossia

$$\forall \mathcal{C}^* \quad \frac{d}{dt} \int_{S^*(t)} dS = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Grazie al teorema del trasporto possiamo scrivere:

$$\frac{d}{dt} \int_{S^*(t)} dS = \int_{S^*(t)} \operatorname{div} \vec{v} dS$$

e quindi:

$$\forall \mathcal{C}^* \quad \int_{S^*(t)} \operatorname{div} \vec{v} dS = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Per l'arbitrarietà di  $\mathcal{C}^*$  si ha:

$$\int_{S^*(t)} \operatorname{div} \vec{v} \, dS = 0 \quad \forall S^*(t), \text{ chiusura di un aperto } \subset S(t), \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Ma, essendo il moto regolare,

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \operatorname{div} \vec{v} \in \mathcal{C}(S(t)),$$

poiché  $\vec{v} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$ .

Allora, sfruttando il lemma 1.1, concludiamo che

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{in } S(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad \text{ossia in } \mathcal{S},$$

come ci proponevamo di dimostrare.

Per quanto riguarda la dimostrazione della condizione sufficiente basta ripercorrere il cammino inverso tenendo presente che per ipotesi

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}$$

e che dobbiamo provare che il moto del corpo continuo è incomprimibile.

**Definizione 1.23.** *Un campo vettoriale a divergenza nulla in una regione  $S$  è detto solenoidale in  $S$ .*

Dunque se un corpo continuo si muove di moto incomprimibile nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , il campo spaziale della velocità è solenoidale in  $S(t)$  per ogni  $t \in [t_0, t_1]$ .

### Esercizi proposti

1) Dato il corpo continuo  $\mathcal{C}$  occupante tutto lo spazio, le sue equazioni di moto nell'intervallo di tempo  $[0, +\infty)$  dal punto di vista materiale siano le seguenti:

$$\begin{cases} x_1 = x_{01} e^t + x_{02} e^{-t}, \\ x_2 = x_{02} e^t \\ x_3 = x_{03} e^{-t}. \end{cases} \quad \forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, +\infty),$$

Si chiede

- di provare che il moto è regolare;
- di determinare i campi materiali della velocità e dell'accelerazione;

- di dedurre le equazioni del moto di  $\mathcal{C}$  dal punto di vista spaziale.

2) Dato il corpo continuo  $\mathcal{C}$  occupante tutto lo spazio, le sue equazioni di moto nell'intervallo di tempo  $[0, +\infty)$  dal punto di vista spaziale siano le seguenti:

$$\begin{cases} v_1 = x_1 - x_2, \\ v_2 = 2x_1 - x_2, \\ v_3 = \cos t. \end{cases} \quad \forall (x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, +\infty)$$

Si chiede

- di provare che il moto è incomprimibile;
- di determinare il campo spaziale dell'accelerazione;
- di calcolare la derivata materiale rispetto al tempo del campo scalare spaziale  $f = f(P, t)$  definito in  $\mathcal{E} \times [0, +\infty)$  avente la seguente rappresentazione analitica:

$$f^0(x_1, x_2, x_3, t) = x_1^2 + x_3 \cos t \quad \forall (x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, +\infty);$$

- di dedurre le equazioni del moto di  $\mathcal{C}$  dal punto di vista materiale e provare che il moto è regolare.

### 1.3 Traiettorie, linee di flusso, moto stazionario.

Sia dato un corpo continuo in moto rispetto ad un dato osservatore nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ . All'osservatore sia associato il riferimento cartesiano ortonormale  $Ox_1x_2x_3$  e denotiamo con  $\mathcal{S}_0$  la regione occupata dal corpo nella configurazione di riferimento.

Come sappiamo, dal punto di vista materiale il moto del corpo continuo può essere descritto in uno dei tre modi seguenti:

- mediante l'equazione puntuale:

$$P = x(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \quad (1.3.1)$$

- mediante l'equazione vettoriale

$$P - O = \vec{x}(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \quad (1.3.2)$$

- mediante le tre equazioni scalari

$$x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \in \xi(\mathcal{S}_0) \quad (1.3.3)$$

Nel seguito supporremo sempre che il moto del corpo continuo sia regolare.

Consideriamo la particella che nella configurazione di riferimento occupa la posizione  $P_0$ . Fissata tale particella, l'applicazione

$$\begin{aligned} x(P_0, \cdot) : [t_0, t_1] &\rightarrow \mathcal{E} \\ t &\mapsto P = x(P_0, t) \end{aligned}$$

è la curva che ne descrive il moto.

**Definizione 1.24.** *Il sostegno della curva  $x(P_0, \cdot)$  è detta traiettoria della particella che nella configurazione di riferimento sta in  $P_0$ .*

Se  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$  è la terna delle coordinate di  $P_0$ , allora le (1.3.3) sono le equazioni cartesiane parametriche con parametro  $t$  della traiettoria della particella che nella configurazione di riferimento sta in  $P_0$ .

Se il moto del corpo continuo è descritto dal punto di vista materiale le traiettorie delle particelle sono dunque note.

Supponiamo ora che il moto sia descritto dal punto di vista spaziale.

Indichiamo con  $S(t)$  la regione occupata dal continuo all'istante  $t$  con  $t \in [t_0, t_1]$ .

Dal punto di vista spaziale il moto è descritto in uno dei tre modi seguenti

- $\vec{v} = \vec{v}(P, t) \quad \forall (P, t) \in \mathcal{S}$
- $\vec{v} = \vec{v}(x_1, x_2, x_3, t) \quad \forall (x_1, x_2, x_3, t) \in \xi(\mathcal{S})$
- $v_i = v_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall (x_1, x_2, x_3, t) \in \xi(\mathcal{S})$ .

Per determinare le traiettorie delle particelle dobbiamo passare dalle equazioni di moto dal punto di vista spaziale a quelle dal punto di vista materiale.

Prendiamo come configurazione di riferimento quella iniziale, cioè prendiamo  $\varphi_0 = \varphi_{t_0}$  e rivolghiamo la nostra attenzione alla particella che all'istante  $t_0$  si trova in  $P_0$  e denotiamo con  $P(t)$  la posizione che tale particella occupa all'istante  $t \in [t_0, t_1]$  per cui  $P(t) = x(P_0, t)$  e  $P(t_0) = P_0$ .

La curva  $P(t)$  che descrive il moto della particella è la curva soluzione del problema di Cauchy in forma vettoriale:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \vec{v}(P, t) \\ P(t_0) = P_0, \end{cases} \quad (1.3.4)$$

che è equivalente al seguente problema di Cauchy in forma scalare

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = v_i(x_1, x_2, x_3, t) & i = 1, 2, 3 \\ x_i(t_0) = x_{0i} & i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (1.3.5)$$

Come abbiamo già osservato nel precedente paragrafo, la soluzione del problema è data dalla terna di funzioni

$$x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad (1.3.6)$$

che sono le equazioni cartesiane del moto della particella che all'istante iniziale  $t_0$  occupa la posizione  $P_0$  avente come terna delle sue coordinate cartesiane  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$  e quindi rappresentano anche le equazioni parametriche con parametro  $t$  della traiettoria della medesima particella.

Se facciamo variare  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$  in  $\xi(S_0)$ , determiniamo le traiettorie di tutte le particelle.

Introduciamo ora una nuova definizione.

**Definizione 1.25.** *Sia dato un corpo continuo in moto regolare rispetto ad un dato osservatore nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  ed il suo moto sia descritto dal punto di vista spaziale.*

*Fissato  $t$  in  $[t_0, t_1]$ , chiamiamo linea di flusso all'istante  $t$  il sostegno di ogni curva  $P(\lambda)$  che sia soluzione massimale dell'equazione differenziale ordinaria*

$$\frac{dP}{d\lambda} = \vec{v}(P, t). \quad (1.3.7)$$

E' importante osservare che nell'equazione differenziale (1.3.7) la variabile indipendente è  $\lambda$ , mentre  $t$  assume un valore fissato.

Ovviamente l'equazione vettoriale (1.3.7) è equivalente al sistema differenziale di tre equazioni scalari:

$$\frac{dx_i}{d\lambda} = v_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad i = 1, 2, 3,$$

le cui incognite sono le tre funzioni:  $x_1 = x_1(\lambda)$ ,  $x_2 = x_2(\lambda)$ ,  $x_3 = x_3(\lambda)$ .

**Osservazione 1.6.** Se teniamo presente che, essendo il moto regolare, il campo  $\vec{v}(\cdot, t) \in \mathcal{C}^1(S(t))$  per ogni  $t$  fissato in  $[t_0, t_1]$ , grazie a noti teoremi relativi all'esistenza e l'unicità della soluzione del problema di Cauchy per sistemi differenziali ordinari del I ordine in forma normale, concludiamo che, fissato  $t \in [t_0, t_1]$ , per

ogni  $P \in S(t)$  passa una ed una sola linea di flusso.

Sia  $\gamma_t$  una linea di flusso all'istante  $t$ ; ovviamente  $\gamma_t \subset S(t)$ . Sia poi  $P \in \gamma_t$  per cui  $P = P(\lambda)$  per un dato valore di  $\lambda$ . Per definizione di linea di flusso:

$$\frac{dP}{d\lambda}(\lambda) = \vec{v}(P(\lambda), t). \quad (1.3.8)$$

Supponiamo  $\vec{v}(P(\lambda), t) \neq \vec{0}$  per cui anche  $\frac{dP}{d\lambda}(\lambda) \neq \vec{0}$ .

Come è ben noto,  $\frac{dP}{d\lambda}(\lambda)$  è un vettore direttore per la retta tangente a  $\gamma_t$  in  $P(\lambda)$ . Deduciamo allora che in tutti quei punti di  $\gamma_t$  in corrispondenza dei quali il campo della velocità all'istante  $t$  non è nullo la retta tangente è parallela al campo stesso.

Osserviamo che ovviamente traiettorie e linee di flusso in generale non sono coincidenti, poiché le traiettorie sono relative all'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , mentre le linee di flusso sono relative a singoli istanti e variano in generale da istante a istante.

Vediamo un esempio.

### Esempio 1.1.

Determiniamo traiettorie e linee di flusso per un corpo continuo, occupante tutto lo spazio, in moto nell'intervallo di tempo  $[0, +\infty)$ , le cui equazioni di moto dal punto di vista spaziale siano le seguenti:

$$\begin{cases} v_1(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{x_1 - Vt}{\tau} \\ v_2(x_1, x_2, x_3, t) = -\frac{x_2}{\tau} \\ v_3(x_1, x_2, x_3, t) = 0, \end{cases} \quad \forall (x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, +\infty)$$

dove  $V$  e  $\tau$  sono costanti.

Occupiamoci dapprima delle traiettorie.

Come abbiamo visto, per determinare le traiettorie delle particelle dobbiamo passare dalle equazioni di moto dal punto di vista spaziale a quelle dal punto di vista materiale prendendo come configurazione di riferimento quella iniziale, ossia quella assunta dal corpo continuo all'istante  $t = 0$ .

Consideriamo dunque la particella che all'istante  $t = 0$  si trova in  $P_0(x_{01}, x_{02}, x_{03})$  e troviamo le equazioni cartesiane del suo moto.

A tal fine dobbiamo risolvere il problema di Cauchy (1.3.5) che nel nostro caso

si presenta nella forma:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1 - Vt}{\tau} \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{x_2}{\tau} \\ \frac{dx_3}{dt} = 0 \\ x_i(0) = x_{0i} \quad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Come si vede immediatamente, il sistema differenziale è costituito da tre equazioni disaccoppiate e perciò possiamo risolvere separatamente i tre problemi di Cauchy che si ottengono associando ad ogni equazione la relativa condizione iniziale.

Consideriamo dapprima il problema differenziale con incognita  $x_1$ :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1 - Vt}{\tau} \\ x_1(0) = x_{01}. \end{cases} \quad (1.3.9)$$

L'equazione differenziale del problema (1.3.9) è del I ordine, lineare, a coefficienti costanti, non omogenea e possiamo scriverla nella forma

$$\frac{dx_1}{dt} - \frac{x_1}{\tau} = -\frac{Vt}{\tau}.$$

Per un noto risultato di Analisi, la sua soluzione generale è data dalla somma della soluzione generale  $\hat{x}_1$  dell'omogenea associata e di una soluzione particolare  $x_1^*$  dell'equazione completa.

La soluzione generale dell'equazione omogenea è:

$$\hat{x}_1 = C_1 e^{\frac{t}{\tau}},$$

dove  $C_1$  è una costante arbitraria.

Per determinare  $x_1^*$ , teniamo presente che il termine a secondo membro dell'equazione completa è un polinomio di I grado in  $t$ ; siamo allora ricondotti a cercare  $x_1^*$  della forma:

$$x_1^* = At + B,$$

dove  $A, B$  sono costanti da determinarsi imponendo che  $x_1^*$  sia soluzione dell'equazione.

Poiché  $\frac{dx_1^*}{dt} = A$ , sostituendo nell'equazione completa, otteniamo:

$$A - \frac{At + B}{\tau} = -\frac{Vt}{\tau} \quad \forall t > 0, \quad (1.3.10)$$

ossia

$$-At + A\tau - B = -Vt. \quad (1.3.11)$$

Dalla (1.3.11) si deduce

$$A = \frac{B}{\tau}, \quad A = V \implies B = V\tau.$$

Otteniamo perciò che la soluzione generale dell'equazione del problema (1.3.9) ha la seguente forma:

$$x_1 = C_1 e^{\frac{t}{\tau}} + V(t + \tau).$$

Per determinare la costante  $C_1$  imponiamo la condizione iniziale:

$$x_{01} = C_1 + V\tau,$$

da cui si ottiene

$$C_1 = x_{01} - V\tau.$$

Perciò la soluzione del problema (1.3.9) è

$$x_1 = (x_{01} - V\tau) e^{\frac{t}{\tau}} + V(t + \tau).$$

Consideriamo ora il problema di Cauchy relativo a  $x_2$ :

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = -\frac{x_2}{\tau} \\ x_2(0) = x_{02}. \end{cases} \quad (1.3.12)$$

L'equazione del problema è lineare, a coefficienti costanti ed omogenea. La sua soluzione generale è

$$x_2 = C_2 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

dove  $C_2$  è una costante arbitraria che si determina imponendo la condizione iniziale e precisamente si ha

$$C_2 = x_{02}.$$

Dunque la soluzione del problema (1.3.12) è

$$x_2 = x_{02} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Infine il problema di Cauchy relativo a  $x_3$

$$\begin{cases} \frac{dx_3}{dt} = 0 \\ x_3(0) = x_{03} \end{cases}$$

ha la soluzione

$$x_3 = x_{03}.$$

Otteniamo dunque che le equazioni cartesiane del moto della particella che all'istante iniziale occupa la posizione  $P_0$  di coordinate  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$  sono

$$\begin{cases} x_1 = (x_{01} - V\tau) e^{\frac{t}{\tau}} + V(t + \tau) \\ x_2 = x_{02} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ x_3 = x_{03}. \end{cases} \quad \forall t \in [0, +\infty) \quad (1.3.13)$$

Tali equazioni sono anche le equazioni cartesiane parametriche con parametro  $t$  della traiettoria della medesima particella.

Se facciamo variare  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$  in  $\mathbb{R}^3$ , le (1.3.13) rappresentano le equazioni del moto del corpo continuo dal punto di vista spaziale ed anche le equazioni cartesiane parametriche delle traiettorie delle particelle con parametro  $t$ .

In primo luogo osserviamo che le traiettorie sono cammini piani che giacciono su piani  $x_3 = \text{costante}$ .

Se consideriamo una qualsiasi particella che all'istante  $t = 0$  occupa la posizione  $P_0$  avente  $x_{02} = 0$ , dalla seconda equazione delle (1.3.13) vediamo che la posizione da essa occupata ha nulla la seconda coordinata ad ogni istante  $t > 0$ . Dunque ogni particella di tale tipo ha come traiettoria un cammino rettilineo parallelo all'asse  $Ox_1$ .

Consideriamo ora quelle particelle per le quali si abbia  $x_{02} \neq 0$ . Sempre dalla seconda delle (1.3.13) vediamo che per tali particelle la coordinata  $x_2 \neq 0$  per ogni istante  $t > 0$  ed ha sempre lo stesso segno di  $x_{02}$ . In tal caso è possibile eliminare il parametro  $t$  dalle equazioni (1.3.13). Infatti dalla seconda deduciamo

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{x_2}{x_{02}} \implies e^{\frac{t}{\tau}} = \frac{x_{02}}{x_2} \implies t = \tau \ln \frac{x_{02}}{x_2}.$$

Se sostituiamo nella prima equazione delle (1.3.13) otteniamo le equazioni cartesiane della traiettoria della particella che all'istante  $t = 0$  si trova nella posizione  $P_0(x_{01}, x_{02}, x_{03})$  con  $x_{02} \neq 0$ :

$$\begin{cases} x_1 = (x_{01} - V\tau) \frac{x_{02}}{x_2} + V\tau(1 + \ln \frac{x_{02}}{x_2}) \\ x_3 = x_{03}. \end{cases}$$

Vediamo ora di determinare le linee di flusso ad un istante fissato  $t \in [0, +\infty)$ . In primo luogo dobbiamo procurarci le curve  $P(\lambda)$  che sono soluzioni massimali dell'equazione differenziale del I ordine vettoriale

$$\frac{dP}{d\lambda} = \vec{v}(P, t),$$

che è equivalente al sistema differenziale di tre equazioni scalari:

$$\frac{dx_i}{d\lambda} = v_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad i = 1, 2, 3,$$

le cui incognite sono le tre funzioni:  $x_1 = x_1(\lambda)$ ,  $x_2 = x_2(\lambda)$ ,  $x_3 = x_3(\lambda)$ .

Non abbiamo un problema differenziale di Cauchy poiché al sistema non sono associate condizioni iniziali.

Nel nostro caso il sistema assume la forma seguente:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\lambda} = \frac{x_1 - Vt}{\tau} \\ \frac{dx_2}{d\lambda} = -\frac{x_2}{\tau} \\ \frac{dx_3}{d\lambda} = 0, \end{cases}$$

dove ricordiamo che  $t$  è un istante fissato e la variabile indipendente è  $\lambda$ .

Il sistema (1.3.14) è costituito da tre equazioni disaccoppiate che possiamo risolvere separatamente.

Occupiamoci dapprima dell'equazione nell'incognita  $x_1(\lambda)$  che scriviamo come

$$\frac{dx_1}{d\lambda} - \frac{x_1}{\tau} = -\frac{Vt}{\tau}. \quad (1.3.14)$$

Si tratta di un'equazione differenziale del I ordine, lineare, a coefficienti costanti, non omogenea, con secondo membro costante ( $t$  è un valore fissato).

La soluzione generale dell'omogenea associata è  $\hat{x}_1 = C_1 e^{\frac{\lambda}{\tau}}$  con  $C_1$  costante arbitraria, mentre possiamo prendere come soluzione particolare dell'equazione completa:  $x_1^* = A$  con  $A$  costante da determinarsi imponendo che  $x_1^*$  sia soluzione dell'equazione. Si ottiene:

$$-\frac{A}{\tau} = -\frac{Vt}{\tau} \quad \implies \quad A = Vt.$$

La soluzione generale della (1.3.14) è perciò:

$$x_1 = C_1 e^{\frac{\lambda}{\tau}} + Vt \quad \lambda \in (-\infty, +\infty).$$

Per quanto riguarda la seconda equazione delle (1.3.14), la sua soluzione generale è data da

$$x_2 = C_2 e^{-\frac{\lambda}{\tau}} \quad \text{con } C_2 = \text{costante arbitraria, } \lambda \in (-\infty, +\infty).$$

Infine la soluzione generale dell'ultima delle (1.3.14) è

$$x_3 = C_3 \quad \text{con } C_3 = \text{costante arbitraria.}$$

In conclusione le equazioni cartesiane parametriche con parametro  $\lambda$  delle linee di flusso all'istante  $t$  fissato sono

$$\begin{cases} x_1 = C_1 e^{\frac{\lambda}{\tau}} + Vt \\ x_2 = C_2 e^{-\frac{\lambda}{\tau}} \\ x_3 = C_3. \end{cases} \quad \forall \lambda \in (-\infty, +\infty)$$

In corrispondenza di ogni terna  $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$  otteniamo una singola linea di flusso.

Osserviamo che le linee di flusso ad ogni istante sono cammini piani.

Inoltre, come si vede dalla seconda delle (1.3.15), le linee di flusso corrispondenti a  $C_2 = 0$  e  $C_1 \neq 0$  sono cammini rettilinei paralleli all'asse  $Ox_1$ . Se poi è nullo anche  $C_1$  la linea di flusso degenera in un singolo punto.

Se  $C_2 \neq 0$  e  $C_1 = 0$ , le linee di flusso sono cammini rettilinei paralleli all'asse  $Ox_2$ .

Infine nel caso  $C_1, C_2 \neq 0$  possiamo eliminare dalle (1.3.15) il parametro  $\lambda$  utilizzando la seconda equazione parametrica:

$$e^{\frac{\lambda}{\tau}} = \frac{C_2}{x_2}.$$

Sostituendo nella prima, deduciamo:

$$x_1 - Vt = C_1 \frac{C_2}{x_2} \quad \implies (x_1 - Vt) x_2 = \text{costante}.$$

Se poi teniamo presente che  $x_3 = C_3$ , concludiamo che le linee di flusso ad ogni istante  $t$  fissato corrispondenti a  $C_1, C_2 \neq 0$  sono iperboli che giacciono su piani  $x_3 = \text{costante}$ , la cui posizione varia al variare di  $t$ .

Introduciamo ora altre definizioni.

**Definizione 1.26.** *Sia dato un corpo continuo in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  e il suo moto sia descritto dal punto di vista spaziale. Diremo che il moto del corpo continuo è stazionario in  $[t_0, t_1]$  dal punto di vista cinematico se sono soddisfatte le seguenti condizioni:*

- 1)  $S(t) = S \quad \forall t \in [t_0, t_1]$  con  $S = \text{regione fissa di } \mathcal{E}$ ;
- 2)  $\vec{v} = \vec{v}(P)$ , ossia il campo spaziale della velocità è indipendente da  $t$ .

Ci proponiamo di dimostrare la seguente

**Proposizione 1.5.** *Se in un dato intervallo di tempo il moto di un corpo continuo è stazionario, traiettorie e linee di flusso coincidono.*

Dimostrazione

Ricordiamo che le traiettorie sono il sostegno delle curve  $P(t)$  soluzioni dell'equazione differenziale vettoriale

$$\frac{dP}{dt} = \vec{v}(P, t).$$

Ma, per definizione di moto stazionario, il campo della velocità è indipendente da  $t$ , per cui l'equazione scritta sopra assume la forma:

$$\frac{dP}{dt} = \vec{v}(P). \quad (1.3.15)$$

D'altra parte, le linee di flusso ad un dato istante  $t$  sono il sostegno delle curve  $P(\lambda)$  soluzioni dell'equazione differenziale vettoriale:

$$\frac{dP}{d\lambda} = \vec{v}(P, t),$$

che, essendo il moto stazionario, si riduce a:

$$\frac{dP}{d\lambda} = \vec{v}(P). \quad (1.3.16)$$

Allora in primo luogo otteniamo che le linee di flusso, nel caso di moto stazionario, non variano al trascorrere del tempo.

Inoltre è immediato notare che le equazioni (1.3.15) e (1.3.16) sono della stessa forma con l'unica differenza che nella prima la variabile indipendente è  $t$ , mentre nella seconda è  $\lambda$ . Otteniamo allora che traiettorie e linee di flusso coincidono, come ci proponevamo di dimostrare.

Dunque se il moto è stazionario ogni traiettoria è linea di flusso e viceversa.

**Definizione 1.27.** *Dato un corpo continuo il cui moto sia descritto dal punto di vista spaziale, diremo che un campo spaziale (scalare, vettoriale o tensoriale) legato al moto del continuo è stazionario se non dipende dal tempo.*

Ad esempio un campo scalare spaziale, legato al moto del corpo continuo, stazionario è della forma  $f = f(P)$ .

Si osservi che la derivata locale rispetto al tempo di un campo stazionario è nulla in ogni punto ed in ogni istante.

Dimostriamo il seguente

**Teorema 1.3.** *Sia dato un corpo continuo in moto stazionario dal punto di vista cinematico e sia  $f$  un campo scalare stazionario di classe  $\mathcal{C}^1(S)$ . Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

$$1) \dot{f} = 0 \quad \text{in } S$$

2)  $f$  è costante lungo ogni linea di flusso

$$3) \text{grad } f \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{in } S.$$

### Dimostrazione

$$1) \implies 2).$$

Se  $\dot{f} = 0$  in  $S$ , tenendo presente la definizione di derivata materiale rispetto al tempo di un campo spaziale, concludiamo che  $f$  è costante per ogni particella che seguiamo nel suo moto e dunque  $f$  è costante lungo ogni traiettoria. Ma, essendo il moto stazionario, ogni traiettoria è anche linea di flusso e quindi  $f$  è costante lungo ogni linea di flusso.

$$2) \implies 1).$$

L'implicazione si dimostra procedendo in senso inverso a quanto abbiamo fatto prima.

$$1) \implies 3).$$

Per ipotesi

$$\dot{f} = f' + \text{grad } f \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{in } S.$$

Ma, essendo  $f$  un campo stazionario, abbiamo  $f' = 0$  in  $S$  per cui la relazione precedente si riduce a

$$\text{grad } f \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{in } S.$$

$$3) \implies 1).$$

L'implicazione si dimostra procedendo in senso inverso a quanto abbiamo fatto prima.

Le restanti implicazioni sono conseguenza di quelle dimostrate.

## 1.4 Teorema del trasporto della circolazione, moti piani

Sia dato un corpo continuo in moto nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  rispetto ad un dato osservatore e indichiamo con  $S_0$  la regione occupata nella configurazione di riferimento.

Come sappiamo, il moto, dal punto di vista materiale, può essere descritto mediante l'equazione

$$P = x(P_0, t) \quad \text{con } (P_0, t) \in S_0.$$

Consideriamo una curva  $\psi_0 = \psi_0(\lambda)$  con  $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ , avente il sostegno  $\gamma_0$  contenuto in  $S_0$ :

$$\begin{aligned}\psi_0 : [\lambda_1, \lambda_2] &\rightarrow S_0 \\ \lambda &\mapsto P_0 = \psi_0(\lambda).\end{aligned}$$

Inoltre siano

$$x_{0i} = x_{0i}^*(\lambda) \quad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2] \quad i = 1, 2, 3$$

le equazioni cartesiane parametriche della curva.

Se consideriamo il corpo continuo nella configurazione di riferimento, allora tutti i punti di  $\gamma_0$  sono occupati da particelle del continuo.

Fissiamo un istante  $t \in [t_0, t_1]$  e consideriamo la curva

$$\begin{aligned}\psi_t : [\lambda_1, \lambda_2] &\rightarrow S(t) \\ \lambda &\mapsto P = x(\psi_0(\lambda), t),\end{aligned}$$

dove  $S(t)$  è la regione occupata all'istante  $t$  dal corpo continuo nel suo moto. Se indichiamo con  $\gamma_t$  il sostegno di  $\psi_t$  (ovviamente  $\gamma_t \in S(t)$ ), i punti di  $\gamma_t$  sono occupati all'istante  $t$  da quelle stesse particelle che occupano i punti di  $\gamma_0$  quando il corpo continuo si trova nella configurazione di riferimento.

Al variare di  $t$  nell'intervallo di moto  $[t_0, t_1]$  il sostegno  $\gamma_t$  della curva  $\psi_t$  segue il corpo continuo nel suo moto. Allora la famiglia di curve  $\{\psi_t\}_{t \in [t_0, t_1]}$  prende il nome di *curva materiale del corpo continuo*.

D'ora poi per ragioni di brevità indicheremo con  $\psi$  la curva materiale  $\{\psi_t\}_{t \in [t_0, t_1]}$  e chiameremo  $\psi_t$  *posizione della curva materiale  $\psi$  all'istante  $t$* .

E' immediato scrivere le equazioni cartesiane parametriche della curva  $\psi_t$ .

Infatti, poiché

$$\psi_t(\lambda) = x(\psi_0(\lambda), t) \quad \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2], \quad t \text{ fissato in } [t_0, t_1],$$

le equazioni sono le seguenti:

$$x_i = x_i(x_{01}^*(\lambda), x_{02}^*(\lambda), x_{03}^*(\lambda), t) \quad \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2], \quad t \text{ fissato in } [t_0, t_1], \quad i = 1, 2, 3.$$

Nel seguito ci saranno utili le seguenti posizioni

$$\begin{aligned}x_i^*(\lambda, t) &= x_i(x_{01}^*(\lambda), x_{02}^*(\lambda), x_{03}^*(\lambda), t) \quad \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2], \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad i = 1, 2, 3, \\ \vec{r}^*(\lambda, t) &= x_i^*(\lambda, t) \vec{e}_i \quad \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2], \quad \forall t \in [t_0, t_1].\end{aligned}$$

**Definizione 1.28.** Diremo che la curva materiale  $\psi$  è chiusa se  $\forall t \in [t_0, t_1]$  le curve  $\psi_t$  sono chiuse, ossia se

$$\psi_t(\lambda_1) = \psi_t(\lambda_2) \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

E' immediato dimostrare che la curva materiale  $\psi$  è chiusa se lo è  $\psi_0$ .

**Definizione 1.29.** *La curva materiale  $\psi$  è regolare se le sue posizioni  $\psi_t$  sono regolari  $\forall t \in [t_0, t_1]$ .*

Richiamiamo la definizione di curva regolare applicata a  $\psi_t$ . Poiché  $\psi_t(\lambda) = x(\psi_0(\lambda), t)$  con  $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ ,  $t$  fissato  $\in [t_0, t_1]$ , avremo che, preso un punto  $P \in \gamma_t$ , il suo vettore posizione rispetto all'origine del riferimento associato all'osservatore è dato da:

$$P - O = \vec{x}(\psi_0(\lambda), t) = x_i^*(\lambda, t) \vec{e}_i = \vec{r}^*(\lambda, t) \quad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2], \quad t \text{ fissato in } [t_0, t_1].$$

Allora la curva  $\psi_t$  è regolare se

$$\text{per } t \text{ fissato in } [t_0, t_1] \quad \vec{r}^*(\cdot, t) \in \mathcal{C}^1([\lambda_1, \lambda_2])$$

o equivalentemente se

$$\text{per } t \text{ fissato in } [t_0, t_1] \quad x_i^*(\cdot, t) \in \mathcal{C}^1([\lambda_1, \lambda_2]), \quad i = 1, 2, 3$$

ed inoltre se

$$\text{per } t \text{ fissato in } [t_0, t_1] \quad \frac{\partial P}{\partial \lambda}(\cdot, t) := \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial \lambda}(\cdot, t) \neq \vec{0} \quad \forall \lambda \in (\lambda_1, \lambda_2).$$

Si potrebbe dimostrare la seguente

**Proposizione 1.6.** *Se il moto del corpo continuo è regolare e la curva  $\psi_0$  è regolare, allora la curva materiale  $\psi$ , definita a partire da  $\psi_0$ , è regolare.*

Supponiamo di essere nelle ipotesi della proposizione enunciata sopra. Allora sussiste il

**Lemma 1.2.** *Se il moto del corpo continuo è regolare e la curva  $\psi_0$  è regolare, allora*

$$\forall (\lambda, t) \in [\lambda_1, \lambda_2] \times [t_0, t_1] \quad \exists \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda \partial t}(\lambda, t), \quad \exists \frac{\partial^2 P}{\partial t \partial \lambda}(\lambda, t)$$

dove

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda \partial t} := \frac{\partial^2 \vec{r}^*}{\partial \lambda \partial t}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial t \partial \lambda} := \frac{\partial^2 \vec{r}^*}{\partial t \partial \lambda}.$$

Inoltre si ha:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda \partial t} = \frac{\partial^2 P}{\partial t \partial \lambda}.$$

Dimostrazione

In primo luogo osserviamo che, poiché le componenti di  $\vec{r}^*(\lambda, t)$  sono le funzioni  $x_i^*(\lambda, t)$ , è sufficiente dimostrare che:

$$\forall(\lambda, t) \in [\lambda_1, \lambda_2] \times [t_0, t_1] \quad \exists \frac{\partial^2 x_i^*}{\partial \lambda \partial t}(\lambda, t), \quad \exists \frac{\partial^2 x_i^*}{\partial t \partial \lambda}(\lambda, t), \quad i = 1, 2, 3$$

e che tali derivate sono uguali.

D'altra parte

$$x_i^*(\lambda, t) = x_i(x_{01}^*(\lambda), x_{02}^*(\lambda), x_{03}^*(\lambda), t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Dunque le  $x_i^*$  sono funzioni composte.

Osserviamo che le funzioni  $x_i \in \mathcal{C}^2$  perché il moto è regolare e le  $x_{0i}^* \in \mathcal{C}^1$  perché la curva  $\psi_0$  è regolare. Allora per il teorema di derivazione delle funzioni composte, otteniamo che  $\forall(\lambda, t) \in [\lambda_1, \lambda_2] \times [t_0, t_1]$  :

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial \lambda}(\lambda, t) = \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}}(x_{01}^*(\lambda), x_{02}^*(\lambda), x_{03}^*(\lambda), t) \frac{dx_{0j}^*}{d\lambda}(\lambda), \quad i = 1, 2, 3.$$

(Ovviamente nella relazione precedente abbiamo fatto uso della convenzione della somma sugli indici ripetuti).

Dal momento che le funzioni  $x_i \in \mathcal{C}^2$ , vediamo che le funzioni scritte sopra si possono derivare ancora rispetto a  $t$  e le funzioni che così si ottengono sono continue. Dunque

$$\forall(\lambda, t) \in [\lambda_1, \lambda_2] \times [t_0, t_1] \quad \exists \frac{\partial^2 x_i^*}{\partial \lambda \partial t}(\lambda, t) \quad \text{e} \quad \in \mathcal{C}([\lambda_1, \lambda_2] \times [t_0, t_1]) \quad \text{per} \quad i = 1, 2, 3.$$

Per il teorema di derivazione delle funzioni composte otteniamo anche che  $\forall(\lambda, t) \in [\lambda_1, \lambda_2] \times [t_0, t_1]$ :

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial t}(\lambda, t) = \dot{x}_i(x_{01}^*(\lambda), x_{02}^*(\lambda), x_{03}^*(\lambda), t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Sempre per il teorema di derivazione delle funzioni composte e per le proprietà di regolarità delle funzioni  $x_i$  e delle funzioni  $x_{0i}^*$ , deduciamo che le funzioni scritte sopra sono derivabili rispetto a  $\lambda$  e che le derivate che così si ottengono sono continue. Dunque:

$$\forall(\lambda, t) \in [\lambda_1, \lambda_2] \times [t_0, t_1] \quad \exists \frac{\partial^2 x_i^*}{\partial t \partial \lambda}(\lambda, t) \quad \text{e} \quad \in \mathcal{C}([\lambda_1, \lambda_2] \times [t_0, t_1]) \quad \text{per} \quad i = 1, 2, 3.$$

Infine, grazie al teorema di Schwarz sull'invertibilità dell'ordine di derivazione, possiamo concludere che

$$\forall(\lambda, t) \in [\lambda_1, \lambda_2] \times [t_0, t_1] \quad \frac{\partial^2 x_i^*}{\partial \lambda \partial t}(\lambda, t) = \frac{\partial^2 x_i^*}{\partial t \partial \lambda}(\lambda, t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Il lemma è così dimostrato.

Dal lemma e dalla sua dimostrazione discende anche che:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda \partial t}(\lambda, t) = \frac{\partial^2 P}{\partial t \partial \lambda}(\lambda, t) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \lambda}(\psi_0(\lambda), t).$$

**Definizione 1.30.** Dato un corpo continuo in moto regolare, siano  $\psi$  una curva materiale regolare e  $\vec{u} = \vec{u}(P, t)$  un campo vettoriale (spaziale) tale che  $\vec{u} \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ . Definiamo circolazione all'istante  $t \in [t_0, t_1]$  del campo vettoriale  $\vec{u}$  lungo la curva materiale  $\psi$  l'integrale, denotato con  $\int_{\psi_t} \vec{u}(P, t) \cdot dP$ , dato da :

$$\int_{\psi_t} \vec{u}(P, t) \cdot dP = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \vec{u}(\psi_t(\lambda), t) \cdot \frac{\partial P}{\partial \lambda}(\lambda, t) d\lambda.$$

In particolare la circolazione del campo della velocità  $\vec{v}(P, t)$  lungo una curva materiale  $\psi$  verrà chiamata semplicemente circolazione lungo  $\psi$ .

Stabiliamo ora il **Teorema del trasporto della circolazione**

**Teorema 1.4.** Dato un corpo continuo in moto regolare e presa una qualsiasi curva materiale  $\psi$  definita a partire dalla curva  $\psi_0$  chiusa e regolare, si ha:

$$\frac{d}{dt} \int_{\psi_t} \vec{v}(P, t) \cdot dP = \int_{\psi_t} \dot{\vec{v}}(P, t) \cdot dP \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (1.4.1)$$

Dimostrazione

Poiché  $\psi$  è definita a partire dalla curva  $\psi_0$  chiusa e regolare ed il moto è regolare, risulta anch'essa chiusa e regolare.

Fissiamo un istante  $t \in [t_0, t_1]$  e consideriamo la circolazione in tale istante lungo la curva materiale  $\psi$

$$\int_{\psi_t} \vec{v}(P, t) \cdot dP = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \vec{v}(\psi_t(\lambda), t) \cdot \frac{\partial P}{\partial \lambda}(\lambda, t) d\lambda. \quad (1.4.2)$$

Vediamo di scrivere in altro modo  $\vec{v}(\psi_t(\lambda), t)$  che compare sotto integrale a secondo membro della (1.4.2).

Osserviamo che se  $P = x(P_0, t)$  è la posizione occupata all'istante  $t$  dalla particella che nella configurazione di riferimento sta in  $P_0$ , allora

$$\vec{v}(P, t) = \dot{\vec{x}}(P_0, t).$$

Ma nel nostro caso

$$P = \psi_t(\lambda) = x(\psi_0(\lambda), t)$$

per cui

$$\vec{v}(\psi_t(\lambda), t) = \dot{\vec{x}}(\psi_0(\lambda), t).$$

Allora la (1.4.2) si può scrivere come:

$$\int_{\psi_t} \vec{v}(P, t) \cdot dP = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \dot{\vec{x}}(\psi_0(\lambda), t) \cdot \frac{\partial P}{\partial \lambda}(\lambda, t) d\lambda.$$

Se deriviamo rispetto al tempo la relazione scritta sopra e teniamo presente che possiamo derivare sotto il segno di integrale, otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\psi_t} \vec{v}(P, t) \cdot dP &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \ddot{\vec{x}}(\psi_0(\lambda), t) \cdot \frac{\partial P}{\partial \lambda}(\lambda, t) d\lambda + \\ &+ \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \dot{\vec{x}}(\psi_0(\lambda), t) \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda \partial t}(\lambda, t) d\lambda \\ &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \dot{\vec{v}}(\psi_t(\lambda), t) \cdot \frac{\partial P}{\partial \lambda}(\lambda, t) d\lambda + \\ &+ \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \dot{\vec{x}}(\psi_0(\lambda), t) \cdot \frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial \lambda}(\psi_0(\lambda), t) d\lambda \\ &= \int_{\psi_t} \dot{\vec{v}}(P, t) \cdot dP + \frac{1}{2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\partial \dot{\vec{x}}^2}{\partial \lambda}(\psi_0(\lambda), t) d\lambda \\ &= \int_{\psi_t} \dot{\vec{v}}(P, t) \cdot dP + \frac{1}{2} \left[ \dot{\vec{x}}^2(\psi_0(\lambda_2), t) - \dot{\vec{x}}^2(\psi_0(\lambda_1), t) \right]. \end{aligned}$$

Ma, essendo la curva  $\psi_0$  chiusa, si ha  $\psi_0(\lambda_1) = \psi_0(\lambda_2)$ , per cui il termine in parentesi quadra nell'ultimo membro della serie di uguaglianze scritte sopra è nullo. Dunque:

$$\frac{d}{dt} \int_{\psi_t} \vec{v}(P, t) \cdot dP = \int_{\psi_t} \dot{\vec{v}}(P, t) dP \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

che rappresenta la tesi del teorema.

**Definizione 1.31.** *Dato un corpo continuo in moto regolare, diremo che si conserva la circolazione durante il moto se, presa una qualsiasi curva materiale  $\psi$ , definita a partire da una curva  $\psi_0$  chiusa e regolare, si ha :*

$$\frac{d}{dt} \int_{\psi_t} \vec{v}(P, t) \cdot dP = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Enunciamo e proviamo il **Teorema di Kelvin**

**Teorema 1.5.** *Sia dato un corpo continuo in moto regolare in un dato intervallo di tempo. Se l'accelerazione spaziale proviene da un potenziale scalare, allora si conserva la circolazione durante il moto.*

Dimostrazione

Per ipotesi  $\vec{v}$  proviene da un potenziale scalare, cioè  $\exists \alpha = \alpha(P, t)$  tale che  $\alpha \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$  e

$$\vec{v}(P, t) = \text{grad } \alpha(P, t) \quad \forall (P, t) \in \mathcal{S}.$$

Preso una qualsiasi curva materiale  $\psi$ , definita a partire da una curva  $\psi_0$  chiusa e regolare, per il teorema del trasporto della circolazione,  $\forall t \in [t_0, t_1]$  abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\psi_t} \vec{v}(P, t) \cdot dP &= \int_{\psi_t} \dot{\vec{v}}(P, t) \cdot dP \\ &= \int_{\psi_t} \text{grad } \alpha(P, t) \cdot dP \\ &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \text{grad } \alpha(\psi_t(\lambda), t) \cdot \frac{\partial P}{\partial \lambda}(\lambda, t) d\lambda. \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

A questo punto teniamo presente che

$$\alpha(\psi_t(\lambda), t) = \alpha(x_1^*(\lambda, t), x_2^*(\lambda, t), x_3^*(\lambda, t), t)$$

da cui per il teorema di derivazione delle funzioni composte discende:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}(\psi_t(\lambda), t) &= \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}(x_1^*(\lambda, t), x_2^*(\lambda, t), x_3^*(\lambda, t), t) \frac{\partial x_i^*}{\partial \lambda}(\lambda, t) \\ &= \text{grad } \alpha(\psi_t(\lambda), t) \cdot \frac{\partial P}{\partial \lambda}(\lambda, t). \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

Sostituendo il risultato (1.4.4) nella (1.4.3),  $\forall t \in [t_0, t_1]$  deduciamo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\psi_t} \vec{v}(P, t) \cdot dP &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}(\psi_t(\lambda), t) d\lambda \\ &= \alpha(\psi_t(\lambda_2), t) - \alpha(\psi_t(\lambda_1), t) = 0. \end{aligned}$$

Il teorema di Kelvin risulta così dimostrato.

Introduciamo una nuova definizione.

**Definizione 1.32.** *Dato un corpo continuo, diremo che si muove di moto piano, con piano direttore  $Ox_1x_2$ , se  $\vec{v}(P, t)$  è parallelo a tale piano  $\forall (P, t) \in \mathcal{S}$  e la rappresentazione analitica di  $\vec{v}$  non dipende da  $x_3$  per cui*

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3, t) = v_1(x_1, x_2, t) \vec{e}_1 + v_2(x_1, x_2, t) \vec{e}_2.$$

Supponiamo ora di avere un corpo continuo che si muove di moto stazionario (dal punto di vista cinematico) piano con piano direttore  $Ox_1x_2$ .

Allora  $\vec{v} = \vec{v}(P)$  ha la rappresentazione analitica della forma:

$$\vec{v}(x_1, x_2) = v_1(x_1, x_2)\vec{e}_1 + v_2(x_1, x_2)\vec{e}_2 \quad (1.4.5)$$

con  $v_1(x_1, x_2)$  e  $v_2(x_1, x_2)$  funzioni definite su un insieme  $D \subset \mathbb{R}^2$  che supponiamo essere la chiusura di un aperto.

In particolare assumiamo di avere un corpo continuo incompressibile che si muove di moto stazionario piano.

Nell'ipotesi che le funzioni  $v_1, v_2 \in \mathcal{C}^1(D)$ , la condizione di incompressibilità  $\text{div } \vec{v} = 0$  in  $S$  implica

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \quad \text{in } D. \quad (1.4.6)$$

Aggiungiamo l'ulteriore ipotesi che il moto sia irrotazionale, ossia  $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$  in  $S$ . Essendo il moto piano, l'irrotazionalità del moto implica

$$\left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \vec{e}_3 = \vec{0},$$

da cui

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0 \quad \text{in } D.$$

Nelle ipotesi considerate si ha quindi in  $D$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Facciamo le due seguenti posizioni:

$$\alpha(x_1, x_2) := v_1(x_1, x_2), \quad \beta(x_1, x_2) := -v_2(x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in D.$$

Allora le (1.4.7) assumono la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} &= \frac{\partial \beta}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} &= -\frac{\partial \beta}{\partial x_1}. \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

Le (1.4.8) sono le note **condizioni di Cauchy-Riemann**, che sono condizioni necessarie e sufficienti affinché la funzione

$$g(z) = \alpha(x_1, x_2) + i\beta(x_1, x_2) \quad \text{con } z = x_1 + ix_2, \quad i = \text{unità immaginaria}$$

sia analitica in  $D$ .

Possiamo allora enunciare il seguente

**Teorema 1.6.** *Dato un corpo continuo incomprimibile in moto piano, stazionario e irrotazionale, la funzione a valori complessi  $g(z) = v_1(x_1, x_2) - i v_2(x_1, x_2)$ , dove  $v_1$  e  $v_2$  sono le componenti della rappresentazione analitica del campo della velocità e  $z = x_1 + i x_2$  è analitica in  $D$ . Viceversa ogni funzione analitica in  $D$  genera una coppia  $(v_1, v_2)$  soluzione in  $D$  delle (1.4.7) e dunque  $v_1$  e  $v_2$  possono essere interpretate come le due componenti della rappresentazione analitica del campo della velocità di un corpo continuo incomprimibile che si muove di moto stazionario piano con velocità irrotazionale.*

La funzione  $g(z)$  è detta *velocità complessa*.

Nello studio del moto piano stazionario di un corpo continuo incomprimibile si utilizza spesso la cosiddetta *stream function* o *funzione di corrente* che ora definiremo.

Supponiamo che un corpo continuo incomprimibile si muova di moto stazionario piano avente come piano direttore  $Ox_1x_2$  per cui la rappresentazione analitica della velocità è data dalla (1.4.5) e la condizione di incomprimibilità dalla (1.4.6).

**Definizione 1.33.** *Se  $v_1, v_2 \in \mathcal{C}^1(D)$ , definiamo stream function o funzione di corrente la funzione  $\psi = \psi(x_1, x_2) \in \mathcal{C}^2(D)$ , tale che*

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x_1, x_2) \quad , \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in D.$$

Ovviamente la funzione di corrente è definita a meno di una costante arbitraria, del tutto inessenziale.

Se le componenti della velocità sono espresse mediante la funzione di corrente, la condizione di incomprimibilità è soddisfatta automaticamente. Infatti

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} = 0,$$

poichè per le ipotesi su  $\psi$  sussiste il teorema di invertibilità dell'ordine di derivazione.

A questo punto ricordiamo che, per il teorema 1.3, dato un corpo continuo in moto stazionario nella regione  $S$ , se  $f = f(P)$  è un campo stazionario di classe  $\mathcal{C}^1(S)$ ,  $f$  è costante lungo ogni linea di flusso se e solo se  $\dot{f} = 0$  in  $S$ , o equivalentemente  $\operatorname{grad} f \cdot \vec{v} = 0$  in  $S$ .

Se allora supponiamo di avere un corpo continuo incomprimibile che si muove di moto piano stazionario, indicato con  $\psi = \psi(P)$  il campo scalare definito in  $S$

avente come rappresentazione analitica la funzione di corrente  $\psi$ , per definizione di funzione di corrente otteniamo

$$\text{grad } \psi \cdot \vec{v} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} v_2 = -v_2 v_1 + v_1 v_2 = 0 \quad \text{in } S.$$

Dunque, per il teorema 1.3 e tenendo presente che grazie alle proprietà di regolarità della velocità per ogni punto  $P \in S$  passa una ed una sola linea di flusso (Osservazione 1.6), deduciamo che le linee di flusso sono cammini piani che giacciono su piani  $x_3 = \text{costante}$  e sono il luogo dei punti  $P(x_1, x_2, x_3) \in S$  tali che

$$\psi(x_1, x_2) = C_1, \quad x_3 = C_2$$

con  $C_1$  e  $C_2$  costanti.

### Esempio 1.2.

Ci proponiamo di determinare la funzione di corrente e le linee di flusso per un corpo continuo incompressibile che si muove di moto stazionario piano con piano direttore  $Ox_1x_2$  nel semispazio  $S = \{P(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E} \mid (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2, x_2 \in \mathbb{R}^+\}$  per il quale la rappresentazione analitica del campo della velocità sia la seguente:

$$\vec{v}(x_1, x_2) = a x_1 \vec{e}_1 - a x_2 \vec{e}_2 \quad \forall (x_1, x_2) \in D,$$

dove  $a$  è una costante positiva e  $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \in \mathbb{R}^+\}$ .

Per determinare la la funzione di corrente  $\psi = \psi(x_1, x_2)$  dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x_1, x_2) = a x_2 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x_1, x_2) = a x_1 \end{cases}$$

Integrando la prima equazione si ottiene:

$$\psi(x_1, x_2) = a x_1 x_2 + \Psi(x_2)$$

con  $\Psi(x_2)$  funzione arbitraria.

Dalla seconda equazione deduciamo

$$a x_1 + \Psi'(x_2) = a x_1,$$

da cui

$$\Psi(x_2) = \text{costante}.$$

Se prendiamo tale costante, che è del tutto inessenziale, uguale a zero, otteniamo

$$\psi(x_1, x_2) = ax_1x_2 \quad \forall (x_1, x_2) \in D.$$

Per quanto riguarda le linee di flusso, deduciamo che queste sono cammini piani tali che

$$\begin{aligned} ax_1x_2 &= C_1 & \forall x_1 \in \mathbb{R}, \quad \forall x_2 \geq 0, \\ x_3 &= C_2 \end{aligned} \tag{1.4.9}$$

con  $C_1, C_2$  costanti.

Se  $C_1 = 0$ , otteniamo che le linee di flusso corrispondenti sono rette parallele all'asse  $Ox_1$  o semirette parallele al semiasse positivo  $Ox_2$ . Se  $C_2 = 0$ , le linee di flusso corrispondenti coincidono con l'asse  $Ox_1$  o col semiasse positivo  $Ox_2$ .

Se  $C_1 \neq 0$ , le linee di flusso sono rami di iperbole che giacciono sul piano  $x_3 = C_2$ .

# Capitolo 2

## Corpi continui deformabili: cinetica, dinamica e termodinamica

### 2.1 Cinetica.

Nello studio della cinematica non abbiamo fatto intervenire la distribuzione di massa che, per definizione, è associata ad ogni corpo continuo.

Nella cinetica la distribuzione di massa svolge invece un ruolo importante.

In primo luogo facciamo un'ipotesi di notevole rilevanza sulla distribuzione di massa.

Sia  $\mathcal{C}$  un corpo continuo e sia  $\mathcal{A}$  la sua  $\sigma$ -algebra di Borel su cui è definita la distribuzione di massa  $m$ .

Richiediamo che  $m$  goda della seguente proprietà.

**Ipotesi 2.1.** *In corrispondenza di ogni possibile configurazione  $\varphi$  di  $\mathcal{C}$  esiste un campo scalare dipendente da  $\varphi$ :  $\rho_\varphi = \rho_\varphi(P)$  definito in  $S_\varphi = \varphi(\mathcal{C})$ , strettamente positivo e integrabile secondo Lebesgue in  $S_\varphi$  tale che:*

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad m(A) = \int_{\varphi(A)} \rho_\varphi(P) dS.$$

**Definizione 2.1.** *Il campo scalare  $\rho_\varphi = \rho_\varphi(P)$  è detto densità di massa del corpo continuo nella configurazione  $\varphi$ .*

**Osservazione 3.1.** Mettiamo in evidenza che, mentre la distribuzione di massa  $m$  è indipendente dalle configurazioni possibili del corpo continuo, la densità di massa dipende dalla particolare configurazione considerata.

Supponiamo di avere un corpo continuo  $\mathcal{C}$  in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ . Il moto di  $\mathcal{C}$  è una famiglia di configurazioni  $\{\varphi_t\}_{t \in [t_0, t_1]}$ . In

corrispondenza di ogni configurazione  $\varphi_t$  con  $t \in [t_0, t_1]$  è definita la densità di massa:

$$\rho_{\varphi_t} = \rho_{\varphi_t}(P) \quad \forall P \in S(t).$$

Poniamo:

$$\rho_{\varphi_t}(P) =: \rho(P, t) \quad \forall P \in S(t), \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Resta così definito in  $\mathcal{S}$  il campo spaziale  $\rho = \rho(P, t)$ , detto *campo spaziale della densità di massa del corpo continuo*.

Su tale campo facciamo la seguente ipotesi di regolarità:  $\rho \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$ .

Ovviamente del campo spaziale della densità di massa possiamo anche dare la rappresentazione materiale  $\rho_m = \rho_m(P_0, t)$ , definita in  $\mathcal{S}_0$  nel modo seguente:

$$\forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \quad \rho_m(P_0, t) = \rho(x(P_0, t), t).$$

Notiamo che per la proposizione 1.2, essendo per ipotesi  $\rho \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$ , si deduce  $\rho_m \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S}_0)$ .

Ci proponiamo ora di dedurre dal punto di vista spaziale l'equazione nota come equazione di continuità della massa, equazione che traduce in forma locale il fatto che la distribuzione di massa è indipendente dalle configurazioni del corpo continuo e quindi da ogni suo moto.

Dato un corpo continuo  $\mathcal{C}$  in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , consideriamone un qualsiasi sottocorpo  $\mathcal{C}^*$ . Indichiamo con  $S^*(t)$  la regione occupata da  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t$  durante il moto.

Per quanto visto prima:

$$m(\mathcal{C}^*) = \int_{S^*(t)} \rho(P, t) dS \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Poiché la massa di  $\mathcal{C}^*$  non varia al trascorrere del tempo, abbiamo:

$$\frac{d}{dt} \int_{S^*(t)} \rho(P, t) dS = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Applicando il teorema del trasporto, otteniamo:

$$\int_{S^*(t)} [\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \vec{v}] dS = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (2.1.1)$$

Ma per l'arbitrarietà di  $\mathcal{C}^*$ , deduciamo che la relazione (2.1.1) sussiste per ogni  $S^*(t)$  chiusura di un aperto contenuto in  $S(t)$  qualunque sia  $t$  in  $[t_0, t_1]$ . D'altra parte il campo che appare sotto integrale nella (2.1.1) è continuo in  $S(t)$  per ogni  $t \in [t_0, t_1]$ . Allora per il lemma 1.1 concludiamo che

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}. \quad (2.1.2)$$

La (2.1.2) è detta **equazione di continuità della massa** dal punto di vista spaziale.

Se il moto del corpo continuo è incomprimibile, abbiamo:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}$$

e dunque dall'equazione di continuità (2.1.2) deduciamo:

$$\dot{\rho} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Tenendo presente l'equazione di continuità della massa, è immediato ottenere il seguente:

**Corollario 2.1.** *(del teorema del trasporto)* Dato il corpo continuo  $\mathcal{C}$  in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , sia  $f$  un campo spaziale scalare  $\in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$ . Allora, preso un qualsiasi sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  occupante all'istante  $t$  la regione  $S^*(t)$ , si ha:

$$\frac{d}{dt} \int_{S^*(t)} \rho(P, t) f(P, t) dS = \int_{S^*(t)} \rho(P, t) \dot{f}(P, t) dS \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (2.1.3)$$

Ovviamente tale risultato sussiste anche per campi vettoriali e tensoriali.

Nell'ambito della cinetica definiamo ora le principali grandezze cinetiche che useremo in dinamica nello studio del moto di un corpo continuo.

Supponiamo di avere un corpo continuo  $\mathcal{C}$  in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ .

**Definizione 2.2.** *Definiamo quantità di moto all'istante  $t \in [t_0, t_1]$  del sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  la grandezza vettoriale data da:*

$$\vec{Q}^*(t) = \int_{S^*(t)} \rho(P, t) \vec{v}(P, t) dS. \quad (2.1.4)$$

Analoga definizione sussiste per tutto il corpo continuo  $\mathcal{C}$ :

$$\vec{Q}(t) = \int_{S(t)} \rho(P, t) \vec{v}(P, t) dS. \quad (2.1.5)$$

**Definizione 2.3.** *Il momento delle quantità di moto rispetto ad un polo  $O \in \mathcal{E}$  per un sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t \in [t_0, t_1]$  è così definito:*

$$\vec{K}_O^*(t) = \int_{S^*(t)} (P - O) \times \rho(P, t) \vec{v}(P, t) dS.$$

Analogamente per l'intero corpo il momento delle quantità di moto rispetto ad un polo  $O$  all'istante  $t \in [t_0, t_1]$  è dato da

$$\vec{K}_O(t) = \int_{S(t)} (P - O) \times \rho(P, t) \vec{v}(P, t) dS.$$

**Definizione 2.4.** *Definiamo energia cinetica all'istante  $t \in [t_0, t_1]$  del sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  la grandezza scalare data da:*

$$T^*(t) = \frac{1}{2} \int_{S^*(t)} \rho \vec{v}^2 dS. \quad (2.1.6)$$

Analogia definizione sussiste per tutto il corpo continuo  $\mathcal{C}$ :

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_{S(t)} \rho \vec{v}^2 dS. \quad (2.1.7)$$

Infine concludiamo il paragrafo esaminando i possibili sistemi di forze che assumeremo applicati ad un generico corpo continuo.

A tal fine supporremo di considerare solo corpi e sottocorpi che occupano in qualsiasi configurazione possibile solo regioni che siano la chiusura di domini regolari.

In primo luogo assumeremo che sul corpo continuo  $\mathcal{C}$  agiscano soltanto due tipi di forze:

- forze di massa
- forze di contatto.

Più precisamente sui sistemi di forze agenti sul corpo continuo  $\mathcal{C}$  faremo alcune ipotesi.

**Ipotesi 2.2.** *Per ogni  $t \in [t_0, t_1]$  è definito in  $S(t)$  il campo  $\vec{F} = \vec{F}(P, t)$ , detto densità delle forze esterne di massa. Noi assumeremo  $\vec{F} \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ .*

**Definizione 2.5.** *Per ogni sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  chiamiamo risultante e momento risultante rispetto ad un polo  $O$  delle forze esterne di massa agenti sul sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t \in [t_0, t_1]$ , i due integrali seguenti:*

$$\int_{S^*(t)} \rho(P, t) \vec{F}(P, t) dS,$$

$$\int_{S^*(t)} (P - O) \times \rho(P, t) \vec{F}(P, t) dS.$$

Analoghe definizioni si danno per tutto il corpo  $\mathcal{C}$ ; in tal caso gli integrali sono estesi a  $S(t)$ .

Un esempio di forze esterne di massa agenti su un corpo continuo è costituito dalle forze peso per le quali la densità  $\vec{F}$  è data da  $\vec{g}$ , accelerazione di gravità.

**Ipotesi 2.3.** Per ogni  $t \in [t_0, t_1]$ , ad ogni sottocorpo  $\mathcal{C}^*$ , è associato un campo vettoriale  $\vec{t}(P, t; \mathcal{C}^*)$ ,  $P \in \partial S^*(t)$ , detto densità delle forze esterne di contatto agenti su  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t$ . Assumiamo  $\vec{t}(P, t; \mathcal{C}^*)$  continuo  $\forall P \in \partial S^*(t)$  e  $\forall t \in [t_0, t_1]$ .

Si suppone che anche a  $\mathcal{C}$  sia associata la densità delle forze esterne di contatto.

**Definizione 2.6.** Chiamiamo risultante delle forze esterne di contatto agenti su  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t \in [t_0, t_1]$ :

$$\int_{\partial S^*(t)} \vec{t}(P, t; \mathcal{C}^*) d\Sigma.$$

Il momento risultante rispetto ad un polo  $O$  delle forze esterne di contatto agenti su  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t \in [t_0, t_1]$  è dato da:

$$\int_{\partial S^*(t)} (P - O) \times \vec{t}(P, t; \mathcal{C}^*) d\Sigma.$$

E' immediato estendere le due definizioni date sopra a tutto il corpo.

Vediamo di interpretare fisicamente risultante e momento risultante delle forze di contatto.

Consideriamo dapprima l'intero corpo  $\mathcal{C}$ . Risultante e momento risultante delle forze di contatto agenti su  $\mathcal{C}$  rappresentano l'azione esercitata dall'ambiente esterno sul corpo reale che schematizziamo con  $\mathcal{C}$  attraverso la frontiera della regione che il corpo occupa nello spazio istante per istante.

Consideriamo ora un sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  di  $\mathcal{C}$  tale che

$$\partial S^*(t) \cap \partial S(t) = \emptyset \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Risultante e momento risultante rappresentano l'azione che la porzione restante del corpo esercita su  $\mathcal{C}^*$  attraverso la frontiera della regione che questo occupa istante per istante.

Consideriamo infine un sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  di  $\mathcal{C}$  tale che

$$\partial S^*(t) \cap \partial S(t) \neq \emptyset \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Risultante e momento risultante delle forze di contatto agenti su  $\mathcal{C}^*$  rappresentano l'azione esercitata su  $\mathcal{C}^*$  attraverso la frontiera della regione che questo occupa in parte dalla porzione restante del corpo ed in parte dall'ambiente esterno.

**Ipotesi 2.4.** *Supponiamo che non siano distribuite nel corpo continuo delle coppie di massa o di contatto.*

I corpi per i quali sussiste tale proprietà sono detti *corpi continui non polari*, mentre quelli nei quali sono presenti delle coppie sono detti *corpi continui polari*. Noi ci limiteremo a prendere in considerazione solo corpi non polari. Tenendo presente l'ipotesi 2.4, possiamo dare le seguenti definizioni:

**Definizione 2.7.** *Definiamo risultante e momento risultante rispetto ad un polo  $O$  delle forze esterne agenti sul sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t \in [t_0, t_1]$  i due integrali seguenti:*

$$\begin{aligned}\vec{R}^*(t) &= \int_{S^*(t)} \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S^*(t)} \vec{t}(P, t; \mathcal{C}^*) d\Sigma, \\ \vec{\Omega}_O^*(t) &= \int_{S^*(t)} (P - O) \times \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S^*(t)} (P - O) \times \vec{t}(P, t; \mathcal{C}^*) d\Sigma.\end{aligned}$$

Analoghe definizioni valgono per tutto il corpo  $\mathcal{C}$ .

Supponiamo che valga il seguente **assioma degli sforzi**.

**Ipotesi 2.5.** *Per ogni  $t \in [t_0, t_1]$  esiste un campo vettoriale dipendente da  $t$   $\vec{T} = \vec{T}(P, t, \vec{u})$ , definito per  $P \in S(t)$ ,  $\vec{u}$  versore arbitrario, tale che per ogni sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  risulti:*

$$\vec{t}(P, t; \mathcal{C}^*) = \vec{T}(P, t, \vec{n}),$$

dove  $P \in \partial S^*(t)$ ,  $\vec{n}$  è il versore normale a  $\partial S^*(t)$ , rivolto verso l'esterno di  $S^*(t)$ .

Si assume  $\vec{T}(P, t, \vec{u})$  continuo rispetto ad ogni suo argomento ed inoltre si suppone che fissati  $t$  ed  $\vec{u}$  ad arbitrio, il campo  $\vec{T}(\cdot, t, \vec{u}) \in \mathcal{C}^1(S(t))$ .

**Definizione 2.8.**  $\vec{T}(P, t, \vec{u})$  è detto sforzo specifico relativo a  $P$  e a  $t$ , e coordinato alla direzione orientata di versore  $\vec{u}$ . Inoltre  $\vec{T}(P, t, \vec{n})$ , con  $P \in \partial S(t)$  ed  $\vec{n}$  il versore normale a  $\partial S(t)$  rivolto verso l'esterno di  $S(t)$ , è detto trazione superficiale e viene denotato con  $\vec{f}(P, t)$ .

**Definizione 2.9.** *Se lo sforzo specifico  $\vec{T}(P, t, \vec{u})$  è parallelo a  $\vec{u}$ , si dice che è uno sforzo normale; se lo sforzo specifico  $\vec{T}(P, t, \vec{u})$  è normale a  $\vec{u}$ , si dice che è uno sforzo di taglio.*

In generale un qualsiasi sforzo specifico può sempre essere decomposto nella somma di uno sforzo normale e di uno sforzo di taglio.

## 2.2 Dinamica

Com'è noto, la meccanica dei corpi continui è governata dalle due *equazioni cardinali*, che vengono assunte come assiomi.

Richiamiamo tali equazioni.

**Ipotesi 2.6.** *Dato un corpo continuo  $\mathcal{C}$  in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , sussistono le due equazioni seguenti:*

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \frac{d\vec{Q}}{dt}(t) = \vec{R}(t) \quad (2.2.1)$$

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \frac{d\vec{K}_O}{dt}(t) = \vec{\Omega}_O(t) \quad (2.2.2)$$

con  $O$  punto fisso dello spazio geometrico.

La (2.2.1) è nota come **I equazione cardinale**, la (2.2.2) come **II equazione cardinale**.

Le due equazioni cardinali sussistono anche per qualsiasi sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  di  $\mathcal{C}$ , dal momento che ogni sottocorpo di un corpo continuo è a sua volta un corpo continuo. In tal caso scriveremo:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \frac{d\vec{Q}^*}{dt}(t) = \vec{R}^*(t) \quad (2.2.3)$$

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \frac{d\vec{K}_O^*}{dt}(t) = \vec{\Omega}_O^*(t). \quad (2.2.4)$$

Vediamo ora quale forma specifica assumono le equazioni (2.2.3), (2.2.4) e le equazioni (2.2.1), (2.2.2) tenendo conto delle definizioni introdotte precedentemente.

Consideriamo un qualsiasi sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  del corpo continuo  $\mathcal{C}$ . Rivilgiamo la nostra attenzione dapprima alla (2.2.3). Per definizione di quantità di moto

$$\vec{Q}^*(t) = \int_{S^*(t)} \rho \vec{v} dS$$

ed applicando il corollario 2.1 del teorema del trasporto si ha:

$$\frac{d\vec{Q}^*}{dt}(t) = \int_{S^*(t)} \rho \dot{\vec{v}} dS.$$

D'altra parte:

$$\vec{R}^*(t) = \int_{S^*(t)} \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S^*(t)} \vec{T}(\vec{n}) d\Sigma.$$

Dunque la (2.2.3) assume la forma:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \int_{S^*(t)} \rho \dot{\vec{v}} dS = \int_{S^*(t)} \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S^*(t)} \vec{T}(\vec{n}) d\Sigma. \quad (2.2.5)$$

Per tutto il corpo  $\mathcal{C}$  la I equazione cardinale si scrive nel modo seguente:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \int_{S(t)} \rho \dot{\vec{v}} dS = \int_{S(t)} \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S(t)} \vec{f} d\Sigma. \quad (2.2.6)$$

Consideriamo ora la (2.2.4). Per definizione di momento delle quantità di moto

$$\vec{K}_O^*(t) = \int_{S^*(t)} (P - O) \times \rho \vec{v} dS = \int_{S^*(t)} \rho [(P - O) \times \vec{v}] dS$$

ed applicando il corollario 2.1 del teorema del trasporto si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{K}_O^*}{dt}(t) &= \int_{S^*(t)} \rho [(P - O) \times \vec{v}] \cdot dS = \\ &= \int_{S^*(t)} \rho \left[ (P - O) \cdot \times \vec{v} + (P - O) \times \dot{\vec{v}} \right] dS. \end{aligned}$$

D'altra parte, se  $P$  è la posizione occupata all'istante  $t$  dalla particella che nella configurazione di riferimento sta in  $P_0$ , abbiamo

$$P - O = \vec{x}(P_0, t)$$

per cui il campo vettoriale  $P - O$  definito in  $S(t)$  con  $t$  che varia in  $[t_0, t_1]$  è la rappresentazione spaziale del campo  $\vec{x} = \vec{x}(P_0, t)$  definito in  $\mathcal{S}_0$ . Allora

$$(P - O) \cdot = (\dot{\vec{x}})_s = \dot{\vec{v}}.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{K}_O^*}{dt}(t) &= \int_{S^*(t)} \rho \left[ \dot{\vec{v}} \times \vec{v} + (P - O) \times \dot{\vec{v}} \right] dS = \\ &= \int_{S^*(t)} \rho (P - O) \times \dot{\vec{v}} dS. \end{aligned}$$

Se poi teniamo presente che:

$$\vec{\Omega}_0^*(t) = \int_{S^*(t)} (P - O) \times \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S^*(t)} (P - O) \times \vec{T}(\vec{n}) d\Sigma,$$

otteniamo che la (2.2.4) assume la forma:

$$\forall t \in [t_0, t_1]$$

$$\int_{S^*(t)} (P - O) \times \rho \dot{\vec{v}} dS = \int_{S^*(t)} (P - O) \times \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S^*(t)} (P - O) \times \vec{T}(\vec{n}) d\Sigma. \quad (2.2.7)$$

Per tutto il corpo continuo  $\mathcal{C}$  la II equazione cardinale si scrive nel modo seguente:

$$\forall t \in [t_0, t_1]$$

$$\int_{S(t)} (P - O) \times \rho \dot{\vec{v}} dS = \int_{S(t)} (P - O) \times \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S(t)} (P - O) \times \vec{f} d\Sigma. \quad (2.2.8)$$

Se in  $[t_0, t_1]$  il corpo continuo è in quiete, allora  $S(t) = S \quad \forall t \in [t_0, t_1]$ , dove  $S$  è una regione fissa dello spazio ed inoltre  $\vec{v}, \dot{\vec{v}} = \vec{0}$  in  $S \times [t_0, t_1]$ , per cui le due equazioni cardinali per tutto il corpo si riducono a:

$$\begin{aligned} \forall t \in [t_0, t_1] \quad \vec{0} &= \int_S \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S} \vec{f} d\Sigma, \\ \forall t \in [t_0, t_1] \quad \vec{0} &= \int_S (P - O) \times \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S} (P - O) \times \vec{f} d\Sigma. \end{aligned}$$

Tali equazioni sono dette **Equazioni cardinali della statica per un corpo continuo** e si possono scrivere anche per ogni sottocorpo.

Utilizzando la I equazione cardinale e scegliendo opportuni sottocorpi si potrebbe dimostrare il seguente

**Teorema 2.1. Teorema di Cauchy sugli sforzi** Dato un corpo continuo in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , per ogni  $t \in [t_0, t_1]$ , per ogni  $P \in S(t)$ , per ogni versore  $\vec{u}$ , si ha:

$$\vec{T}(P, t, \vec{u}) = \tilde{T}(P, t) \cdot \vec{u},$$

dove  $\tilde{T} = \tilde{T}(P, t)$  è un campo tensoriale del secondo ordine, detto  *tensore degli sforzi di Cauchy*.

Tenendo presenti le ipotesi di regolarità imposte allo sforzo specifico, si deduce che  $\tilde{T} \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$  e che inoltre  $\forall t \in [t_0, t_1] \quad \tilde{T}(\cdot, t) \in \mathcal{C}^1(S(t))$ .

Come abbiamo visto, le due equazioni cardinali sono equazioni scritte in forma globale; da queste ci proponiamo ora di dedurre due equazioni che traducono

in forma locale le equazioni cardinali, cioè equazioni che devono essere soddisfatte in ogni punto di  $S(t)$  ed in ogni istante  $t \in [t_0, t_1]$ . Tali equazioni sono dette I e II equazione indefinita della meccanica dei corpi continui. Noi otterremo, per il momento, le due equazioni rimanendo in ambito spaziale.

Deduciamo dapprima la I equazione indefinita della meccanica dei corpi continui.

Consideriamo un corpo continuo  $\mathcal{C}$  in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  e scriviamo la I equazione cardinale per un suo sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  arbitrario:

$$\begin{aligned} \forall t \in [t_0, t_1] \quad \int_{S^*(t)} \rho \dot{\vec{v}} dS &= \int_{S^*(t)} \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S^*(t)} \vec{T}(\vec{n}) d\Sigma = \\ &= \int_{S^*(t)} \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S^*(t)} \tilde{T} \cdot \vec{n} d\Sigma \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il teorema di Cauchy.

D'altra parte, poiché abbiamo supposto di considerare solo corpi e sottocorpi che occupano la chiusura di domini regolari, grazie anche alle proprietà di regolarità del tensore degli sforzi di Cauchy, all'integrale di superficie della (2.2.9) possiamo applicare il teorema della divergenza che ci fornisce:

$$\int_{\partial S^*(t)} \tilde{T} \cdot \vec{n} d\Sigma = \int_{S^*(t)} \operatorname{div} \tilde{T} dS.$$

Ovviamente la divergenza di  $\tilde{T}$  nell'integrale di volume scritto sopra è il campo vettoriale che si ottiene contraendo il secondo indice di  $\tilde{T}$  e l'indice di derivazione. Sostituendo nella (2.2.9) e portando tutto al primo membro sotto un unico segno di integrale, otteniamo:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \int_{S^*(t)} \left[ \rho \dot{\vec{v}} - \rho \vec{F} - \operatorname{div} \tilde{T} \right] dS = \vec{0}. \quad (2.2.10)$$

Ma per l'arbitrarietà di  $\mathcal{C}^*$ , la (2.2.10) sussiste per ogni  $S^*(t)$  chiusura di un dominio regolare contenuto in  $S(t)$  ed inoltre

$$\rho \dot{\vec{v}} - \rho \vec{F} - \operatorname{div} \tilde{T} \in \mathcal{C}(S(t)) \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Applichiamo allora il lemma 1.1, tenendo presente che questo continua a sussistere se supponiamo che l'insieme  $S$  e i suoi sottoinsiemi arbitrari che intervengono nel lemma siano la chiusura di domini regolari.

Così, grazie all'arbitrarietà di  $t$  in  $[t_0, t_1]$  e di  $S^*(t)$ , abbiamo:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + \operatorname{div} \tilde{T} \quad \forall P \in S(t), \quad \forall t \in [t_0, t_1], \text{ ossia in } \mathcal{S}. \quad (2.2.11)$$

La (2.2.11) è la **I equazione indefinita della meccanica dei corpi continui**.

Per quanto riguarda la II equazione indefinita della meccanica dei corpi continui, questa si deduce dalla II equazione cardinale per un sottocorpo arbitrario  $\mathcal{C}^*$  del corpo continuo  $\mathcal{C}$  dopo aver applicato la formula di Cauchy:

$$\forall t \in [t_0, t_1]$$

$$\int_{S^*(t)} (P - O) \times \rho \vec{v} dS = \int_{S^*(t)} (P - O) \times \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S^*(t)} (P - O) \times (\tilde{T} \cdot \vec{n}) d\Sigma. \quad (2.2.12)$$

Con opportuni calcoli, usando le formule integrali di Gauss-Ostrogradski, la I equazione indefinita e il lemma 1.1, dalla (2.2.12) si ottiene

$$\tilde{\vartheta} \cdot \tilde{T}^t = \vec{0} \quad \text{in } S(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad \text{ossia in } \mathcal{S} \quad (2.2.13)$$

che è la **II equazione indefinita della meccanica dei corpi continui**.

Come ora mostriamo, da questa equazione discende la simmetria del tensore degli sforzi di Cauchy.

**Teorema 2.2.** *In un corpo continuo in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  il tensore degli sforzi di Cauchy è simmetrico, ossia*

$$\tilde{T}(P, t) = \tilde{T}^t(P, t) \quad \forall (P, t) \in \mathcal{S}.$$

#### Dimostrazione

Se scriviamo in componenti la II equazione indefinita (2.2.13) abbiamo:

$$\vartheta_{ijr} T_{rj} = 0 \quad \text{per } i = 1, 2, 3 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Per  $i = 1$ , otteniamo:

$$\vartheta_{1jr} T_{rj} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Ma  $\vartheta_{1jr} = \epsilon_{1jr}$  e per la definizione di alternatore a tre indici, discende:

$$\epsilon_{123} T_{32} + \epsilon_{132} T_{23} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S},$$

ossia:

$$T_{32} = T_{23} \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Considerando poi  $i = 2$  e  $i = 3$ , si ottiene :

$$T_{31} = T_{13}, \quad T_{12} = T_{21} \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Dunque

$$\tilde{T} = \tilde{T}^t \quad \text{in } \mathcal{S}$$

e il teorema risulta così dimostrato.

A questo punto introduciamo alcune definizioni che sono un'indispensabile premessa al teorema dell'energia cinetica che enunceremo subito dopo.

**Definizione 2.10.** *Dato un corpo continuo in moto nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , chiamiamo potenza delle forze esterne agenti sul sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t \in [t_0, t_1]$  la grandezza scalare:*

$$\Pi_e^*(t) = \int_{S^*(t)} \rho \vec{F} \cdot \vec{v} \, dS + \int_{\partial S^*(t)} \vec{T}(\vec{n}) \cdot \vec{v} \, d\Sigma.$$

La potenza delle forze esterne agenti su tutto il corpo  $\mathcal{C}$  all'istante  $t \in [t_0, t_1]$  è la grandezza scalare:

$$\Pi_e(t) = \int_{S(t)} \rho \vec{F} \cdot \vec{v} \, dS + \int_{\partial S(t)} \vec{f} \cdot \vec{v} \, d\Sigma.$$

**Definizione 2.11.** *Dato un intervallo di tempo  $[t', t''] \subset [t_0, t_1]$ , chiamiamo lavoro delle forze esterne agenti sul sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  nell'intervallo di tempo  $[t', t'']$  la seguente grandezza scalare:*

$$L_{e,[t',t'']}^* = \int_{t'}^{t''} \Pi_e^*(t) \, dt.$$

Analoga definizione si dà relativamente a tutto il corpo.

Come sappiamo, in un moto regolare  $\vec{v} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$ ; è quindi possibile dare la seguente definizione.

**Definizione 2.12.** *Prende il nome di tensore di velocità di deformazione il campo tensoriale dipendente da  $t$ , rappresentato in ambito spaziale,  $\tilde{D} = \tilde{D}(P, t)$ , così definito:*

$$\forall (P, t) \in \mathcal{S} \quad \tilde{D}(P, t) = \frac{1}{2} [\text{grad } \vec{v}(P, t) + \text{grad}^t \vec{v}(P, t)].$$

Si potrebbe facilmente dimostrare la seguente proposizione:

**Proposizione 2.1.** *Se un corpo continuo  $\mathcal{C}$  ad un dato istante  $t$  possiede un atto di moto rigido, ossia se il campo spaziale della velocità di  $\mathcal{C}$  in tale istante è della forma:*

$$\vec{v}(P, t) = \vec{v}(\bar{O}, t) + \omega(t) \times (P - \bar{O}) \quad \forall P \in S(t)$$

con  $\bar{O}$  punto fissato arbitrariamente in  $S(t)$ , allora

$$\tilde{D}(P, t) = \tilde{0} \quad \forall P \in S(t).$$

**Definizione 2.13.** Dato un corpo continuo in moto nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , chiamiamo potenza delle forze interne agenti sul sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t \in [t_0, t_1]$  la grandezza scalare:

$$\Pi_i^*(t) = - \int_{S^*(t)} \tilde{T}(P, t) \cdot \tilde{D}(P, t) dS = - \int_{S^*(t)} T_{ij}(P, t) D_{ij}(P, t) dS.$$

La definizione si estende immediatamente a tutto il corpo.

**Definizione 2.14.** Dato un intervallo di tempo  $[t', t''] \subset [t_0, t_1]$ , chiamiamo lavoro delle forze interne agenti sul sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  nell'intervallo di tempo  $[t', t'']$  la seguente grandezza scalare:

$$L_{i, [t', t'']}^* = \int_{t'}^{t''} \Pi_i^*(t) dt.$$

Analoga definizione si dà relativamente a tutto il corpo.

Possiamo ora enunciare il teorema dell'energia cinetica, conseguenza della I equazione indefinita

**Teorema 2.3. Teorema dell'energia cinetica** Dato un corpo continuo in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , si ha:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \frac{dT}{dt}(t) = \Pi_e(t) + \Pi_i(t). \quad (2.2.14)$$

#### Dimostrazione

Il teorema è conseguenza della I equazione indefinita:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + \operatorname{div} \tilde{T} \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Fissiamo  $t$  nell'intervallo di moto  $[t_0, t_1]$  e moltiplichiamo scalarmente entrambi i membri della I equazione indefinita relativa a  $(P, t)$  con  $P \in S(t)$  per  $\vec{v}(P, t)$ , integrando poi su  $S(t)$  l'equazione scalare risultante. Otteniamo così:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \int_{S(t)} \rho \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} dS = \int_{S(t)} \rho \vec{F} \cdot \vec{v} dS + \int_{S(t)} \operatorname{div} \tilde{T} \cdot \vec{v} dS. \quad (2.2.15)$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} \int_{S(t)} \rho \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} dS &= \int_{S(t)} \rho \left( \frac{\vec{v}^2}{2} \right)' dS = \\ &= \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \rho \frac{\vec{v}^2}{2} dS = \frac{dT}{dt}(t), \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

avendo applicato il corollario del teorema del trasporto.

Ricordiamo poi che per definizione:

$$\Pi_e(t) = \int_{S(t)} \rho \vec{F} \cdot \vec{v} dS + \int_{\partial S(t)} \vec{f} \cdot \vec{v} d\Sigma$$

con  $\vec{f}(\cdot, t) = \vec{T}(\cdot, t, \vec{n})|_{\partial S(t)}$ .

Dunque al II membro della (2.2.15) compare il termine di  $\Pi_e(t)$  rappresentato dall'integrale di volume.

Vediamo ora di operare opportunamente sul secondo integrale al II membro della (2.2.15). Precisamente consideriamone la funzione integranda e scriviamola in un modo più conveniente esprimendola in componenti:

$$\operatorname{div} \tilde{T} \cdot \vec{v} = T_{ij,j} v_i = (T_{ij} v_i)_{,j} - T_{ij} v_{i,j} = \operatorname{div}(\vec{v} \cdot \tilde{T}) - \tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v}.$$

Allora

$$\int_{S(t)} \operatorname{div} \tilde{T} \cdot \vec{v} dS = \int_{S(t)} \operatorname{div}(\vec{v} \cdot \tilde{T}) dS - \int_{S(t)} \tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} dS.$$

Applicando al primo integrale a secondo membro il teorema della divergenza, si ottiene:

$$\int_{S(t)} \operatorname{div} \tilde{T} \cdot \vec{v} dS = \int_{\partial S(t)} (\vec{v} \cdot \tilde{T}) \cdot \vec{n} d\Sigma - \int_{S(t)} \tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} dS.$$

D'altra parte, su  $\partial S(t)$ , per la formula di Cauchy:

$$(\vec{v} \cdot \tilde{T}) \cdot \vec{n} = v_i T_{ij} n_j = v_i T_i(\vec{n}) = v_i f_i$$

per cui:

$$\int_{\partial S(t)} (\vec{v} \cdot \tilde{T}) \cdot \vec{n} d\Sigma = \int_{\partial S(t)} \vec{f} \cdot \vec{v} d\Sigma.$$

Inoltre, essendo  $\operatorname{grad} \vec{v} = \tilde{D} + \tilde{E}$  dove  $\tilde{E}$  è la parte emisimmetrica di  $\operatorname{grad} \vec{v}$ , si ha:

$$\tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} = \tilde{T} \cdot \tilde{D} + \tilde{T} \cdot \tilde{E} = \tilde{T} \cdot \tilde{D},$$

poiché  $\tilde{T} \cdot \tilde{E} = 0$  a causa della contrazione dei due indici di simmetria di  $\tilde{T}$  con i due di emisimmetria di  $\tilde{E}$ .

In conclusione deduciamo:

$$\int_{S(t)} \operatorname{div} \tilde{T} \cdot \vec{v} dS = \int_{\partial S(t)} \vec{f} \cdot \vec{v} d\Sigma - \int_{S(t)} \tilde{T} \cdot \tilde{D} dS = \int_{\partial S(t)} \vec{f} \cdot \vec{v} d\Sigma - \Pi_i(t).$$

Sostituendo i risultati trovati nella (2.2.15), otteniamo la (2.2.14), c.v.d.

Ovviamente il teorema dell'energia cinetica vale anche per qualsiasi sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  ed in tal caso scriviamo:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \frac{dT^*}{dt}(t) = \Pi_e^*(t) + \Pi_i^*(t).$$

Ci chiediamo a questo punto se tramite le due equazioni indefinite della meccanica dei corpi continui e l'equazione di continuità per la massa siamo in grado di determinare il moto di un corpo reale schematizzato con il modello di corpo continuo deformabile.

Come abbiamo visto, in ambito spaziale, tali equazioni, che devono essere verificate in  $\mathcal{S}$ , sono le seguenti:

- l'equazione di continuità della massa

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0;$$

- la I equazione indefinita

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + \operatorname{div} \tilde{T};$$

- la conseguenza della II equazione indefinita

$$\tilde{T} = \tilde{T}^t.$$

Il moto, dal punto di vista spaziale, è noto se è noto il campo spaziale della velocità  $\vec{v} = \vec{v}(P, t)$ . Tale campo introduce nel problema tre incognite scalari, cioè le sue tre componenti  $v_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Sono comunque a priori incogniti anche la densità di massa  $\rho = \rho(P, t)$  e il tensore degli sforzi di Cauchy  $\tilde{T} = \tilde{T}(P, t)$  che equivalgono ad altre 10 incognite scalari, poiché  $\tilde{T}$  è individuato mediante le 9 componenti  $T_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . E' invece nota la densità delle forze esterne di massa  $\vec{F} = \vec{F}(P, t)$ .

Perciò in tutto abbiamo 13 incognite scalari.

Vediamo ora quante sono le equazioni scalari indipendenti che abbiamo a disposizione. L'equazione di continuità è una singola equazione scalare, la I equazione indefinita equivale a tre equazioni scalari e la relazione tensoriale che esprime la simmetria del tensore degli sforzi di Cauchy equivale a tre equazioni scalari indipendenti. Dunque le equazioni scalari sono in tutto 7, mentre le incognite scalari sono 13.

Perciò il problema del moto non è impostato in maniera completa.

Per ottenere pareggio tra numero di incognite e numero di equazioni dobbiamo aggiungere altre 6 equazioni scalari indipendenti. Tali equazioni aggiuntive non possono essere ricavate da nozioni meccaniche generali perchè queste le abbiamo già sfruttate in maniera completa, ma occorre rilevare che le equazioni considerate valgono per ogni corpo continuo e non tengono conto delle proprietà meccaniche specifiche del corpo reale che rappresentiamo con il modello del corpo continuo. L'esperienza ci mostra che i corpi reali presentano un comportamento meccanico diverso a seconda della loro struttura materiale. Le 6 equazioni da aggiungere devono quindi essere ottenute sperimentalmente per caratterizzare il corpo reale che stiamo schematizzando con il modello di corpo continuo. Tali equazioni mettono in relazione grandezze che descrivono lo stato di sforzo del corpo con grandezze che descrivono lo stato di deformazione: sono dette **relazioni sforzo-deformazione** e fanno parte delle **equazioni costitutive** o **leggi di comportamento**.

Le relazioni sforzo-deformazione, suggerite dall'esperienza, danno luogo esattamente a 6 equazioni scalari, ma l'esperienza stessa ci mostra che spesso in tali relazioni compaiono altre grandezze incognite che non hanno carattere meccanico, bensì termodinamico, come ad esempio la temperatura.

Questo fatto non è sicuramente sorprendente poichè tutti sappiamo che c'è uno stretto legame tra effetti meccanici ed effetti termici. E' ben noto, ad esempio, che se si riscalda una sbarra metallica, questa si allunga: mediante un effetto termico si ottiene un effetto meccanico. Se invece facciamo espandere un gas adiabaticamente, ossia senza fornirgli calore, questo si raffredda: mediante un effetto meccanico si ottiene un effetto termico.

Dunque per un corpo continuo deformabile in generale non è possibile impostare in maniera completa il problema del moto rimanendo in un ambito puramente meccanico, ma bisogna considerare un problema più generale: **il problema termomeccanico**.

Tenendo presente quanto asserito, è opportuno enunciare i due assiomi della termodinamica per i corpi continui.

## 2.3 Termodinamica

Occupiamoci prima di tutto del I assioma della termodinamica nel quale svolgono un ruolo fondamentale i concetti di energia interna e di potenza calorica.

Supponiamo di avere un corpo continuo  $\mathcal{C}$  in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ .

Facciamo le seguenti ipotesi:

**Ipotesi 2.7.**  $\forall t \in [t_0, t_1]$  è definito in  $S(t)$ , un campo scalare:

$$k = k(P, t), \quad k \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S}),$$

detto energia interna specifica del corpo  $\mathcal{C}$  all'istante  $t$ .

**Definizione 2.15.** Preso un sottocorpo  $\mathcal{C}^*$ , chiamiamo energia interna di  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t \in [t_0, t_1]$  la grandezza scalare:

$$K^*(t) = \int_{S^*(t)} \rho(P, t) k(P, t) dS.$$

Chiamiamo energia totale di  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t \in [t_0, t_1]$ :

$$W^*(t) = T^*(t) + K^*(t).$$

Analoghe definizioni vengono date per tutto il corpo  $\mathcal{C}$ .

L'energia interna fisicamente rappresenta la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale delle molecole che costituiscono il corpo reale schematizzato con  $\mathcal{C}$ .

Per quanto riguarda la potenza calorica, distinguiamo tra potenza calorica dovuta a sorgenti interne di calore e potenza calorica dovuta a calore di contatto (che fluisce nel corpo attraverso la frontiera della regione occupata istante per istante).

Precisamente faremo le seguenti assunzioni.

**Ipotesi 2.8.** Supponiamo che  $\forall t \in [t_0, t_1]$ , sia definito in  $S(t)$  un campo scalare:

$$r = r(P, t), \quad r \in \mathcal{C}(\mathcal{S}),$$

detto densità della potenza calorica dovuta a sorgenti interne di calore.

**Definizione 2.16.** Preso un sottocorpo  $\mathcal{C}^*$ , chiamiamo potenza calorica dovuta a sorgenti interne di calore per  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t \in [t_0, t_1]$

$$\mathcal{Q}_i^*(t) = \int_{S^*(t)} \rho(P, t) r(P, t) dS.$$

La potenza calorica dovuta a sorgenti interne di calore per  $\mathcal{C}$  all'istante  $t \in [t_0, t_1]$  è:

$$\mathcal{Q}_i(t) = \int_{S(t)} \rho(P, t) r(P, t) dS.$$

**Ipotesi 2.9.** Per quanto riguarda il calore di contatto, supponiamo che  $\forall t \in [t_0, t_1]$ , ad ogni sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  sia associato un campo scalare:

$$q = q(P, t; \mathcal{C}^*),$$

dove  $P \in \partial S^*(t)$ , continuo  $\forall P \in \partial S^*(t)$  e  $\forall t \in [t_0, t_1]$ , detto densità della potenza calorica dovuta a contatto per il sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t$ . Tale campo è definito anche in corrispondenza di tutto il corpo  $\mathcal{C}$ .

**Definizione 2.17.** Chiamiamo potenza calorica dovuta a contatto per il sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t \in [t_0, t_1]$ :

$$\mathcal{Q}_c^*(t) = \int_{\partial S^*(t)} q(P, t; \mathcal{C}^*) d\Sigma.$$

La potenza calorica dovuta a contatto per  $\mathcal{C}$  all'istante  $t \in [t_0, t_1]$  è:

$$\mathcal{Q}_c(t) = \int_{\partial S(t)} q(P, t; \mathcal{C}) d\Sigma.$$

**Definizione 2.18.** Definiamo potenza calorica (totale) per il sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t \in [t_0, t_1]$ :

$$\mathcal{Q}^*(t) = \mathcal{Q}_i^*(t) + \mathcal{Q}_c^*(t).$$

Analogamente si dà per tutto il corpo.

**Definizione 2.19.** Chiamiamo calore ricevuto dal sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  nell'intervallo di tempo  $[t', t''] \subset [t_0, t_1]$  a causa delle sorgenti interne di calore la grandezza scalare:

$$Q_{i, [t', t'']}^* = \int_{t'}^{t''} \mathcal{Q}_i^*(t) dt.$$

Per tutto il corpo  $\mathcal{C}$  il calore ricevuto nell'intervallo di tempo  $[t', t''] \subset [t_0, t_1]$  a causa delle sorgenti interne di calore è dato da

$$Q_{i, [t', t'']} = \int_{t'}^{t''} \mathcal{Q}_i(t) dt.$$

$Q_{i, [t', t'']}^*$  o  $Q_{i, [t', t'']}$  dal punto di vista fisico rappresentano il calore ricevuto da  $\mathcal{C}^*$  o  $\mathcal{C}$  nell'intervallo di tempo  $[t', t'']$  a causa del fenomeno dell'irraggiamento o a causa di reazioni chimiche interne.

**Definizione 2.20.** Chiamiamo calore ricevuto dal sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  nell'intervallo di tempo  $[t', t''] \subset [t_0, t_1]$  dovuto a contatto la grandezza scalare:

$$Q_{c, [t', t'']}^* = \int_{t'}^{t''} \mathcal{Q}_c^*(t) dt.$$

Per tutto il corpo  $\mathcal{C}$  il calore ricevuto nell'intervallo di tempo  $[t', t''] \subset [t_0, t_1]$  dovuto a contatto è dato da

$$Q_{\mathcal{C}, [t', t'']} = \int_{t'}^{t''} Q_{\mathcal{C}}(t) dt.$$

Vediamo di interpretare fisicamente anche quest'ultima grandezza.

Per tutto il corpo  $Q_{\mathcal{C}, [t', t'']}$  rappresenta il calore fluito nel corpo dall'ambiente esterno attraverso la frontiera della regione occupata da  $\mathcal{C}$ .

Per quanto riguarda i sottocorpi, distinguiamo due casi. Supponiamo dapprima che  $\mathcal{C}^*$  sia tale che

$$\partial S^*(t) \cap \partial S(t) = \emptyset \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Allora  $Q_{\mathcal{C}, [t', t'']}$  rappresenta la quantità di calore che in  $[t', t'']$  è fluita in  $\mathcal{C}^*$  dalla porzione restante di  $\mathcal{C}$  attraverso la frontiera della regione occupata da  $\mathcal{C}^*$ .

Consideriamo poi un sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  di  $\mathcal{C}$  tale che

$$\partial S^*(t) \cap \partial S(t) \neq \emptyset \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

$Q_{\mathcal{C}, [t', t'']}$  rappresenta la quantità di calore che in  $[t', t'']$  è fluita in  $\mathcal{C}^*$  attraverso la frontiera della regione da esso occupata in parte dalla porzione restante di  $\mathcal{C}$  in parte dall'ambiente esterno.

**Definizione 2.21.** *Chiamiamo calore ricevuto dal sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  nell'intervallo di tempo  $[t', t''] \subset [t_0, t_1]$  la grandezza scalare:*

$$Q_{[t', t'']}^* = Q_{i, [t', t'']}^* + Q_{\mathcal{C}, [t', t'']}^*.$$

Analogamente si dà per tutto il corpo.

Facciamo ora un'ulteriore ipotesi che è analoga all'assioma degli sforzi.

**Ipotesi 2.10.** *Supponiamo che  $\forall t \in [t_0, t_1]$ , sia definito in  $S(t)$  un campo vettoriale*

$$\vec{q} = \vec{q}(P, t),$$

*detto vettore flusso di calore, tale che  $\forall t \in [t_0, t_1]$ ,  $\forall \mathcal{C}^*$ , sottocorpo di  $\mathcal{C}$ :*

$$q(P, t; \mathcal{C}^*) = -\vec{q}(P, t) \cdot \vec{n},$$

*con  $P \in \partial S^*(t)$ , ed  $\vec{n}$  versore della normale esterna in  $\partial S^*(t)$ . Inoltre supponiamo che  $\vec{q} \in \mathcal{C}(S)$  e che  $\forall t \in [t_0, t_1]$  fissato,  $\vec{q}(\cdot, t) \in \mathcal{C}^1(S(t))$ .*

Tenendo conto di queste ipotesi, risulta:

$$\mathcal{Q}_c^*(t) = - \int_{\partial S^*(t)} \vec{q} \cdot \vec{n} \, d\Sigma = - \int_{S^*(t)} \operatorname{div} \vec{q} \, dS,$$

avendo applicato il teorema della divergenza.

Otteniamo dunque:

$$\mathcal{Q}^*(t) = \int_{S^*(t)} [\rho r - \operatorname{div} \vec{q}] \, dS.$$

Siamo ora in grado di enunciare il primo assioma della termodinamica per un corpo continuo.

**Assioma 2.1. I assioma della termodinamica.** *Dato un corpo continuo in moto nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , si ha:*

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \frac{dW}{dt}(t) = \Pi_e(t) + \mathcal{Q}(t). \quad (2.3.1)$$

Tale assioma vale anche per ogni sottocorpo ed è espresso mediante l'equazione:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \frac{dW^*}{dt}(t) = \Pi_e^*(t) + \mathcal{Q}^*(t). \quad (2.3.2)$$

In genere, tuttavia, tale assioma non lo si usa in questa forma, ma in una forma ridotta, che si ottiene tenendo presente anche l'equazione che traduce il teorema dell'energia cinetica:

$$\frac{dT}{dt}(t) = \Pi_e(t) + \Pi_i(t) \quad (2.3.3)$$

Poiché  $W = T + K$ , si ha:

$$\frac{d}{dt}(T + K)(t) = \Pi_e(t) + \mathcal{Q}(t),$$

Sottraendo membro a membro da quest'ultima equazione la (2.3.3) si ottiene la seguente formulazione del primo assioma della termodinamica:

$$\frac{dK}{dt}(t) = \mathcal{Q}(t) - \Pi_i(t). \quad (2.3.4)$$

Per un sottocorpo

$$\frac{dK^*}{dt}(t) = \mathcal{Q}^*(t) - \Pi_i^*(t). \quad (2.3.5)$$

Nel seguito ci rifaremo sempre a questa seconda formulazione.

Nel II assioma della termodinamica svolgono un ruolo fondamentale i concetti di temperatura assoluta e di entropia.

Facciamo dunque le seguenti ipotesi:

**Ipotesi 2.11.** Supponiamo che  $\forall t \in [t_0, t_1]$  sia definito in  $S(t)$  un campo scalare  $\vartheta = \vartheta(P, t)$ ,  $\vartheta > 0$ ,  $\vartheta \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$ , detto temperatura assoluta del corpo continuo  $\mathcal{C}$  all'istante  $t$ .

**Ipotesi 2.12.**  $\forall t \in [t_0, t_1]$  sia definito in  $S(t)$  un campo scalare  $h = h(P, t)$ ,  $h \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$ , detto entropia specifica del corpo  $\mathcal{C}$  all'istante  $t$ .

**Definizione 2.22.** Considerato un sottocorpo  $\mathcal{C}^*$ , definiamo entropia di  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t$  la grandezza scalare data da:

$$H^*(t) = \int_{S^*(t)} \rho(P, t) h(P, t) dS.$$

Analogamente si dà per l'entropia di  $\mathcal{C}$ :

$$H(t) = \int_{S(t)} \rho(P, t) h(P, t) dS.$$

**Definizione 2.23.** Definiamo produzione totale di entropia per un sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t$  la seguente grandezza scalare:

$$\Gamma^*(t) = \frac{dH^*}{dt}(t) - \int_{S^*(t)} \frac{\rho r}{\vartheta} dS + \int_{\partial S^*(t)} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{\vartheta} d\Sigma, \quad (2.3.6)$$

dove ricordiamo che  $\vec{n}$  è il versore della normale esterna a  $\partial S^*(t)$ .

Analogamente si dà per il corpo  $\mathcal{C}$ :

$$\Gamma(t) = \frac{dH}{dt}(t) - \int_{S(t)} \frac{\rho r}{\vartheta} dS + \int_{\partial S(t)} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{\vartheta} d\Sigma. \quad (2.3.7)$$

Nella definizione di  $\Gamma^*(t)$  o  $\Gamma(t)$  il secondo termine rappresenta la variazione di entropia dovuta a sorgenti interne di calore, mentre l'integrale di superficie preceduto dal segno  $-$  è il flusso di entropia entrante in  $S^*(t)$  o in  $S(t)$  attraverso  $\partial S^*(t)$  o  $\partial S(t)$ , dovuto a calore di contatto.

**Assioma 2.2. II assioma della termodinamica.** Dato un corpo  $\mathcal{C}$  in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , si ha:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \Gamma(t) \geq 0.$$

Tale assioma vale ovviamente anche per ogni sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  di  $\mathcal{C}$ , essendo ogni sottocorpo un corpo.

I due assiomi della termodinamica sono enunciati in forma globale, cioè si riferiscono a tutto  $\mathcal{C}$  o a tutto  $\mathcal{C}^*$ , come le due equazioni cardinali. Ci proponiamo

di dedurre da questi un'equazione ed una disequazione valide in ogni punto ed in ogni istante, cioè un'equazione ed una disequazione indefinite rimanendo, per il momento, in ambito spaziale.

Vediamo di dedurre l'equazione indefinita conseguenza del I assioma della termodinamica.

A tal fine consideriamo la seguente equazione, valida per ogni sottocorpo  $\mathcal{C}^*$ , che traduce in forma ridotta il I assioma della termodinamica:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \frac{dK^*}{dt} = \mathcal{Q}^* - \Pi_i^*. \quad (2.3.8)$$

Teniamo presente che:

$$K^*(t) = \int_{S^*(t)} \rho k dS,$$

da cui, poichè  $k \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$ , per il corollario del teorema del trasporto, deduciamo:

$$\frac{dK^*}{dt}(t) = \int_{S^*(t)} \rho \dot{k} dS.$$

Ricordando le espressioni viste per la potenza calorica e per la potenza delle forze interne, otteniamo:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \int_{S^*(t)} \rho \dot{k} dS = \int_{S^*(t)} (\rho r - \operatorname{div} \vec{q}) dS + \int_{S^*(t)} \tilde{T} \cdot \tilde{D} dS.$$

Se nella precedente equazione portiamo tutto a primo membro, e riuniamo le funzioni integrande sotto un unico segno di integrale, abbiamo:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \int_{S^*(t)} [\rho \dot{k} - \rho r + \operatorname{div} \vec{q} - \tilde{T} \cdot \tilde{D}] dS = 0.$$

Per l'arbitrarietà di  $\mathcal{C}^*$ , l'equazione scritta sopra sussiste per ogni  $S^*(t)$  chiusura di un dominio regolare contenuto in  $S(t)$ . Inoltre, per le ipotesi fatte, il campo scalare sotto integrale è continuo in  $\mathcal{S}$ .

Allora per il lemma 1.1, deduciamo **l'equazione indefinita che traduce il primo assioma della termodinamica per i corpi continui**:

$$\rho \dot{k} = \rho r - \operatorname{div} \vec{q} + \tilde{T} \cdot \tilde{D}. \quad (2.3.9)$$

Nell'equazione (2.3.9) a secondo membro è possibile sostituire  $\tilde{T} \cdot \tilde{D}$  con  $\tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v}$  grazie alla simmetria del tensore degli sforzi di Cauchy.

Deduciamo ora la disequazione indefinita conseguenza del II assioma della termodinamica.

Considerato un sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  arbitrario, allora:

$$H^*(t) = \int_{S^*(t)} \rho(P, t) h(P, t) dS,$$

da cui, per il corollario del teorema del trasporto:

$$\frac{dH^*}{dt}(t) = \int_{S^*(t)} \rho \dot{h} dS.$$

Consideriamo ora, nella (2.3.6) il termine:

$$\int_{\partial S^*(t)} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{\vartheta} d\Sigma.$$

Per il teorema della divergenza abbiamo che:

$$\int_{\partial S^*(t)} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{\vartheta} d\Sigma = \int_{S^*(t)} \operatorname{div} \left( \frac{\vec{q}}{\vartheta} \right) dS.$$

Tenendo presente i risultati precedenti, possiamo riscrivere nel modo seguente la disequazione (2.3.6) che traduce il secondo assioma della termodinamica:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \int_{S^*(t)} \left[ \rho \dot{h} - \frac{\rho r}{\vartheta} + \operatorname{div} \left( \frac{\vec{q}}{\vartheta} \right) \right] dS \geq 0. \quad (2.3.10)$$

Osserviamo che per l'arbitrarietà di  $\mathcal{C}^*$ , la (2.3.10) sussiste per ogni  $S^*(t)$  chiusura di un dominio regolare contenuto in  $S(t)$  e il campo scalare sotto integrale è continuo in  $\mathcal{S}$ .

D'altra parte, ragionando in maniera analoga a quanto fatto per provare il lemma 1.1, si ottiene facilmente un lemma analogo sostituendo al segno di uguaglianza a zero il segno di disuguaglianza  $\geq 0$ . Perciò, stante l'arbitrarietà di  $S^*(t)$  e di  $t$ , deduciamo

$$\rho \dot{h} - \frac{\rho r}{\vartheta} + \operatorname{div} \left( \frac{\vec{q}}{\vartheta} \right) \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{S}. \quad (2.3.11)$$

Osserviamo ora che:

$$\operatorname{div} \left( \frac{\vec{q}}{\vartheta} \right) = \frac{1}{\vartheta} \operatorname{div} \vec{q} + \operatorname{grad} \frac{1}{\vartheta} \cdot \vec{q}$$

ed inoltre:

$$\operatorname{grad} \frac{1}{\vartheta} = -\frac{1}{\vartheta^2} \operatorname{grad} \vartheta.$$

Possiamo quindi riscrivere la disequazione (2.3.11) nel modo seguente:

$$\rho \dot{h} - \frac{\rho r}{\vartheta} + \frac{1}{\vartheta} \operatorname{div} \vec{q} - \frac{1}{\vartheta^2} \operatorname{grad} \vartheta \cdot \vec{q} \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{S}. \quad (2.3.12)$$

Se moltiplichiamo ambo i membri della (2.3.12) per  $\vartheta$ , deduciamo:

$$\rho \vartheta \dot{h} - \rho r + \operatorname{div} \vec{q} - \frac{1}{\vartheta} \operatorname{grad} \vartheta \cdot \vec{q} \geq 0, \quad \text{in } \mathcal{S}. \quad (2.3.13)$$

Abbiamo così ottenuto una disequazione che traduce in forma locale il II assioma della termodinamica.

Tuttavia è conveniente dare una forma differente a tale disequazione eliminando  $r$ , ossia la densità della potenza calorica dovuta a sorgenti interne di calore, che è un termine noto. A tal fine riscriviamo l'equazione indefinita conseguenza del I assioma della termodinamica nella forma seguente:

$$\rho r - \operatorname{div} \vec{q} = \rho \dot{k} - \tilde{T} \cdot \tilde{D}.$$

Sostituendo nella (2.3.13), si ottiene:

$$\rho \left( \vartheta \dot{h} - \dot{k} \right) + \tilde{T} \cdot \tilde{D} - \frac{1}{\vartheta} \operatorname{grad} \vartheta \cdot \vec{q} \geq 0, \quad \text{in } \mathcal{S}. \quad (2.3.14)$$

La (2.3.14) è la **disequazione indefinita conseguenza del II assioma della termodinamica**.

Tale disequazione si può scrivere in altra forma introducendo la definizione di energia libera specifica.

**Definizione 2.24.** *Definiamo energia libera specifica la grandezza scalare denotata con  $\psi$  data da:*

$$\psi = k - \vartheta h.$$

Osserviamo che:

$$\psi = k - \vartheta h \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi} = \dot{k} - \vartheta \dot{h} - \dot{\vartheta} h \quad \Rightarrow \quad \dot{k} - \vartheta \dot{h} = \dot{\psi} + h \dot{\vartheta}.$$

Allora possiamo riscrivere la disequazione (2.3.14) nella forma:

$$\rho \left( \dot{\psi} + h \dot{\vartheta} \right) - \tilde{T} \cdot \tilde{D} + \frac{1}{\vartheta} \operatorname{grad} \vartheta \cdot \vec{q} \leq 0, \quad \text{in } \mathcal{S}. \quad (2.3.15)$$

Quest'ultima prende il nome di **disequazione di Clausius-Duhem per i corpi continui**.

## 2.4 Problema termomeccanico per un corpo continuo

Rimaniamo in ambito spaziale come nei due precedenti paragrafi e ricordiamo le equazioni indefinite di carattere generale, cioè valide per ogni corpo continuo, ottenute finora e che devono essere soddisfatte in  $\mathcal{S}$ .

- L'equazione di continuità della massa

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0;$$

- la I equazione indefinita della meccanica

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + \operatorname{div} \tilde{T};$$

- la conseguenza della II equazione indefinita della meccanica

$$\tilde{T} = \tilde{T}^t;$$

- l'equazione indefinita conseguenza del I assioma della termodinamica

$$\rho \dot{k} = \rho r - \operatorname{div} \vec{q} + \tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v}.$$

Le incognite scalari del problema termomeccanico sono:

$$v_i (i = 1, 2, 3), \rho, T_{ij} (i, j = 1, 2, 3), k, \vartheta, h, q_i (i = 1, 2, 3).$$

In totale abbiamo 19 incognite scalari, mentre le equazioni scritte sopra danno luogo a 8 equazioni scalari indipendenti. Dunque per poter impostare in maniera completa il problema termomeccanico dobbiamo aggiungere altre 11 equazioni scalari indipendenti. Queste devono caratterizzare il comportamento termomeccanico del corpo reale schematizzato tramite il modello del corpo continuo e quindi dipendono dalla struttura materiale del corpo. Tali equazioni ci sono fornite dall'esperienza e sono dette **equazioni costitutive o leggi di comportamento**. Tra le 11 equazioni costitutive scalari 6 sono le relazioni sforzo-deformazione di cui abbiamo già parlato, le altre 5 caratterizzano il comportamento termodinamico del corpo.

Nelle equazioni generali elencate sopra non abbiamo scritto la disuguaglianza indefinita conseguenza del II assioma della termodinamica, proprio perché non è un'equazione e quindi non contribuisce direttamente a risolvere il problema

termomeccanico.

Ricordiamo che tale disequazione si può scrivere come:

$$\rho \left( \vartheta \dot{h} - \dot{k} \right) + \tilde{T} \cdot \tilde{D} - \frac{1}{\vartheta} \text{grad} \vartheta \cdot \vec{q} \geq 0$$

o nella forma di disuguaglianza di Clausius-Duhem:

$$\rho \left( \dot{\psi} + h \dot{\vartheta} \right) - \tilde{T} \cdot \tilde{D} + \frac{1}{\vartheta} \text{grad} \vartheta \cdot \vec{q} \leq 0.$$

Poiché tale disequazione deve essere soddisfatta in  $\mathcal{S}$  qualunque sia il moto o più in generale l'evoluzione del corpo continuo, le equazioni costitutive devono essere tali da consentire ciò. Quindi il II assioma della termodinamica dei corpi continui svolge il ruolo di imporre delle restrizioni sulla forma delle equazioni costitutive affinché queste siano compatibili con tale assioma.

**Osservazione 3.3** Tra le incognite del problema termomeccanico possiamo far comparire in luogo dell'energia interna specifica  $k$  l'energia libera specifica  $\psi$  tenendo presente che  $\psi = k - \vartheta h$ . In tal caso ogni volta che compare  $k$  a questa dobbiamo ovviamente sostituire  $\psi + \vartheta h$  e la disequazione che traduce in forma locale il II assioma della termodinamica deve apparire nella forma di disuguaglianza di Clausius-Duhem.

Nelle equazioni costitutive distinguiamo tra

- grandezze *costitutive*, cioè grandezze espresse mediante altre grandezze;
- grandezze *fondamentali*, cioè grandezze mediante le quali vengono espresse quelle costitutive.

Si richiede che le equazioni soddisfino tre assiomi:

1) **Assioma dell'azione locale**

I valori che le grandezze costitutive assumono in ogni punto dello spazio geometrico dipendono dai valori che le grandezze fondamentali assumono nello stesso punto.

2) **Assioma di determinismo**

I valori che le grandezze costitutive assumono ad ogni istante dipendono dai valori che le grandezze fondamentali assumono nello stesso istante ed eventualmente anche in tutti gli istanti precedenti, cioè dipendono dalla storia delle grandezze fondamentali. I corpi per i quali i valori assunti dalle grandezze costitutive ad ogni istante dipendono non solo dai valori che quelle fondamentali assumono nello stesso istante, ma anche dalla loro storia sono detti **corpi con memoria**.

### 3) Assioma dell'obiettività o dell'indifferenza materiale

La forma delle equazioni costitutive è indipendente dall'osservatore, cioè le equazioni costitutive sono invarianti rispetto ai moti rigidi (poiché gli osservatori si muovono l'uno rispetto all'altro di moto rigido).

Se nelle equazioni generali, valide per tutti i corpi continui, eliminiamo le grandezze costitutive sostituendo ad esse le loro espressioni in funzione di quelle fondamentali, otteniamo un sistema di equazioni in cui i campi incogniti dipendono da  $P$  e da  $t$  e ai quali sono applicati operatori differenziali, eventualmente anche di ordine superiore al I, relativi sia a  $P$  sia a  $t$ .

Per poter affrontare il problema termomeccanico con metodi analitici è opportuno sostituire ai campi scalari, vettoriali e tensoriali che compaiono nel sistema le loro rappresentazioni analitiche nel riferimento associato all'osservatore. In tal modo otteniamo un sistema di equazioni (in genere) differenziali alle derivate parziali in cui le funzioni incognite dipendono dalle quattro variabili reali  $x_1, x_2, x_3, t$ . Le prime tre sono variabili spaziali, mentre l'ultima è la variabile temporale. Se il corpo di cui si studia l'evoluzione è dotato di memoria, il sistema di equazioni risulta di forma più complessa ed è precisamente un sistema integro-differenziale.

E' evidente che un sistema di equazioni differenziali (o integro-differenziali) ammette infinite soluzioni se non aggiungiamo delle ulteriori condizioni che devono essere soddisfatte dalla soluzione. Per avere l'unicità della soluzione, dobbiamo perciò associare al sistema delle opportune condizioni, dette **condizioni ai limiti**, e suggerite in genere dall'esperienza.

Le condizioni ai limiti sono di due tipi:

- **condizioni iniziali**: consistono nell'assegnare all'istante iniziale del moto ( $t_0$ ) i valori che assumono alcuni campi incogniti o alcune loro derivate;
- **condizioni al contorno**: consistono nell'assegnare istante per istante sul bordo della regione occupata dal corpo i valori che assumono alcuni campi incogniti od alcune loro derivate o alcune combinazioni di campi e derivate.

Ovviamente anche ai campi che compaiono nelle condizioni ai limiti si sostituiscono le rappresentazioni analitiche.

Tutto quanto abbiamo detto in ambito spaziale continua a sussistere anche in ambito materiale, come vedremo nella II parte del corso.

Osserviamo infine che le equazioni costitutive definiscono le varie classi di corpi continui, dette *classi costitutive*, che a loro volta corrispondono a classi di corpi reali.



# Capitolo 3

## Fluidi perfetti

### 3.1 Fluidi propriamente detti e fluidi perfetti

In questo capitolo studieremo una particolare classe costitutiva di corpi continui, quella dei fluidi perfetti che a sua volta è una sottoclasse di una classe più generale, quella dei fluidi propriamente detti.

Rileviamo che i fluidi sono corpi continui che schematizzano il comportamento dei liquidi e dei gas reali. In particolare i liquidi sono rappresentati mediante fluidi incomprimibili.

In genere i fluidi sono studiati dal punto di vista spaziale.

**Definizione 3.1.** *Un fluido propriamente detto è un corpo continuo che, in ambito spaziale, da un punto di vista strettamente meccanico, è caratterizzato dalla seguente relazione sforzo-deformazione:*

$$\tilde{T} = -p\tilde{a} + \tilde{\hat{T}},$$

dove

$\tilde{T} = \tilde{T}(P, t)$  è il tensore degli sforzi di Cauchy;

$p = p(P, t)$  è la pressione del fluido;

$\tilde{a}$  è il tensore fondamentale;

$\tilde{\hat{T}}$  è un'applicazione tensoriale del  $\mathcal{P}$  ordine, simmetrica ( $\tilde{\hat{T}} = \tilde{\hat{T}}^T$ ), tale che  $\tilde{\hat{T}} = \tilde{\hat{T}}(\tilde{D}, \vartheta)$ , con  $\tilde{D}$  tensore di velocità di deformazione e  $\vartheta$  temperatura assoluta, soddisfacente alla condizione  $\tilde{\hat{T}}(\tilde{0}, \vartheta) = \tilde{0}$ .

La funzione  $\tilde{\hat{T}}$ , detta *parte viscosa del tensore degli sforzi*, è fornita dall'esperienza.

Ricordiamo che il tensore di velocità di deformazione ha la seguente espressione:

$$\tilde{D} = \frac{1}{2}(\text{grad } \vec{v} + \text{grad}^t \vec{v}),$$

dove  $\vec{v}$  è il campo spaziale della velocità.

**Definizione 3.2.** *Un fluido per il quale la parte viscosa del tensore degli sforzi è identicamente nulla, qualunque sia il suo moto, si dice non viscoso.*

Si osservi che per un fluido propriamente detto che sia in quiete o si muova di moto rigido la parte viscosa del tensore degli sforzi di Cauchy è nulla poiché nelle condizioni dette sopra il campo tensoriale  $\tilde{D}$  è identicamente nullo.

**Definizione 3.3.** *Un fluido perfetto o fluido ideale è un fluido propriamente detto, caratterizzato, da un punto di vista puramente meccanico, dalla relazione sforzo-deformazione*

$$\tilde{T} = -p\tilde{a}.$$

Dunque un fluido perfetto è un fluido propriamente detto non viscoso. La relazione sforzo-deformazione mostra che in un fluido perfetto il tensore degli sforzi di Cauchy è isotropo; l'isotropia di  $\tilde{T}$  traduce in termini matematici l'osservazione sperimentale che i liquidi e i gas reali schematizzabili con il modello di fluido perfetto hanno proprietà meccaniche indipendenti dalla direzione.

Può essere interessante vedere che forma assume in un fluido perfetto lo sforzo specifico in un punto  $P$  all'istante  $t$  coordinato alla direzione orientata di versore arbitrario  $\vec{u}$ , cioè  $\vec{T}(P, t, \vec{u})$ .

Per il teorema di Cauchy sugli sforzi si ha:

$$\vec{T}(P, t, \vec{u}) = \tilde{T}(P, t) \cdot \vec{u} = -p(P, t)\tilde{a} \cdot \vec{u},$$

da cui discende:

$$T_i(P, t, \vec{u}) = T_{ij}(P, t) u_j = -p(P, t) a_{ij} u_j = -p(P, t) \delta_{ij} u_j = -p(P, t) u_i,$$

ossia

$$\vec{T}(P, t, \vec{u}) = -p(P, t) \vec{u}.$$

Allora deduciamo che in un fluido perfetto, tanto in condizioni di quiete quanto in condizioni di moto, lo sforzo specifico è normale poiché  $\vec{T}(\vec{u})$  è parallelo a  $\vec{u}$ .

**Osservazione 3.1.** La pressione in un fluido perfetto non dipende da  $\vec{u}$ . Questo fatto traduce in termini matematici il principio di Pascal che si osserva sperimentalmente: nei liquidi e nei gas reali schematizzati con il modello di fluido perfetto la pressione è uguale in tutte le direzioni.

I fluidi perfetti descrivono abbastanza bene il comportamento di alcuni liquidi reali, come ad esempio l'acqua, anche se in via approssimata, e di molti gas reali, come ad esempio l'aria.

Per il momento abbiamo dato solo la relazione sforzo-deformazione per un fluido perfetto. Vogliamo caratterizzare il comportamento di un fluido perfetto anche dal punto di vista termodinamico. A tal fine dobbiamo distinguere tra fluidi perfetti comprimibili e fluidi perfetti incomprimibili.

### 1) Fluido perfetto comprimibile

Le equazioni costitutive che caratterizzano la natura termodinamica di un fluido perfetto comprimibile sono le seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \widehat{\psi}(\vartheta, \mathcal{V}) \\ p &= \widehat{p}(\vartheta, \mathcal{V}) = -\frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial \mathcal{V}}(\vartheta, \mathcal{V}) \\ h &= \widehat{h}(\vartheta, \mathcal{V}) = -\frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial \vartheta}(\vartheta, \mathcal{V}) \end{aligned} \right\} \text{Equazioni di stato} \quad (3.1.1)$$

cui associamo la **legge di propagazione del calore**

$$\vec{q} = -\beta \text{grad} \vartheta. \quad (3.1.2)$$

Nelle (3.1.1) si ha:

$\psi$  = energia libera specifica,  $\mathcal{V} = 1/\rho$  = volume specifico,  $\vartheta$  = temperatura assoluta,  $h$  = entropia specifica.

Le funzioni  $\widehat{\psi}$ ,  $\widehat{p}$  e  $\widehat{h}$  sono funzioni note fornite dall'esperienza dette *funzioni risposta*.

Poiché l'esperienza mostra che nei gas, descritti dai fluidi perfetti comprimibili, la pressione è sempre maggiore di zero, la funzione risposta  $\widehat{p}$  per la pressione deve essere strettamente positiva.

Assumiamo poi  $\widehat{\psi}$ ,  $\widehat{p}$ ,  $\widehat{h}$  di classe  $\mathcal{C}^1$  da cui discende  $\widehat{\psi} \in \mathcal{C}^2$ .

Le cinque grandezze che intervengono nelle tre equazioni di stato prendono il nome di variabili di stato;  $\vartheta$  e  $\mathcal{V}$  sono variabili di stato fondamentali, mentre  $\psi$ ,  $p$  e  $h$  sono variabili di stato costitutive.

La funzione risposta  $\widehat{\psi}$  è detta *potenziale termodinamico*, perchè tramite le sue derivate siamo in grado di determinare le altre due funzioni risposta e la prima equazione di stato è chiamata *equazione di stato fondamentale*, perchè tramite questa si ricavano le altre due.

$p$ ,  $\mathcal{V}$  e  $h$ ,  $\theta$  costituiscono coppie di *variabili di stato coniugate*.

Per quanto riguarda la legge di propagazione del calore,  $\vec{q}$  è il vettore flusso di calore, mentre  $\beta = \beta(\vartheta, \text{grad} \vartheta, P)$  è detto *coefficiente di conducibilità termica* e la sua espressione si ottiene sperimentalmente. Da tale legge vediamo che in ogni punto e in ogni istante  $\vec{q}$  è parallelo a  $\text{grad} \vartheta$ ; quando si verifica tale condizione, si dice che la **propagazione del calore è isotropa**. L'isotropia

della propagazione del calore traduce in termini matematici l'osservazione sperimentale che nei corpi reali schematizzati con il modello considerato le proprietà termiche sono indipendenti dalla direzione.

Se il coefficiente di conducibilità termica  $\beta$  è costante, la legge di propagazione del calore (3.1.2) prende il nome di **legge di Fourier**.

**Osservazione 3.2.** E' immediato ottenere la funzione risposta dell'energia interna specifica  $k$  in termini di  $\vartheta$  e di  $\mathcal{V}$ , tenendo presente che:

$$k = \psi + \vartheta h.$$

Precisamente si ha:

$$\widehat{k}(\vartheta, \mathcal{V}) = \widehat{\psi}(\vartheta, \mathcal{V}) + \vartheta \widehat{h}(\vartheta, \mathcal{V}).$$

Mostriamo ora che nelle equazioni di stato si può assumere  $h$  come variabile di stato fondamentale in luogo di  $\vartheta$ .

Premettiamo una definizione:

**Definizione 3.4.** *Dato un fluido perfetto caratterizzato dalle equazioni di stato scritte sopra, definiamo calore specifico a volume costante relativo a  $\vartheta$  e  $\mathcal{V}$  la grandezza scalare data da:*

$$C_{\mathcal{V}}(\vartheta, \mathcal{V}) = \vartheta \frac{\partial \widehat{h}}{\partial \vartheta}(\vartheta, \mathcal{V}).$$

L'esperienza mostra che  $C_{\mathcal{V}}(\vartheta, \mathcal{V}) > 0$ , qualunque sia l'evoluzione del fluido. Dalla definizione 3.4, deduciamo:

$$\vartheta \frac{\partial \widehat{h}}{\partial \vartheta}(\vartheta, \mathcal{V}) > 0 \quad \forall(\vartheta, \mathcal{V}),$$

da cui, essendo  $\vartheta > 0$ , segue:

$$\frac{\partial \widehat{h}}{\partial \vartheta}(\vartheta, \mathcal{V}) > 0 \quad \forall(\vartheta, \mathcal{V}).$$

Allora, per il teorema delle funzioni implicite, dall'equazione:

$$h = \widehat{h}(\vartheta, \mathcal{V}),$$

per ogni  $\mathcal{V}$  fissato, si può ricavare, almeno localmente, la temperatura  $\vartheta$  in funzione di  $h$ :

$$\vartheta = \overline{\vartheta}(h, \mathcal{V}).$$

Possiamo così assumere come variabile di stato fondamentale  $h$  al posto di  $\vartheta$ , purché le equazioni di stato si scrivano nella forma seguente:

$$\left. \begin{aligned} k &= \bar{k}(h, \mathcal{V}) \\ p &= \bar{p}(h, \mathcal{V}) = -\frac{\partial \bar{k}}{\partial \mathcal{V}}(h, \mathcal{V}) \\ \vartheta &= \bar{\vartheta}(h, \mathcal{V}) = \frac{\partial \bar{k}}{\partial h}(h, \mathcal{V}), \end{aligned} \right\} \text{Nuove equazioni di stato} \quad (3.1.3)$$

dove

$$\bar{k}(h, \mathcal{V}) = \hat{\psi}(\bar{\vartheta}(h, \mathcal{V}), \mathcal{V}) + \bar{\vartheta}(h, \mathcal{V}) h, \quad \bar{p}(h, \mathcal{V}) = \hat{p}(\bar{\vartheta}(h, \mathcal{V}), \mathcal{V}).$$

Assumendo come variabili di stato fondamentali  $h$  e  $\mathcal{V}$ , si ha perciò che il potenziale termodinamico non è più la funzione risposta per l'energia libera specifica, ma quella per l'energia interna specifica.

Proviamo che:

$$\bar{p}(h, \mathcal{V}) = -\frac{\partial \bar{k}}{\partial \mathcal{V}}(h, \mathcal{V}).$$

Se deriviamo  $\bar{k}$  rispetto a  $\mathcal{V}$ , per il teorema di derivazione delle funzioni composte, otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{k}}{\partial \mathcal{V}}(h, \mathcal{V}) &= \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathcal{V}}(\bar{\vartheta}(h, \mathcal{V}), \mathcal{V}) + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \vartheta}(\bar{\vartheta}(h, \mathcal{V}), \mathcal{V}) \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \mathcal{V}}(h, \mathcal{V}) + \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \mathcal{V}}(h, \mathcal{V}) h = \\ &= -\hat{p}(\bar{\vartheta}(h, \mathcal{V}), \mathcal{V}) - \hat{h}(\bar{\vartheta}(h, \mathcal{V}), \mathcal{V}) \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \mathcal{V}}(h, \mathcal{V}) + \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \mathcal{V}}(h, \mathcal{V}) h = \\ &= -\hat{p}(\bar{\vartheta}(h, \mathcal{V}), \mathcal{V}) = -\bar{p}(h, \mathcal{V}). \end{aligned}$$

Analogamente si dimostra:

$$\bar{\vartheta}(h, \mathcal{V}) = \frac{\partial \bar{k}}{\partial h}(h, \mathcal{V}).$$

Si potrebbe anche provare che, tenendo  $\vartheta$  come variabile di stato fondamentale, è possibile sostituire a  $\mathcal{V}$  la pressione  $p$  come variabile di stato fondamentale. Infatti l'esperienza ci mostra che

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \mathcal{V}}(\vartheta, \mathcal{V}) < 0 \quad \forall(\vartheta, \mathcal{V})$$

e che quindi tale derivata non è mai nulla. Allora, per il teorema delle funzioni implicite, dall'equazione

$$p = \hat{p}(\vartheta, \mathcal{V}),$$

per ogni  $\vartheta$  fissato, si può ricavare, almeno localmente, il volume specifico  $\mathcal{V}$  in funzione di  $p$ :

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^*(\vartheta, p).$$

Possiamo così assumere come variabile di stato fondamentale  $p$  al posto di  $\mathcal{V}$ , purché nelle equazioni di stato compaia come nuovo potenziale termodinamico, la funzione risposta dell'entalpia libera specifica  $G$ , così definita:

$$G = k + p\mathcal{V} - \vartheta h = \psi + p\mathcal{V},$$

ma su ciò non insistiamo.

Introduciamo la seguente definizione:

**Definizione 3.5.** *Dato un fluido perfetto comprimibile, chiamiamo calore specifico a pressione costante relativo a  $\vartheta$  e  $p$  la grandezza scalare data da:*

$$C_p(\vartheta, p) = \vartheta \frac{\partial h^*}{\partial \vartheta}(\vartheta, p),$$

dove  $h^*(\vartheta, p)$  è la funzione risposta di  $h$  in termini di  $\vartheta$  e  $p$ .

Dall'esperienza si vede che:

$$C_p(\vartheta, p) > C_V(\vartheta, \mathcal{V}^*(\vartheta, p)) > 0 \quad \forall(\vartheta, p).$$

## 2) Fluido perfetto incomprimibile

Per un fluido perfetto incomprimibile, qualunque sia il suo moto, deve essere soddisfatta la condizione di incomprimibilità:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S},$$

da cui dunque l'equazione di continuità della massa assume la forma:

$$\dot{\rho} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S} \quad \implies \quad \dot{\mathcal{V}} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Di conseguenza  $\mathcal{V} = 1/\rho$  non è più variabile di stato, e quindi non è più variabile di stato nemmeno la sua coniugata  $p$ , che diventa così una grandezza puramente meccanica.

Le variabili di stato si riducono a 3:  $\psi$ ,  $\vartheta$  e  $h$  e le equazioni di stato assumono allora la forma:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \widehat{\psi}(\vartheta), \\ h &= \widehat{h}(\vartheta) = -\frac{d}{d\vartheta} \widehat{\psi}(\vartheta), \end{aligned} \right\} \quad \text{equazioni di stato}$$

cui associamo la legge di propagazione del calore ancora data da:

$$\vec{q} = -\beta \operatorname{grad} \vartheta \quad \text{con} \quad \beta = \beta(\vartheta, \operatorname{grad} \vartheta, P).$$

Lo stato termodinamico di un fluido perfetto incomprimibile è quindi individuato da tre variabili di stato:  $\psi$ ,  $\vartheta$ ,  $h$ ;  $\vartheta$  è variabile di stato fondamentale, mentre  $\psi$  e  $h$  sono variabili di stato costitutive. Il potenziale termodinamico è  $\widehat{\psi}$  e la sua derivata rispetto a  $\vartheta$ , cambiata di segno, è la funzione risposta per  $h$ .

Come per i fluidi perfetti comprimibili, possiamo sostituire  $h$  a  $\vartheta$  come variabile di stato fondamentale e le equazioni di stato sono allora:

$$\left. \begin{aligned} k &= \bar{k}(h), \\ \vartheta &= \bar{\vartheta}(h) = \frac{d}{dh} \bar{k}(h) \end{aligned} \right\} \quad \text{nuove equazioni di stato}$$

**Osservazione 3.3.** Si vede immediatamente che le equazioni costitutive di un fluido perfetto comprimibile o incomprimibile soddisfano gli assiomi dell'azione locale e di determinismo poiché i valori assunti dalle grandezze costitutive in ogni punto ed in ogni istante dipendono solo dai valori che le grandezze fondamentali assumono nello stesso punto e nello stesso istante. I fluidi perfetti non sono corpi continui con memoria.

Si potrebbe dimostrare che è anche soddisfatto l'assioma dell'obiettività.

## 3.2 Problema del moto per un fluido perfetto

In primo luogo vediamo quale forma assume per un fluido perfetto la I equazione indefinita della meccanica sfruttando la relazione sforzo-deformazione

$$\tilde{T} = -p \tilde{a}$$

che scritta in componenti fornisce:

$$T_{ij} = -p a_{ij} = -p \delta_{ij}.$$

Osserviamo che per le ipotesi di regolarità imposte a  $\tilde{T}$  si ha

$$p \in \mathcal{C}^{1,0}(\mathcal{S}).$$

Ricordiamo la I equazione indefinita nella sua forma generale:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + \operatorname{div} \tilde{T}.$$

La  $i$ -esima componente della divergenza di  $\tilde{T}$  è:

$$(\operatorname{div} \tilde{T})_i = T_{ij,j} = (-p \delta_{ij})_{,j} = -p_{,j} \delta_{ij} = -p_{,i} = -(\operatorname{grad} p)_i,$$

per cui in forma vettoriale si ha:

$$\operatorname{div} \tilde{T} = -\operatorname{grad} p.$$

Sostituendo nella I equazione indefinita otteniamo:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p. \quad (3.2.1)$$

La (3.2.1) è detta **equazione fondamentale della meccanica dei fluidi perfetti o equazione di Eulero**.

Se nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  il fluido è in quiete, si ha:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \vec{v} = \vec{0} \implies \dot{\vec{v}} = \vec{0},$$

per cui l'equazione (3.2.1) si riduce a:

$$\vec{0} = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p, \quad (3.2.2)$$

detta **equazione fondamentale della statica dei fluidi perfetti**.

**Osservazione 3.4.** La (3.2.2) governa non solo la statica dei fluidi perfetti, ma anche la statica di qualsiasi fluido propriamente detto, poiché, quando il fluido è in quiete, la parte viscosa del tensore degli sforzi di Cauchy è nulla.

Ci proponiamo di mostrare ora come si imposta il problema del moto per un fluido perfetto. Proviamo dapprima la seguente:

**Proposizione 3.1.** *Per un fluido perfetto incomprimibile il problema del moto si imposta in maniera completa in ambito puramente meccanico.*

#### Dimostrazione

Vediamo quali sono le equazioni che abbiamo a disposizione in ambito puramente meccanico per un fluido perfetto incomprimibile:

- condizione di incomprimibilità

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0;$$

- equazione di continuità associata alla condizione di incomprimibilità

$$\dot{\rho} = 0;$$

- equazione fondamentale della meccanica dei fluidi perfetti

$$\rho \vec{v} = \rho \vec{F} - \text{grad } p.$$

Teniamo poi presente che la pressione  $p$  in un fluido perfetto incomprimibile è una grandezza puramente meccanica, ossia non è una variabile di stato.

Allora le incognite scalari del problema sono cinque:  $v_i (i = 1, 2, 3)$ ,  $\rho$ ,  $p$ , ma anche le equazioni scalari sono cinque. Perciò il numero delle incognite è pari al numero delle equazioni e il problema del moto è impostato in maniera completa, per quanto riguarda il bilancio tra incognite ed equazioni.

Per determinare effettivamente il moto del fluido alle equazioni scritte sopra dobbiamo associare le condizioni ai limiti che distinguiamo in condizioni iniziali e condizioni al contorno.

Se assumiamo  $t_0 = 0$ , le condizioni iniziali sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \rho(P, 0) &= \rho_0(P) & \forall P \in S(0), \\ \vec{v}(P, 0) &= \vec{v}_0(P) & \forall P \in S(0), \end{aligned}$$

dove  $\rho_0 = \rho_0(P)$  e  $\vec{v}_0 = \vec{v}_0(P)$  sono campi assegnati.

Per quanto riguarda le condizioni al contorno, supponiamo che  $\partial S(t)$  sia costituita da pareti materiali rigide di cui è noto l'atto di moto:

$$\vec{V} = \vec{V}(P, t) \quad \forall P \in \partial S(t), \quad \forall t \in [0, t_1].$$

L'esperienza mostra che le particelle di fluido a contatto con le pareti non le possono attraversare: quindi la condizione al contorno suggerita dall'esperienza è la seguente:

$$\forall t \in [0, t_1] \quad \vec{v} \cdot \vec{n} \Big|_{\partial S(t)} = \vec{V} \cdot \vec{n}. \quad (3.2.3)$$

La (3.2.3), nella quale  $\vec{n}$  è il versore della normale esterna a  $\partial S(t)$ , è detta **condizione di impenetrabilità**.

In particolare se le pareti rigide sono fisse:

$$\forall t \in [0, t_1] \quad \vec{v} \cdot \vec{n} \Big|_{\partial S(t)} = 0.$$

Si potrebbero utilizzare anche altri tipi di condizioni al contorno suggerite dall'esperienza, a seconda delle caratteristiche fisiche del particolare moto che si studia, ma su ciò non insistiamo.

Dunque abbiamo impostato in maniera completa il problema del moto per un fluido perfetto incomprimibile.

Facciamo ora un'ulteriore ipotesi sul fluido: supponiamo che, oltre ad essere incomprimibile, sia anche omogeneo, cioè che la densità di massa  $\rho$  non dipenda

da  $P$  per cui  $\text{grad } \rho = \vec{0}$  in  $\mathcal{S}$ . Allora per definizione di derivata materiale rispetto al tempo, abbiamo:

$$\dot{\rho} = \rho' + \text{grad } \rho \cdot \vec{v} = \rho'.$$

Ma, essendo il fluido incomprimibile,

$$\dot{\rho} = \rho' = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

D'altra parte, poiché  $\rho$  non dipende da  $P$ , possiamo scrivere:

$$\rho'(t) = \frac{d\rho}{dt}(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Dunque  $\rho$  non dipende neppure da  $t$  e quindi è una costante nota.

Il moto per un fluido perfetto incomprimibile ed omogeneo si imposta perciò mediante il seguente sistema, equivalente a quattro equazioni scalari

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{v} &= 0, \\ \rho \dot{\vec{v}} &= \rho \vec{F} - \text{grad } p \end{aligned}$$

con  $\rho$  costante positiva nota.

E' evidente che in tal caso al sistema scritto sopra si associa una sola condizione iniziale, cioè quella relativa alla velocità. Se poi  $\partial S(t)$  è costituita da pareti materiali rigide come condizione al contorno assumiamo quella di impenetrabilità.

Si noti che  $p$  è comunque determinata a meno di una funzione arbitraria del tempo.

Infatti se la coppia  $(\vec{v}, p)$  è soluzione dell'equazione fondamentale della meccanica dei fluidi perfetti scritta sopra, è soluzione della stessa equazione anche la coppia  $(\vec{v}, p^*)$  dove  $p^* = p + \alpha$  con  $\alpha = \alpha(t)$  funzione arbitraria del tempo, poiché  $\text{grad } p^* = \text{grad } p$ .

Ciò che abbiamo detto per la pressione vale per un qualsiasi fluido perfetto incomprimibile, tenendo presente che  $p$  per un tale fluido non è data mediante un'equazione di stato, ma è un'incognita puramente meccanica.

Occupiamoci ora dell'impostazione del problema del moto per un fluido perfetto comprimibile. Se restiamo in ambito puramente meccanico, abbiamo a disposizione le equazioni

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + \rho \text{div } \vec{v} &= 0, \\ \rho \dot{\vec{v}} &= \rho \vec{F} - \text{grad } p, \end{aligned}$$

che sono chiaramente insufficienti ad impostare il problema del moto poiché equivalgono a 4 equazioni scalari, mentre le incognite scalari sono 5:  $v_i$  ( $i =$

1, 2, 3),  $\rho$ ,  $p$ . Occorre perciò impostare il problema termomeccanico. Alle due equazioni precedenti dovremo aggiungere l'equazione indefinita che è conseguenza del I assioma della termodinamica:

$$\rho \dot{k} = \rho r - \operatorname{div} \vec{q} + \tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v}.$$

Vediamo quale forma particolare assume tale equazione per un fluido perfetto se si sfrutta la relazione sforzo-deformazione. In particolare si ha:

$$\tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} = T_{ij} v_{i,j} = -p \delta_{ij} v_{i,j} = -p v_{i,i} = -p \operatorname{div} \vec{v}.$$

D'altra parte, dall'equazione di continuità (essendo  $\rho > 0$ ), si deduce:

$$\operatorname{div} \vec{v} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho}$$

e dunque:

$$\tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} = p \frac{\dot{\rho}}{\rho}.$$

Sostituendo tale risultato nell'equazione conseguenza del I assioma della termodinamica, otteniamo:

$$\rho \dot{k} = \rho r - \operatorname{div} \vec{q} + p \frac{\dot{\rho}}{\rho}. \quad (3.2.4)$$

La (3.2.4) è nota come **equazione dell'energia per un fluido perfetto comprimibile**.

**Osservazione 3.5.** Per un fluido perfetto incomprimibile, grazie alla condizione di incomprimibilità, risulta:

$$\tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} = -p \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

per cui l'equazione dell'energia per un fluido perfetto incomprimibile si riduce a:

$$\rho \dot{k} = \rho r - \operatorname{div} \vec{q}.$$

Per impostare il problema termomeccanico per un fluido perfetto comprimibile scriviamo le seguenti equazioni, che devono tutte essere verificate in  $\mathcal{S}$ :

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \\ \rho \dot{\vec{v}} &= \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p, \\ \rho \dot{k} &= \rho r - \operatorname{div} \vec{q} + p \frac{\dot{\rho}}{\rho}, \end{aligned}$$

cui associamo le tre equazioni di stato e la legge di propagazione del calore:

$$\vec{q} = -\beta \operatorname{grad} \vartheta.$$

In tutto abbiamo 11 equazioni scalari ed anche le incognite scalari sono 11:  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $\rho$ ,  $p$ ,  $k$  (o  $\psi$  o  $G$ ),  $h$ ,  $\vartheta$ ,  $q_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Il problema termomeccanico è perciò impostato in maniera completa per quanto riguarda numero di incognite e numero di equazioni.

Se vogliamo effettivamente determinare l'evoluzione del fluido, dobbiamo aggiungere le condizioni ai limiti (iniziali e al contorno), ma su ciò non insistiamo. Ci limitiamo ad osservare che se  $\partial S(t)$  è formato da pareti materiali rigide, per il campo della velocità si ha la condizione di impenetrabilità:

$$\forall t \in [0, t_1] \quad \vec{v} \cdot \vec{n} \Big|_{\partial S(t)} = \vec{V} \cdot \vec{n},$$

dove  $\vec{V}$  è l'atto di moto delle pareti, che viene riguardato come noto.

L'influenza del II assioma della termodinamica sulle equazioni costitutive dei fluidi perfetti è espressa mediante il seguente teorema di cui non forniamo la dimostrazione.

**Teorema 3.1.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché le equazioni costitutive per un fluido perfetto siano compatibili con il secondo assioma della termodinamica è che  $\beta \geq 0$ .*

### 3.3 Fluidi perfetti barotropici e gas perfetti

**Definizione 3.6.** *Un fluido perfetto barotropico è un fluido perfetto comprimibile tale che la pressione è funzione solo della densità di massa e precisamente:*

$$p = g(\rho)$$

dove  $g$  è una funzione definita in  $(0, +\infty)$ , positiva, di classe  $C^1$  con  $\frac{dg}{d\rho} > 0$ .

Si osservi che  $g$ , essendo strettamente crescente, è invertibile per cui:

$$\rho = g^{-1}(p).$$

**Proposizione 3.2.** *Per un fluido perfetto barotropico il problema del moto si imposta in ambito puramente meccanico.*

Dimostrazione

In ambito meccanico le equazioni che abbiamo a disposizione sono:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \\ \rho \dot{\vec{v}} &= \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p, \\ p &= g(\rho).\end{aligned}$$

Le equazioni scalari sono 5, esattamente come le incognite scalari e dunque il problema del moto è impostato in maniera completa per quanto riguarda il bilancio tra numero di equazioni e numero di incognite.

Mostriamo ora che in particolari condizioni un generico fluido perfetto comprimibile si comporta come un fluido barotropico.

Premettiamo una definizione.

**Definizione 3.7.** *Diciamo che un corpo continuo, studiato dal punto di vista spaziale, evolve isotermicamente o in condizioni isoterme se*

$$\vartheta(P, t) = \vartheta_0 = \text{costante} > 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Dimostriamo la seguente

**Proposizione 3.3.** *Se un fluido perfetto comprimibile evolve isotermicamente, si comporta come un fluido perfetto barotropico.*

Dimostrazione

Per ipotesi

$$\vartheta(P, t) = \vartheta_0 = \text{costante} > 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Nelle equazioni di stato del fluido assumiamo come variabili di stato fondamentali  $\vartheta$  e  $\mathcal{V}$ , per cui:

$$p = \widehat{p}(\vartheta_0, \mathcal{V}).$$

Poniamo:

$$g(\rho) = \widehat{p}\left(\vartheta_0, \frac{1}{\rho}\right).$$

E' evidente che  $g > 0$ ,  $g \in \mathcal{C}^1$ , poiché  $\widehat{p} > 0$ ,  $\widehat{p} \in \mathcal{C}^1$  e  $\rho \neq 0$ .

Inoltre

$$\frac{dg}{d\rho}(\rho) = -\frac{\partial \widehat{p}}{\partial \mathcal{V}}(\vartheta_0, \frac{1}{\rho}) \frac{1}{\rho^2} > 0,$$

perchè, come abbiamo osservato, l'esperienza mostra che  $\frac{\partial \widehat{p}}{\partial \mathcal{V}} < 0$ .

Il fluido in condizioni isoterme si comporta dunque come un fluido barotropico, c.v.d.

**Definizione 3.8.** *Un gas perfetto è un fluido perfetto comprimibile per il quale vale la seguente equazione di stato:*

$$p = R \frac{\vartheta}{\mathcal{V}}, \quad R = \text{costante} > 0. \quad (3.3.1)$$

Molti gas reali, come ad esempio l'aria, possono essere schematizzati mediante questo modello di fluido.

I gas perfetti godono di interessanti proprietà.

- Per un gas perfetto la funzione risposta  $\widehat{k}$  dell'energia interna specifica in termini di  $\vartheta$  e  $\mathcal{V}$  dipende solo da  $\vartheta$ , cioè

$$k = \widehat{k}(\vartheta).$$

- Il calore specifico a volume costante  $C_{\mathcal{V}}$ , che per un generico fluido perfetto comprimibile dipende da  $\vartheta$  e  $\mathcal{V}$ , per un gas perfetto dipende solo da  $\vartheta$ .
- Per un gas perfetto  $C_p - C_{\mathcal{V}} = R$ , da cui segue che per un gas perfetto, se uno dei due calori specifici è costante, lo è anche l'altro.
- Per un gas perfetto in condizioni isoterme sussiste la legge di Boyle-Mariotte, tradotta dalla seguente equazione:

$$p = C_0 \rho, \quad C_0 = \text{costante} > 0. \quad (3.3.2)$$

Proviamo solo l'ultima proprietà relativa alla legge di Boyle-Mariotte. Questa si deduce immediatamente dall'equazione di stato dei gas perfetti. Infatti se il gas evolve isotermicamente,  $\vartheta = \vartheta_0 = \text{costante}$  e dunque dalla (3.3.1) segue:

$$p = R \frac{\vartheta_0}{\mathcal{V}} = R \vartheta_0 \rho.$$

Posto  $C_0 = R \vartheta_0$ , otteniamo la relazione espressa dalla legge di Boyle-Mariotte. Si noti che in condizioni isoterme un gas perfetto si comporta come un fluido perfetto barotropico con  $g(\rho) = C_0 \rho$ .

**Definizione 3.9.** *Dato un corpo continuo studiato dal punto di vista spaziale, diciamo che evolve isentropicamente o in condizioni isentropiche se*

$$h(P, t) = h_0 = \text{costante} \quad \forall (P, t) \in \mathcal{S}.$$

Si potrebbe dimostrare la seguente

**Proposizione 3.4.** *Se un gas perfetto ha costante uno dei due calori specifici ed evolve in condizioni isentropiche, si comporta come un fluido perfetto barotropico con  $g(\rho) = C \rho^\gamma$  dove  $C$  è una costante positiva e  $\gamma = \frac{C_p}{C_{\mathcal{V}}}$ .*

### 3.4 Alcune proprietà dei fluidi perfetti in quiete.

Supponiamo di avere un fluido perfetto in quiete nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ . Allora l'equazione fondamentale dei fluidi perfetti, come abbiamo visto, si riduce a

$$\vec{0} = \rho \vec{F} - \text{grad} p, \quad (3.4.1)$$

dove possiamo riguardare  $\rho$ ,  $\vec{F}$ ,  $p$  indipendenti dal tempo ossia  $\rho = \rho(P)$ ,  $\vec{F} = \vec{F}(P)$ ,  $p = p(P)$ .

Supponiamo  $\vec{F} \in \mathcal{C}(S)$ ,  $p \in \mathcal{C}^1(S)$ , dove  $S$  è la regione occupata dal fluido.

Dalla (3.4.1) discende immediatamente il seguente

**Teorema 3.2.** *Condizione necessaria affinché un fluido perfetto sia in quiete è che  $\rho \vec{F}$  provenga da un potenziale scalare, ossia che esista un campo scalare  $U \in \mathcal{C}^1(S)$  tale che in  $S$*

$$\rho \vec{F} = \text{grad} U.$$

Dunque l'equazione fondamentale della statica si riduce a :

$$\text{grad}(U - p) = \vec{0} \quad \text{in } S,$$

da cui deduciamo che la pressione e il potenziale da cui proviene  $\rho \vec{F}$  differiscono per una costante ossia

$$p = U + c \quad \text{in } S \quad \text{con } c = \text{costante}. \quad (3.4.2)$$

Abbiamo perciò ottenuto la seguente

**Proposizione 3.5.** *Per un fluido perfetto in quiete gli insiemi di livello della pressione, detti superfici isobariche, coincidono con gli insiemi di livello del potenziale da cui proviene il campo vettoriale  $\rho \vec{F}$  con  $\vec{F}$  densità delle forze esterne di massa ossia le superfici isobariche coincidono con le superfici equipotenziali.*

Consideriamo un fluido perfetto incomprimibile che schematizzi un liquido reale (ad esempio acqua) contenuto in un recipiente rigido aperto. Indicata con  $S$  la regione occupata dal fluido, avremo:

$$\partial S = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$

con  $\Sigma_1$  costituita dalle pareti materiali rigide del recipiente e  $\Sigma_2$  superficie di separazione tra il fluido e l'aria, detta *superficie libera*. E' evidente che  $\Sigma_2$  è una superficie isobarica poiché i suoi punti sono soggetti alla pressione atmosferica

che si può riguardare costante in regioni limitate dello spazio.

Potremmo anche assumere che il recipiente sia immerso nel vuoto oppure che il recipiente sia chiuso e che il liquido in esso contenuto non ne raggiunga il coperchio e sia sotto vuoto. In tal caso la superficie libera  $\Sigma_2$  è ancora una superficie isobarica poiché tutti i suoi punti sono soggetti a pressione nulla.

Supponiamo inoltre che il fluido perfetto incomprimibile sia omogeneo, pesante e in quiete rispetto ad un osservatore terrestre.

Ci proponiamo di determinarne la superficie libera e di stabilire la cosiddetta **Legge di Stevino per la pressione**.

Osserviamo in primo luogo che se il fluido incomprimibile è omogeneo, la sua densità di massa è costante tanto in condizioni di quiete che di moto. Determiniamo dapprima la superficie libera del fluido considerato, avendo introdotto il riferimento cartesiano ortonormale  $Ox_1x_2x_3$ , fisso rispetto ad un osservatore terrestre, con l'asse  $Ox_3$  verticale ascendente.

Poiché le uniche forze esterne di massa agenti sono le forze peso, abbiamo:

$$\rho \vec{F} = -\rho g \vec{e}_3,$$

dove con  $g$  denotiamo l'accelerazione di gravità.

Essendo la densità di massa costante, si ha che  $\rho \vec{F}$  proviene da un potenziale dato da

$$U = -\rho g x_3$$

a meno di una costante additiva arbitraria che possiamo prendere uguale a zero.

D'altra parte, le superfici isobariche sono anche superfici equipotenziali, ossia insiemi di livello per il potenziale, e dunque sono porzioni di piani orizzontali di equazione  $x_3 = \text{costante}$ . In particolare, anche  $\Sigma_2$ , essendo una superficie isobarica, è una porzione di piano orizzontale.

Vediamo ora di stabilire la Legge di Stevino sempre per lo stesso fluido.

Dalla (3.4.2) deduciamo:

$$p = -\rho g x_3 + c \quad \text{con } c = \text{costante} . \quad (3.4.3)$$

Per determinare il valore della costante  $c$ , prendiamo l'origine  $O$  dell'asse  $Ox_3$  sulla base del recipiente nel quale il liquido è contenuto. I punti di  $\Sigma_2$  abbiano quota  $h$  e indichiamo con  $p_a$  la pressione atmosferica, ossia la pressione su  $\Sigma_2$ . Nei punti di  $\Sigma_2$  abbiamo quindi:

$$p_a = -\rho g h + c$$

da cui

$$c = p_a + \rho g h.$$

Sostituendo nella (3.4.3), deduciamo:

$$p = \rho g(h - x_3) + p_a.$$

Tale relazione è detta **Legge di Stevino** e stabilisce come varia la pressione al variare della quota in un fluido perfetto incomprimibile, omogeneo, pesante, contenuto in un recipiente aperto, in quiete rispetto ad un osservatore terrestre. Ovviamente se la superficie libera del fluido è a contatto col vuoto  $p_a = 0$ .

Vediamo ora di determinare la superficie libera per un fluido perfetto incomprimibile, omogeneo, pesante, contenuto in un recipiente aperto, che sia in quiete rispetto ad un osservatore solidale con il recipiente stesso nell'ipotesi che quest'ultimo sia in moto rispetto ad un osservatore terrestre.

Limitiamoci a considerare due casi.

### Caso 1

Il recipiente si muove rispetto all'osservatore terrestre di moto traslatorio rettilineo con accelerazione costante orizzontale  $\vec{a}_0$ .

Fissiamo come riferimento cartesiano ortonormale associato all'osservatore terrestre il riferimento con l'asse  $Ox_3$  diretto come la verticale ascendente e l'asse  $Ox_2$  parallelo e concorde con  $\vec{a}_0$ . Poiché il moto del recipiente rispetto all'osservatore terrestre (riguardato come un osservatore inerziale) non è traslatorio rettilineo uniforme, l'osservatore solidale con il recipiente, rispetto al quale il fluido è in quiete, non è inerziale e perciò nell'esaminare le forze esterne di massa agenti sul fluido, dobbiamo tener conto, oltre che delle forze peso, anche delle forze apparenti. Tuttavia queste si riducono alle sole forze di trascinamento perché le forze di Coriolis sono nulle, essendo il fluido in quiete rispetto all'osservatore non inerziale. Essendo poi il moto di questo osservatore traslatorio rispetto a quello terrestre, l'accelerazione di trascinamento delle particelle del fluido è coincidente con  $\vec{a}_0$ . Dunque

$$\rho \vec{F} = -\rho g \vec{e}_3 - \rho a_0 \vec{e}_2.$$

Poiché  $\rho = \text{costante}$ , deduciamo che  $\rho \vec{F}$  proviene dal potenziale  $U$  dato da

$$U = -\rho g x_3 - \rho a_0 x_2, \quad (3.4.4)$$

a meno di una costante additiva arbitraria che possiamo prendere uguale a zero. Allora per determinare la forma della superficie libera  $\Sigma_2$ , che, essendo una superficie isobarica, è anche una superficie equipotenziale, è sufficiente determinare le superfici di livello del potenziale  $U$ . Dalla (3.4.4) vediamo che tali superfici sono il luogo dei punti  $P(x_1, x_2, x_3) \in S$  tali che

$$\rho g x_3 + \rho a_0 x_2 = c,$$

con  $c$  costante, ossia tali che

$$gx_3 + a_0x_2 = c,$$

dove abbiamo indicato ancora con  $c$  la costante  $\frac{c}{\rho}$ .

Le superfici equipotenziali sono perciò il luogo dei punti  $P(x_1, x_2, x_3) \in S$  tali che

$$x_3 = -\frac{a_0}{g}x_2 + c^* \quad \left( c^* = \frac{c}{\rho} \right),$$

cioè porzioni di piani paralleli all'asse  $Ox_1$ .

Se consideriamo l'intersezione di uno di tali piani con il piano  $Ox_2x_3$ , di equazione  $x_1 = 0$ , questa risulta la retta giacente nel piano  $Ox_2x_3$  di equazione

$$x_3 = -\frac{a_0}{g}x_2 + c^*,$$

avente pendenza  $m = -\frac{a_0}{g}$ .

Allora le superfici isobariche, e quindi anche la superficie libera, sono porzioni di piani inclinati sull'orizzontale.

## Caso 2

Il recipiente si muove di moto rotatorio uniforme con velocità angolare  $\vec{\omega}$  attorno ad un asse verticale fisso rispetto ad un osservatore terrestre.

Scegliamo il riferimento cartesiano ortonormale associato all'osservatore terrestre in modo che l'asse  $Ox_3$  coincida con l'asse di rotazione e sia orientato come la verticale ascendente. Il fluido è in quiete rispetto all'osservatore solidale con il recipiente, osservatore che non è inerziale poichè si muove di moto rotatorio uniforme rispetto a quello terrestre. Dovremo dunque tener conto delle forze apparenti che si riducono alle sole forze centrifughe dal momento che le forze di Coriolis non danno alcun contributo nel caso di quiete.

Si ha perciò:

$$\rho \vec{F}(P) = -\rho g \vec{e}_3 + \rho \omega^2 (P - P^*)$$

dove  $P^*$  è la proiezione ortogonale di  $P$  sull'asse di rotazione, cioè sull'asse  $Ox_3$ . Tenendo presente che  $\rho$  è costante, deduciamo allora che il potenziale ha la seguente forma:

$$\begin{aligned} U &= -\rho g x_3 + \rho \omega^2 \frac{|P - P^*|^2}{2} \\ &= -\rho g x_3 + \rho \omega^2 \frac{(x_1^2 + x_2^2)}{2} \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

a meno di una costante additiva arbitraria.

Poiché  $\Sigma_2$  è una superficie isobarica, è anche una superficie equipotenziale e per la (3.4.5) risulta il luogo dei punti  $P(x_1, x_2, x_3) \in S$  tali che

$$\rho g x_3 = \rho \omega^2 \frac{(x_1^2 + x_2^2)}{2} + c,$$

ossia tali che

$$x_3 = \frac{\omega^2}{2g} (x_1^2 + x_2^2) + c,$$

dove abbiamo indicato ancora con  $c$  la costante  $\frac{c}{\rho g}$ .

La superficie libera in questo secondo caso è dunque una porzione di paraboloide di rotazione attorno all'asse  $Ox_3$ .

Consideriamo ora un fluido perfetto barotropico ed introduciamo una nuova definizione.

**Definizione 3.10.** *Dato un fluido perfetto barotropico, è chiamata entalpia la seguente funzione della pressione, definita a meno di una costante additiva arbitraria:*

$$\mathcal{P}(p) = \int \frac{dp}{g^{-1}(p)}.$$

In condizioni di quiete la pressione dipende solo da  $P$  e quindi anche l'entalpia viene a dipendere solo da  $P$  tramite la pressione. Otteniamo perciò

$$\text{grad}\mathcal{P} = \frac{d\mathcal{P}}{dp} \text{grad}p = \frac{1}{g^{-1}(p)} \text{grad}p = \frac{\text{grad}p}{\rho}.$$

D'altra parte l'equazione fondamentale della statica dei fluidi perfetti fornisce:

$$\vec{F} = \frac{\text{grad}p}{\rho},$$

da cui, per il precedente risultato, discende:

$$\vec{F} = \text{grad}\mathcal{P}. \quad (3.4.6)$$

Come conseguenza della (3.4.6), si ha il seguente

**Teorema 3.3.** *Dato un fluido perfetto barotropico, condizione necessaria affinché sia in quiete è che la densità delle forze esterne di massa  $\vec{F}$  provenga da un potenziale, cioè che esista un campo scalare  $U_1 \in \mathcal{C}^1(S)$  tale che in  $S$*

$$\vec{F} = \text{grad}U_1.$$

**Osservazione 3.6.** Se in luogo di un fluido perfetto barotropico abbiamo un fluido perfetto incomprimibile ed omogeneo, sussiste lo stesso teorema perché, essendo  $\rho$  costante, l'equazione fondamentale della statica dei fluidi perfetti si può scrivere come:

$$\vec{F} = \text{grad} \frac{p}{\rho}.$$

Grazie alla (3.4.6) ed al teorema 3.3, deduciamo:

$$\text{grad}(U_1 - \mathcal{P}) = \vec{0} \quad \text{in } S,$$

da cui

$$\mathcal{P} = U_1 + c_1 \quad \text{in } S \quad (3.4.7)$$

con  $c_1 = \text{costante}$ .

Poiché le superfici isobariche sono anche insiemi di livello per l'entalpia, otteniamo la seguente

**Proposizione 3.6.** *Per un fluido perfetto barotropico in quiete le superfici isobariche coincidono con gli insiemi di livello del potenziale da cui proviene la densità delle forze esterne di massa e sono quindi anche superfici equipotenziali.*

D'altra parte, per la relazione tra pressione e densità, le superfici nei punti delle quali è costante la densità, dette *superfici isopicnotiche*, sono anche superfici isobariche e perciò sono anch'esse superfici equipotenziali.

### ESEMPI

Determiniamo l'entalpia ed alcuni interessanti risultati relativi alla quiete rispetto ad un osservatore terrestre per due classi di fluidi perfetti barotropici.

#### Esempio 3.1.

Come abbiamo visto, un gas perfetto in condizioni isoterme si comporta come un fluido barotropico e si ha:

$$p = C_0 \rho,$$

dove si è posto  $C_0 = R\vartheta_0$  (costante positiva).

Procuriamoci l'entalpia, tenendo presente che nel nostro caso  $g^{-1}(p) = \frac{p}{C_0}$ :

$$\mathcal{P}(p) = C_0 \int \frac{dp}{p} = C_0 \ln p + \text{costante}.$$

Supponiamo allora di avere un gas perfetto in condizioni isoterme, soggetto solo alle forze peso, in quiete rispetto ad un osservatore terrestre. Fissiamo come

riferimento associato all'osservatore un riferimento cartesiano ortonormale avente l'origine  $O$  appartenente alla regione occupata dal gas e con l'asse  $Ox_3$  verticale ascendente. Ci proponiamo di studiare come varia la pressione in tale gas al variare della quota.

Per quanto abbiamo visto relativamente alla quiete di un fluido barotropico, sappiamo che le superfici isobariche sono porzioni di piani orizzontali poiché  $U_1 = -gx_3 + \text{costante}$ . Se teniamo presente la (3.4.7) e l'espressione dedotta prima per l'entalpia, otteniamo:

$$C_0 \ln p = -gx_3 + c_1, \quad (3.4.8)$$

dove in  $c_1$  abbiamo conglobato la costante inessenziale che compare nell'espressione di  $\mathcal{P}$ . Vediamo di determinare la costante  $c_1$ .

A tal fine indichiamo con  $p_0$  il valore che la pressione assume nei punti del gas che sono a quota  $x_3 = 0$ . Ponendo in (3.4.8)  $x_3 = 0$ , deduciamo:

$$c_1 = C_0 \ln p_0.$$

Sostituendo nella (3.4.8), abbiamo

$$C_0 (\ln p - \ln p_0) = -gx_3$$

da cui

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{g}{C_0} x_3. \quad (3.4.9)$$

D'altra parte per  $x_3 = 0$  anche la densità di massa assume un valore costante  $\rho_0$  e dunque per  $x_3 = 0$  si ha

$$p_0 = C_0 \rho_0 \quad \implies \quad C_0 = \frac{p_0}{\rho_0}.$$

Inserendo nella (3.4.9) l'espressione ottenuta per  $c$ , otteniamo

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0} g x_3,$$

da cui deduciamo

$$p = p_0 \exp \left\{ -\frac{\rho_0}{p_0} g x_3 \right\}, \quad (3.4.10)$$

nota come **legge barometrica**.

Tale legge stabilisce come varia la pressione al variare della quota in un gas perfetto in condizioni isoterme, pesante, in quiete rispetto ad un osservatore terrestre.

In particolare la legge barometrica si applica alla pressione atmosferica quando

siamo in condizioni isoterme.

### Esempio 3.2.

Consideriamo ora un gas perfetto in condizioni isentropiche per il quale uno dei due calori specifici sia costante. In tali ipotesi la pressione ha la seguente forma:

$$p = C \rho^\gamma \quad (3.4.11)$$

con  $C =$  costante positiva,  $\gamma = \frac{C_p}{C_v} =$  costante  $> 1$ ,  $C_p$  e  $C_v$  calore specifico a pressione costante e calore specifico a volume costante rispettivamente.

Dunque il gas perfetto in condizioni isentropiche si comporta come un fluido perfetto barotropico con  $g(\rho) = C \rho^\gamma$ .

Grazie alla (3.4.11), si ottiene che la densità di massa è data da

$$\rho = \left(\frac{p}{C}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

A questo punto procuriamoci l'entalpia:

$$\mathcal{P}(p) = C^{\frac{1}{\gamma}} \int p^{-\frac{1}{\gamma}} dp = C^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\gamma}{\gamma-1} p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \text{costante}. \quad (3.4.12)$$

Supponiamo ora che il gas perfetto in condizioni isentropiche sia pesante ed in quiete rispetto ad un osservatore terrestre. Ci proponiamo di stabilire come varia la pressione al variare della quota, avendo fissato come riferimento associato all'osservatore un riferimento cartesiano ortonormale avente l'origine  $O$  appartenente alla regione occupata dal gas e l'asse  $Ox_3$  verticale ascendente. Se teniamo conto delle (3.4.7), (3.4.12), abbiamo:

$$C^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\gamma}{\gamma-1} p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = -gx_3 + c_2. \quad (3.4.13)$$

Ponendo nella (3.4.13)  $x_3 = 0$  e denotando con  $p_0$  il valore della pressione nei punti a quota zero, otteniamo:

$$c_2 = C^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\gamma}{\gamma-1} p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Sostituiamo il valore trovato per  $c_2$  nella (3.4.13) e dividiamo entrambi i membri della relazione ottenuta per  $C^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\gamma}{\gamma-1}$ . Deduciamo allora:

$$p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \left(\frac{1}{C}\right)^{\frac{1}{\gamma}} g x_3 + p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \quad (3.4.14)$$

D'altra parte, se indichiamo con  $\rho_0$  la densità di massa (costante) per  $x_3 = 0$ , abbiamo

$$p_0 = C \rho_0^\gamma \quad \implies \quad C = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma}.$$

La sostituzione di  $C$  nella (3.4.14) porta alla relazione

$$p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \left( \frac{\rho_0^\gamma}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} g x_3 + p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}},$$

che si può scrivere nella forma:

$$p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left[ -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\rho_0}{p_0} g x_3 + 1 \right],$$

da cui infine

$$p = p_0 \left[ -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\rho_0}{p_0} g x_3 + 1 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (3.4.15)$$

La (3.4.15) esprime la legge con cui varia la pressione al variare della quota per un gas perfetto in condizioni isentropiche, pesante, in quiete rispetto ad un osservatore terrestre.

In particolare tale legge si applica alla pressione atmosferica quando siamo in condizioni isentropiche.

### 3.5 Altre proprietà dei fluidi perfetti.

Introduciamo dapprima la seguente definizione di carattere generale

**Definizione 3.11.** *Diciamo che un corpo continuo, il cui moto sia descritto dal punto di vista spaziale, si muove di moto stazionario dal punto di vista meccanico se il suo moto è stazionario dal punto di vista cinematico ed ogni campo coinvolto nella descrizione del moto è stazionario.*

Stabiliamo il **I teorema di Bernoulli**

**Teorema 3.4.** *Si consideri un fluido perfetto che sia incomprimibile ed omogeneo o barotropico, in moto stazionario dal punto di vista meccanico. Se la densità delle forze esterne di massa  $\vec{F}$  proviene da un potenziale scalare  $U_1$ , allora lungo ogni linea di flusso si ha*

$$\frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U_1 = \text{costante}$$

se il fluido è incomprimibile ed omogeneo,

$$\frac{\overrightarrow{v}^2}{2} + \mathcal{P} - U_1 = \text{costante}$$

se il fluido è barotropico.

Dimostrazione

Osserviamo in primo luogo che, essendo il moto stazionario,  $\overrightarrow{v}' = \overrightarrow{0}$  in  $S$  per cui:

$$\dot{\overrightarrow{v}} = \text{grad } \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}. \quad (3.5.1)$$

D'altra parte, si può dimostrare che

$$\forall \overrightarrow{u} \in \mathcal{C}^1(S) : \quad \text{grad } \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \text{rot } \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u} + \text{grad } \frac{\overrightarrow{u}^2}{2}. \quad (3.5.2)$$

Grazie alla (3.5.2), la (3.5.1) si scrive come:

$$\dot{\overrightarrow{v}} = \text{rot } \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{v} + \text{grad } \frac{\overrightarrow{v}^2}{2}.$$

Allora l'equazione fondamentale dei fluidi perfetti (3.2.1) assume la forma

$$\rho (\text{rot } \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{v} + \text{grad } \frac{\overrightarrow{v}^2}{2}) = \rho \overrightarrow{F} - \text{grad } p. \quad (3.5.3)$$

Supponiamo dapprima che il fluido perfetto sia incomprimibile ed omogeneo per cui  $\rho$  è costante. Dividendo entrambi i membri della (3.5.3) per  $\rho$  e tenendo presente che  $\overrightarrow{F} = \text{grad } U_1$ , otteniamo:

$$\text{rot } \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{v} + \text{grad } \left( \frac{\overrightarrow{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U_1 \right) = \overrightarrow{0}. \quad (3.5.4)$$

Se moltiplichiamo scalarmente entrambi i membri della (3.5.4) per  $\overrightarrow{v}$  deduciamo:

$$\overrightarrow{v} \cdot \text{grad } \left( \frac{\overrightarrow{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U_1 \right) = 0,$$

da cui, per il teorema 1.3, sfruttando l'implicazione 3)  $\implies$  2), si ottiene la prima parte della tesi.

Assumiamo ora che il fluido perfetto sia barotropico. Dividendo entrambi i membri della (3.5.3) per  $\rho$  e tenendo presente che  $\text{grad } \frac{p}{\rho} = \text{grad } \mathcal{P}$ , si ha:

$$\text{rot } \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{v} + \text{grad } \left( \frac{\overrightarrow{v}^2}{2} + \mathcal{P} - U_1 \right) = \overrightarrow{0}. \quad (3.5.5)$$

Se moltiplichiamo scalarmente entrambi i membri della (3.5.5) per  $\vec{v}$  deduciamo:

$$\vec{v} \cdot \text{grad} \left( \frac{\vec{v}^2}{2} + \mathcal{P} - U_1 \right) = 0,$$

da cui, ancora per il teorema 1.3, si ottiene anche la seconda parte della tesi.

Vediamo ora di stabilire un risultato conseguenza del I teorema di Bernoulli, ossia il **Teorema delle tre altezze**.

**Teorema 3.5.** *Sia dato un fluido perfetto incomprimibile ed omogeneo in moto stazionario dal punto di vista meccanico rispetto ad un osservatore terrestre e soggetto soltanto alle forze peso. Allora, se l'asse verticale  $Ox_3$  è orientato come la verticale ascendente, lungo ogni linea di flusso si ha:*

$$\frac{\vec{v}^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + x_3 = \text{costante}, \quad (3.5.6)$$

dove  $\frac{\vec{v}^2}{2g}$  è detta altezza cinematica,  $\frac{p}{\rho g}$  è detta altezza barometrica,  $x_3$  è detta altezza geometrica.

#### Dimostrazione

Per ipotesi abbiamo un fluido perfetto incomprimibile ed omogeneo in moto stazionario. Possiamo allora applicare il I teorema di Bernoulli, tenendo presente che, se ha l'asse  $Ox_3$  è diretto come la verticale ascendente,  $\vec{F} = -g \vec{e}_3$  e dunque  $\vec{F}$  proviene dal potenziale scalare  $U_1 = -g x_3 + c$ . Per il I teorema di Bernoulli abbiamo che lungo ogni linea di flusso:

$$\frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g x_3 = \text{costante},$$

da cui, dividendo per  $g$ , otteniamo la (3.5.6).

Spieghiamo perchè i tre termini che compaiono nella (3.5.6) sono chiamati altezza cinematica, altezza barometrica, altezza geometrica rispettivamente.

$\frac{\vec{v}^2}{2g}$  rappresenta la quota da cui dovremmo lasciar cadere nel vuoto un punto materiale pesante per fargli acquistare una velocità di modulo  $v$ .

$\frac{p}{\rho g}$  rappresenta l'altezza che dovrebbe avere una colonna del fluido considerato, in quiete rispetto all'osservatore terrestre, con la superficie libera a pressione nulla, per esercitare sulla base della colonna una pressione pari a  $p$  (legge di Stevino).

$x_3$  rappresenta la quota della particella di fluido che stiamo considerando.

Stabiliamo ora il **II Teorema di Bernoulli**

**Teorema 3.6.** *Si consideri un fluido perfetto che sia incomprimibile ed omogeneo o barotropico. Se  $\vec{F}$  proviene da un potenziale  $U_1$  ed anche il campo della velocità proviene da un potenziale cinetico  $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathcal{S})$ , allora in  $\mathcal{S}$  si ha:*

$$\psi' + \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U_1 = C(t)$$

se il fluido è incomprimibile ed omogeneo,

$$\psi' + \frac{\vec{v}^2}{2} + \mathcal{P} - U_1 = C(t)$$

se il fluido è barotropico, con  $C(t)$  funzione del tempo.

Inoltre se il moto è stazionario dal punto di vista meccanico si ha:

$$\frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U_1 = \text{costante in } S$$

se il fluido è incomprimibile ed omogeneo,

$$\frac{\vec{v}^2}{2} + \mathcal{P} - U_1 = \text{costante in } S$$

se il fluido è barotropico.

#### Dimostrazione

Considerata l'equazione fondamentale della dinamica dei fluidi perfetti, dividiamone entrambi i membri per  $\rho$ :

$$\dot{\vec{v}} = \vec{F} - \frac{\text{grad } p}{\rho}. \quad (3.5.7)$$

Ma per la (3.5.2)

$$\dot{\vec{v}} = \vec{v}' + \text{rot } \vec{v} \times \vec{v} + \text{grad } \frac{\vec{v}^2}{2}.$$

D'altra parte

$$\vec{v} = \text{grad } \psi \implies \text{rot } \vec{v} = \vec{0}.$$

Allora

$$\begin{aligned}
 \dot{\vec{v}} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{\vec{v}^2}{2} \\
 &= \frac{\partial \text{grad} \psi}{\partial t} + \text{grad} \frac{\vec{v}^2}{2} \\
 &= \text{grad} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \text{grad} \frac{\vec{v}^2}{2} \\
 &= \text{grad} \left( \psi' + \frac{\vec{v}^2}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Sostituendo tale risultato nella (3.5.7) e tenendo presente che  $\vec{F} = \text{grad} U_1$ , otteniamo

$$\text{grad} \left( \psi' + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) = \text{grad} U_1 - \frac{\text{grad} p}{\rho}. \quad (3.5.8)$$

D'altra parte, se il fluido è incomprimibile ed omogeneo:

$$\frac{\text{grad} p}{\rho} = \text{grad} \left( \frac{p}{\rho} \right),$$

per cui la (3.5.8) fornisce:

$$\text{grad} \left( \psi' + \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U_1 \right) = \vec{0} \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Se il fluido è barotropico

$$\frac{\text{grad} p}{\rho} = \text{grad} \mathcal{P},$$

per cui dalla (3.5.8) si deduce:

$$\text{grad} \left( \psi' + \frac{\vec{v}^2}{2} + \mathcal{P} - U_1 \right) = \vec{0} \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Dall'annullarsi dei due gradienti otteniamo allora la tesi della prima parte del teorema.

Se poi supponiamo che il moto del fluido sia stazionario dal punto di vista meccanico, ne discende che  $\vec{v} = \vec{v}(P)$  per cui  $\psi' = 0$  in  $\mathcal{S}$ . Inoltre anche tutti gli altri campi non dipendono dal tempo e quindi  $C(t)$  si riduce ad una costante.

**Osservazione 3.6.** Osserviamo che la II parte del II teorema di Bernoulli continua a sussistere se al campo  $\vec{v}$  imponiamo soltanto la condizione di irrotazionalità, cioè la condizione  $\text{rot} \vec{v} = \vec{0}$  in  $\mathcal{S}$ .

Stabiliamo ora il seguente

**Teorema 3.7.** *Sia dato un fluido perfetto incomprimibile ed omogeneo o un fluido perfetto barotropico, in moto regolare. Allora durante il moto la circolazione si conserva, purché la densità delle forze esterne di massa  $\vec{F}$  provenga da un potenziale scalare.*

Dimostrazione

Se dividiamo per  $\rho$  entrambi i membri dell'equazione fondamentale della meccanica dei fluidi perfetti e teniamo presente che  $\vec{F} = \text{grad } U_1$ , abbiamo:

$$\dot{\vec{v}} = \text{grad } U_1 - \frac{\text{grad } p}{\rho}. \quad (3.5.9)$$

D'altra parte, come abbiamo già ripetuto varie volte, se il fluido è incomprimibile ed omogeneo:

$$\frac{\text{grad } p}{\rho} = \text{grad} \left( \frac{p}{\rho} \right),$$

mentre se il fluido è barotropico

$$\frac{\text{grad } p}{\rho} = \text{grad } \mathcal{P}.$$

Se andiamo a sostituire nella (3.5.9), otteniamo:

$$\dot{\vec{v}} = \text{grad} \left( U_1 - \frac{p}{\rho} \right)$$

se il fluido è incomprimibile ed omogeneo,

$$\dot{\vec{v}} = \text{grad} (U_1 - \mathcal{P})$$

se il fluido è barotropico.

Perciò in entrambi i casi l'accelerazione spaziale proviene da un potenziale scalare e basta applicare il teorema di Kelvin stabilito nel Capitolo 1 per ottenere la tesi.

# Capitolo 4

## Fluidi viscosi classici

### 4.1 Equazioni costitutive dei fluidi viscosi classici.

Abbiamo visto che in un fluido perfetto, tanto in condizioni di quiete quanto in condizioni di moto, lo sforzo specifico è normale. Diversi liquidi e gas reali sono schematizzabili con i fluidi perfetti (ad esempio l'acqua e l'aria).

D'altra parte, l'esperienza mostra che ci sono molti altri liquidi e gas per i quali, quando non sono in quiete o in moto rigido, lo sforzo non è puramente normale, ma possiede anche una componente di taglio. Gli sforzi di taglio tra l'altro rallentano il moto delle particelle le une rispetto alle altre.

In un certo senso una misura del moto relativo delle particelle è fornito dal gradiente della velocità,  $\text{grad } \vec{v}$ , o anche dalla sua parte simmetrica ossia dal tensore di velocità di deformazione

$$\tilde{D} = \frac{1}{2}(\text{grad } \vec{v} + \text{grad}^T \vec{v}).$$

Per schematizzare il comportamento di molti liquidi e gas reali la relazione sforzo - deformazione dei fluidi perfetti è stata generalizzata, ed è stata introdotta la classe più ampia dei fluidi propriamente detti, che abbiamo definito nel capitolo precedente.

Ricordiamo che un *fluido propriamente detto* è un corpo continuo caratterizzato, dal punto di vista puramente meccanico, in ambito spaziale, dalla seguente relazione sforzo - deformazione:

$$\tilde{T} = -p\tilde{a} + \tilde{\hat{T}}, \quad (4.1.1)$$

con  $\tilde{\hat{T}}$  funzione tensoriale del 2° ordine, simmetrica ( $\tilde{\hat{T}} = \tilde{\hat{T}}^T$ ),  $\tilde{\hat{T}} = \tilde{\hat{T}}(\tilde{D}, \vartheta)$ , con  $\vartheta$  temperatura assoluta, e tale che  $\tilde{\hat{T}}(\tilde{0}, \vartheta) = \tilde{0}$ .

La presenza di questa funzione aggiuntiva è quella che dà luogo a sforzi di taglio, che però non sono presenti se il fluido si muove di moto rigido o è in quiete.

Come abbiamo già detto in precedenza,  $\widetilde{T}$ , fornita dall'esperienza, è definita parte viscosa del tensore degli sforzi di Cauchy, mentre un fluido propriamente detto per il quale  $\widetilde{T}$  è identicamente nulla, qualunque sia il suo moto, viene chiamato non viscoso. I fluidi perfetti sono appunto fluidi non viscosi.

La più semplice sottoclasse dei fluidi viscosi propriamente detti è costituita dai *fluidi viscosi classici*, detti anche *fluidi viscosi lineari*.

**Definizione 4.1.** *Un fluido viscoso classico è un fluido viscoso propriamente detto per il quale  $\widetilde{T}$  è lineare rispetto a  $\widetilde{D}$ , cioè è della forma:*

$$\widetilde{T} = \widetilde{c} \cdot \widetilde{D}, \quad (4.1.2)$$

dove  $\widetilde{c}$  è un tensore del IV ordine, detto *tensore di viscosità*, dipendente dalla temperatura assoluta  $\vartheta$ , cioè  $\widetilde{c} = \widetilde{c}(\vartheta)$ , che gode delle due proprietà seguenti:

- è simmetrico rispetto alla prima ed alla seconda coppia di indici,
- è isotropo.

La simmetria rispetto alla prima coppia di indici è conseguenza della simmetria di  $\widetilde{T}$ ; la simmetria rispetto alla seconda coppia di indici è conseguenza della simmetria di  $\widetilde{D}$ .

Dunque in componenti:

$$\widehat{T}_{ij} = c_{ijrs} D_{rs}$$

con

$$c_{ijrs} = c_{jirs}, \quad c_{ijrs} = c_{ijsr}.$$

La proprietà di isotropia traduce matematicamente l'osservazione sperimentale che nei liquidi e gas reali che schematizziamo col modello di fluido viscoso classico le proprietà meccaniche sono indipendenti dalla direzione.

Ora vogliamo vedere le conseguenze sulla forma di  $\widetilde{c}$  delle due proprietà di cui gode.

La prima proprietà comporta una riduzione del numero delle componenti indipendenti del tensore di viscosità. Infatti le componenti indipendenti di un generico tensore del IV ordine sono  $3^4 = 81$ , ma le proprietà di simmetria di  $\widetilde{c}$  riducono da 81 a 36 le sue componenti indipendenti.

Infatti diamo a  $i$  e  $j$  due valori fissati, e vediamo quante componenti indipendenti di  $\widetilde{c}$  abbiamo al variare di  $r$  e  $s$ . Per la simmetria rispetto alla seconda

coppia di indici, queste sono 6. D'altra parte, fissati  $r$  ed  $s$ , facendo variare  $i$  e  $j$ , le componenti indipendenti che otteniamo sono ancora 6, e dunque in totale le componenti indipendenti di  $\tilde{c}$  sono  $6 \cdot 6 = 36$ .

Vediamo ora le conseguenze dell'isotropia di  $\tilde{c}$ . A tale proposito si potrebbe dimostrare la seguente:

**Proposizione 4.1.** *L'insieme dei tensori isotropi del IV ordine è un sottospazio dello spazio vettoriale dei tensori del IV ordine di dimensione 3, avente come base la terna*

$$(\tilde{A}^{(1)}, \tilde{A}^{(2)}, \tilde{A}^{(3)})$$

con  $\tilde{A}^{(1)}, \tilde{A}^{(2)}, \tilde{A}^{(3)}$  tensori del IV ordine di componenti

$$\begin{aligned} A_{ijrs}^{(1)} &= a_{ij} a_{rs} & (\Rightarrow \tilde{A}^{(1)} &= \tilde{a} \otimes \tilde{a}) \\ A_{ijrs}^{(2)} &= a_{ir} a_{js} \\ A_{ijrs}^{(3)} &= a_{is} a_{jr}. \end{aligned}$$

Con  $a_{ij}$  denotiamo, come è usuale, la componente di  $\tilde{a}$  di indici  $i$  e  $j$ . Poichè supponiamo sempre di utilizzare un riferimento cartesiano ortonormale allora

$$a_{ij} = a_{ji} = \delta_{ij}.$$

In base alla proposizione 4.1,  $\tilde{c}$  è una combinazione lineare di  $\tilde{A}^{(1)}, \tilde{A}^{(2)}, \tilde{A}^{(3)}$ , ossia è esprimibile in questa forma:

$$\tilde{c} = \alpha \tilde{A}^{(1)} + \beta \tilde{A}^{(2)} + \gamma \tilde{A}^{(3)} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}. \quad (4.1.3)$$

Dunque le 36 componenti indipendenti di  $\tilde{c}$  si esprimono tutte tramite 3 scalari. Infatti:

$$c_{ijrs} = \alpha a_{ij} a_{rs} + \beta a_{ir} a_{js} + \gamma a_{is} a_{jr} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Ma d'altra parte, come abbiamo osservato prima,  $\tilde{c}$  gode di particolari proprietà di simmetria.

La proprietà di simmetria rispetto alla prima coppia di indici ci permette di asserire che le componenti di  $\tilde{c}$  sono in realtà esprimibili tramite due soli scalari. Infatti, scambiando gli indici  $i$  e  $j$  nell'espressione di cui sopra, deduciamo:

$$c_{jirs} = \alpha a_{ji} a_{rs} + \beta a_{jr} a_{is} + \gamma a_{js} a_{ir}.$$

Ma  $c_{jirs} = c_{ijrs}$  e  $a_{ji} = a_{ij}$ ; dunque:

$$c_{ijrs} = \alpha a_{ij} a_{rs} + \beta a_{jr} a_{is} + \gamma a_{js} a_{ir},$$

da cui sommando membro a membro:

$$2c_{ijrs} = 2\alpha a_{ij}a_{rs} + (\beta + \gamma)(a_{ir}a_{js} + a_{is}a_{jr})$$

da cui

$$c_{ijrs} = \alpha a_{ij}a_{rs} + \frac{\beta + \gamma}{2}(a_{ir}a_{js} + a_{is}a_{jr}).$$

A questo punto poniamo

$$\alpha =: \lambda, \quad (\beta + \gamma)/2 =: \mu$$

ed otteniamo:

$$c_{ijrs} = \lambda a_{ij}a_{rs} + \mu (a_{ir}a_{js} + a_{is}a_{jr}). \quad (4.1.4)$$

Concludiamo che, per la proprietà di isotropia e per la simmetria rispetto alla prima coppia di indici, il tensore di viscosità è individuato tramite due soli scalari  $\lambda$  e  $\mu$ .

Se sfruttiamo la simmetria rispetto alla seconda coppia di indici perveniamo alla medesima conclusione.

E' chiaro che in generale, dipendendo  $\tilde{c}$  da  $\vartheta$ , si ha anche

$$\lambda = \lambda(\vartheta), \quad \mu = \mu(\vartheta).$$

Questi sono detti *coefficienti di viscosità* e sono forniti dall'esperienza; dunque nelle equazioni in cui compaiono si riguardano come noti.

Se in particolare i coefficienti di viscosità  $\lambda$  e  $\mu$  sono costanti, il fluido viscoso classico è detto *newtoniano*.

Vediamo allora quale forma viene ad assumere la relazione sforzo - deformazione per un fluido viscoso classico.

Ricordiamo che:

$$\tilde{T} = -p\tilde{a} + \tilde{T} \quad \text{con} \quad \tilde{T} = \tilde{c} \cdot \tilde{D}.$$

Ragionando per componenti:

$$\begin{aligned} \hat{T}_{ij} &= c_{ijrs} D_{rs} \\ &= \lambda \delta_{ij} \delta_{rs} D_{rs} + \mu (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}) D_{rs} \\ &= \lambda \operatorname{div} \vec{v} \delta_{ij} + \mu (D_{ij} + D_{ji}) \\ &= \lambda \operatorname{div} \vec{v} \delta_{ij} + 2\mu D_{ij}. \end{aligned}$$

Nel passare dalla seconda alla terza uguaglianza abbiamo tenuto conto che:

$$\delta_{rs} D_{rs} = D_{rr} = D_{11} + D_{22} + D_{33} = \operatorname{tr}(\tilde{D}).$$

D'altronde  $D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$ , da cui

$$\text{tr}(\tilde{D}) = D_{rr} = \frac{1}{2}(v_{r,r} + v_{r,r}) = v_{r,r} = \text{div } \vec{v}.$$

Nell'ultimo passaggio si è sfruttata la simmetria di  $\tilde{D}$ .

Dunque  $\tilde{T}$  assume la forma seguente:

$$\tilde{T} = (\lambda \text{div } \vec{v})\tilde{a} + 2\mu \tilde{D}. \quad (4.1.5)$$

In definitiva la relazione sforzo-deformazione che caratterizza un fluido viscoso classico è data da:

$$\tilde{T} = (\lambda \text{div } \vec{v} - p)\tilde{a} + 2\mu \tilde{D}. \quad (4.1.6)$$

Tale relazione soddisfa a tutti e tre gli assiomi cui devono soddisfare le equazioni costitutive per un corpo continuo. E' evidente che sono soddisfatti l'assioma dell'azione locale e l'assioma di determinismo, mentre per quanto riguarda l'assioma di obiettività, si potrebbe dimostrare che è rispettato dalla relazione sforzo-deformazione dei fluidi viscosi classici perchè  $\tilde{D}$  si annulla in corrispondenza di un moto rigido e il tensore  $\tilde{c}$  è isotropo.

Osserviamo che se un fluido viscoso classico è incomprimibile, abbiamo:

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad \text{ossia} \quad \text{tr}(\tilde{D}) = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}$$

e dunque per un fluido viscoso incomprimibile la relazione sforzo-deformazione si riduce a

$$\tilde{T} = -p\tilde{a} + 2\mu \tilde{D}. \quad (4.1.7)$$

I fluidi viscosi classici incomprimibili sono perciò caratterizzati da un solo coefficiente di viscosità.

Per quanto concerne le equazioni costitutive che caratterizzano un fluido viscoso classico dal punto di vista termodinamico, queste sono le stesse che sussistono per un fluido perfetto distinguendo tra fluidi viscosi classici comprimibili e fluidi viscosi classici incomprimibili. Per tali equazioni rimandiamo al capitolo precedente.

## 4.2 Compatibilità delle equazioni costitutive dei fluidi viscosi classici con il II assioma della termodinamica.

In questo paragrafo ci proponiamo di stabilire la condizione necessaria e sufficiente affinché le equazioni costitutive di un fluido viscoso classico siano compatibili con il II assioma della termodinamica.

In primo luogo richiamiamo la disequazione indefinita conseguenza del II assioma della termodinamica nella forma di disequazione di Clausius-Duhem per un generico corpo continuo studiato dal punto di vista spaziale:

$$\rho \left( \dot{\psi} + h\dot{\vartheta} \right) - \tilde{T} \cdot \tilde{D} + \frac{1}{\vartheta} \vec{q} \cdot \text{grad}\vartheta \leq 0. \quad (4.2.1)$$

Tale disequazione deve essere soddisfatta in  $\mathcal{S}$ , qualunque sia l'evoluzione del continuo.

Occupiamoci per il momento del termine  $\tilde{T} \cdot \tilde{D}$  e vediamo quale espressione viene ad assumere per un fluido viscoso classico comprimibile sfruttando la relazione sforzo-deformazione.

Poiché

$$\tilde{T} = (\lambda \text{div } \vec{v} - p)\tilde{a} + 2\mu\tilde{D} \Rightarrow T_{ij} = (\lambda \text{tr } \tilde{D} - p)\delta_{ij} + 2\mu D_{ij},$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} \tilde{T} \cdot \tilde{D} &= T_{ij} D_{ij} \\ &= (\lambda \text{tr } \tilde{D} - p)\delta_{ij} D_{ij} + 2\mu D_{ij} D_{ij} \\ &= -p \text{div } \vec{v} + \lambda (\text{tr } \tilde{D})^2 + 2\mu \tilde{D} \cdot \tilde{D}. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

D'altra parte, dall'equazione di continuità della massa:

$$\dot{\rho} + \rho \text{div } \vec{v} = 0$$

ricaviamo

$$\text{div } \vec{v} = -\dot{\rho}/\rho.$$

Introduciamo poi la forma quadratica così definita per ogni tensore doppio simmetrico  $\tilde{D}$

$$\omega(\tilde{D}) = \frac{1}{2} [\lambda (\text{tr } \tilde{D})^2 + 2\mu \tilde{D} \cdot \tilde{D}].$$

Allora dalla (4.2.2) deduciamo:

$$\tilde{T} \cdot \tilde{D} = p \dot{\rho}/\rho + 2\omega(\tilde{D}). \quad (4.2.3)$$

Nel caso di un fluido viscoso classico incomprimibile, tenendo conto che

$$\tilde{T} = -p\tilde{a} + 2\mu\tilde{D}, \quad \text{tr } \tilde{D} = 0,$$

ricaviamo:

$$\tilde{T} \cdot \tilde{D} = 2\mu \tilde{D} \cdot \tilde{D}. \quad (4.2.4)$$

Per ottenere ora la condizione necessaria e sufficiente che cerchiamo, ci serve un risultato sulla forma quadratica  $\omega(\tilde{D})$ .

Premettiamo una definizione ed una proposizione.

**Definizione 4.2.** *La forma quadratica  $\omega(\tilde{D})$  è semidefinita positiva se  $\omega(\tilde{D}) \geq 0$  per ogni tensore doppio simmetrico  $\tilde{D}$ .*

**Proposizione 4.2.** *Ogni tensore doppio  $\tilde{T}$  si può decomporre nella forma seguente:*

$$\tilde{T} = \alpha \tilde{a} + \tilde{q}$$

dove  $\alpha$  è uno scalare e  $\tilde{q}$  è un tensore doppio tale che  $\text{tr} \tilde{q} = 0$ .

Dimostrazione

Osserviamo che è sempre possibile decomporre un qualsiasi tensore doppio  $\tilde{T}$  nella forma seguente

$$\tilde{T} = \alpha \tilde{a} + \tilde{q},$$

ma il nostro scopo è di mostrare che è possibile prendere lo scalare  $\alpha$  in modo tale che  $\text{tr} \tilde{q} = 0$ .

Teniamo conto che

$$\text{tr} \tilde{T} = \alpha \text{tr} \tilde{a} + \text{tr} \tilde{q} = 3\alpha + \text{tr} \tilde{q},$$

poiché

$$\text{tr} \tilde{a} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3.$$

Otteniamo allora:

$$\text{tr} \tilde{q} = \text{tr} \tilde{T} - 3\alpha.$$

Per avere  $\text{tr} \tilde{q} = 0$ , occorre e basta prendere

$$\alpha = \frac{1}{3} \text{tr} \tilde{T}.$$

La proposizione è così dimostrata.

Si noti che se  $\tilde{T}$  è isotropo, allora necessariamente deve essere  $\tilde{q} = \tilde{0}$ .

Stabiliamo ora un lemma che ci fornisce il risultato desiderato sulla forma quadratica  $\omega(\tilde{D})$ .

**Lemma 4.1.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché  $\omega(\tilde{D})$  sia semidefinita positiva è che i coefficienti  $\lambda$  e  $\mu$  soddisfino alle seguenti disuguaglianze:*

$$3\lambda + 2\mu \geq 0, \quad \mu \geq 0.$$

Dimostrazione

Se utilizziamo la proposizione 4.2, possiamo scrivere:

$$\tilde{D} = \frac{1}{3} \left( \text{tr} \tilde{D} \right) \tilde{a} + \tilde{q}, \quad \text{con } \text{tr} \tilde{q} = 0.$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} \omega(\tilde{D}) &= \frac{1}{2} \left\{ \lambda \left( \text{tr} \tilde{D} \right)^2 + 2\mu \left[ \frac{1}{3} \left( \text{tr} \tilde{D} \right) \tilde{a} + \tilde{q} \right] \cdot \left[ \frac{1}{3} \left( \text{tr} \tilde{D} \right) \tilde{a} + \tilde{q} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \lambda \left( \text{tr} \tilde{D} \right)^2 + 2\mu \left[ \frac{1}{9} \left( \text{tr} \tilde{D} \right)^2 \tilde{a} \cdot \tilde{a} + \tilde{q} \cdot \tilde{q} + \frac{2}{3} \left( \text{tr} \tilde{D} \right) \tilde{a} \cdot \tilde{q} \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \left( \text{tr} \tilde{D} \right)^2 + 2\mu \tilde{q} \cdot \tilde{q} \right], \end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto presente che

$$\tilde{a} \cdot \tilde{a} = \delta_{ij} \delta_{ij} = \delta_{ii} = 3$$

e che

$$\tilde{a} \cdot \tilde{q} = \delta_{ij} q_{ij} = q_{ii} = \text{tr} \tilde{q} = 0.$$

Distinguiamo ora tra condizione sufficiente e condizione necessaria del lemma.

- Condizione sufficiente.

Per ipotesi:

$$3\lambda + 2\mu \geq 0, \mu \geq 0;$$

dobbiamo dimostrare che

$$\omega(\tilde{D}) \geq 0 \quad \forall \tilde{D} \text{ simmetrico.}$$

Con le ipotesi di segno su  $\lambda$  e  $\mu$  e l'espressione trovata per  $\omega(\tilde{D})$  la tesi è banalmente verificata.

- Condizione necessaria.

Per ipotesi

$$\omega(\tilde{D}) \geq 0 \quad \forall \tilde{D} \text{ simmetrico;}$$

dobbiamo dimostrare che

$$3\lambda + 2\mu \geq 0, \mu \geq 0.$$

Sfruttiamo l'arbitrarietà del tensore  $\tilde{D}$ .

Supponiamo dapprima che  $\tilde{D}$  sia un tensore isotropo. Allora  $\tilde{q} = \tilde{0}$ , da cui segue:

$$\omega(\tilde{D}) = \frac{1}{2} \left[ \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \left( \text{tr} \tilde{D} \right)^2 \right] \geq 0 \quad \implies \quad 3\lambda + 2\mu \geq 0.$$

Supponiamo ora che  $\tilde{D}$  sia un tensore doppio simmetrico a traccia nulla. Si ha:

$$\omega(\tilde{D}) = \mu \tilde{q} \cdot \tilde{q} \geq 0 \quad \implies \quad \mu \geq 0.$$

Dimostriamo ora il seguente:

**Teorema 4.1.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché le equazioni costitutive per un fluido viscoso classico comprimibile siano compatibili con il II Assioma della termodinamica è che*

$$3\lambda + 2\mu \geq 0, \quad \mu \geq 0, \quad \beta \geq 0.$$

L'analogha condizione necessaria e sufficiente per un fluido viscoso classico incomprimibile è

$$\mu \geq 0, \quad \beta \geq 0.$$

Dimostrazione.

Innanzitutto riscriviamo la disuguaglianza di Clausius-Duhem per un corpo continuo qualsiasi:

$$\rho (\dot{\psi} + h\dot{\vartheta}) - \tilde{T} \cdot \tilde{D} + \frac{1}{\vartheta} \vec{q} \cdot \text{grad}\vartheta \leq 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Distinguiamo i due casi di fluido comprimibile e fluido incomprimibile.

1) **Fluido comprimibile.**

Condizione necessaria e sufficiente affinché ci sia la compatibilità richiesta, è che, se si sostituiscono nella disequazione di cui sopra alle varie grandezze costitutive le loro espressioni conseguenza delle equazioni costitutive, questa sia soddisfatta in ogni punto ed in ogni istante qualunque sia l'evoluzione del fluido.

Ora:

$$\psi = \hat{\psi}(\vartheta, \nu) \quad \implies \quad \dot{\psi} = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \nu} \dot{\nu} = -\hat{h} \dot{\vartheta} + \hat{p} \frac{\dot{\rho}}{\rho^2}.$$

D'altra parte:

$$\tilde{T} \cdot \tilde{D} = p \frac{\dot{\rho}}{\rho} + 2\omega(\tilde{D}) = \hat{p} \frac{\dot{\rho}}{\rho} + 2\omega(\tilde{D}).$$

Inoltre sappiamo che  $\vec{q} = -\beta \text{grad}\vartheta$ .

Andando a sostituire queste relazioni nel primo membro della disequazione di Clausius-Duhem otteniamo:

$$\rho \left( -\hat{h} \dot{\vartheta} + \hat{p} \frac{\dot{\rho}}{\rho^2} + \hat{h} \dot{\vartheta} \right) - \hat{p} \frac{\dot{\rho}}{\rho} - 2\omega(\tilde{D}) - \frac{\beta}{\vartheta} (\text{grad } \vartheta)^2 = -2\omega(\tilde{D}) - \frac{\beta}{\vartheta} (\text{grad } \vartheta)^2.$$

Le equazioni costitutive saranno compatibili con il II assioma della termodinamica se e solo se, qualunque sia l'evoluzione del fluido, si avrà in  $\mathcal{S}$ :

$$-2\omega(\tilde{D}) - \frac{\beta}{\vartheta}(\text{grad } \vartheta)^2 \leq 0 \iff 2\omega(\tilde{D}) + \frac{\beta}{\vartheta}(\text{grad } \vartheta)^2 \geq 0.$$

Distinguiamo tra condizione sufficiente e condizione necessaria.

- Condizione sufficiente.

Per ipotesi  $3\lambda + 2\mu \geq 0$ ,  $\mu \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ , e dobbiamo dimostrare che la disuguaglianza di cui sopra è soddisfatta qualunque sia l'evoluzione del fluido.

E' manifestamente vero, poichè le prime due condizioni di segno ci dicono che  $\omega(\tilde{D})$  è sempre  $\geq 0$  e d'altra parte, essendo  $\vartheta$  strettamente positiva, anche il termine  $\frac{\beta}{\vartheta}(\text{grad } \vartheta)^2$  è  $\geq 0$  in  $\mathcal{S}$  qualunque sia l'evoluzione del fluido.

- Condizione necessaria.

La disuguaglianza sia soddisfatta quale che sia l'evoluzione del fluido, e dimostriamo che  $3\lambda + 2\mu \geq 0$ ,  $\mu \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ .

Se il fluido evolve isotermicamente, ossia  $\vartheta = \vartheta_0 = \text{cost} > 0$  in  $\mathcal{S}$ , allora essendo  $\text{grad } \vartheta = \vec{0}$  in  $\mathcal{S}$ , abbiamo:

$$\omega(\tilde{D}) \geq 0 \quad \forall \tilde{D},$$

da cui le prime due condizioni di segno.

Se poi il fluido evolve muovendosi di moto rigido,  $\tilde{D} = \tilde{0}$  durante il moto, dunque  $\omega(\tilde{D}) = 0$  durante il moto, e quindi:

$$\frac{\beta}{\vartheta}(\text{grad } \vartheta)^2 \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{S} \text{ per ogni } \vartheta.$$

Da tale disequazione discende:

$$\beta \geq 0.$$

## 2) Fluido incompressibile.

Procediamo esattamente come nel caso precedente.

Consideriamo il primo membro della disequazione di Clausius-Duhem e vediamo che forma assume per un fluido viscoso classico incompressibile.

Abbiamo:

$$\begin{aligned} \psi = \hat{\psi}(\vartheta) &\implies \dot{\psi} = \frac{d\hat{\psi}}{d\vartheta} \dot{\vartheta} = -\hat{h} \dot{\vartheta}, \\ \tilde{T} \cdot \tilde{D} &= 2\mu \tilde{D} \cdot \tilde{D}, \\ \vec{q} &= -\beta \text{grad } \vartheta, \end{aligned}$$

In definitiva il primo membro della disuguaglianza di Clausius-Duhem diventa:

$$\rho \left( -\widehat{h} \dot{\vartheta} + \widehat{h} \dot{\vartheta} \right) - 2\mu \widetilde{D} \cdot \widetilde{D} - \frac{\beta}{\vartheta} (\text{grad} \vartheta)^2 = -2\mu \widetilde{D} \cdot \widetilde{D} - \frac{\beta}{\vartheta} (\text{grad} \vartheta)^2.$$

Allora le equazioni costitutive di un fluido viscoso classico incomprimibile sono compatibili con il II assioma della termodinamica se e solo se:

$$2\mu \widetilde{D} \cdot \widetilde{D} + \frac{\beta}{\vartheta} (\text{grad} \vartheta)^2 \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{S},$$

quale che sia l'evoluzione del fluido.

- Condizione sufficiente.

Questa condizione è evidente, tenendo conto che per ipotesi  $\mu \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ .

- Condizione necessaria.

Per ipotesi sussiste la disuguaglianza di cui sopra, e dobbiamo dimostrare che  $\mu \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ . Sfruttiamo il fatto che tale disuguaglianza sussiste in  $\mathcal{S}$  quale che sia l'evoluzione del fluido. Se in particolare il fluido evolve isotermicamente, ossia  $\vartheta = \vartheta_0 = \text{cost}$  in  $\mathcal{S}$ , allora  $\text{grad} \vartheta = \vec{0}$  in  $\mathcal{S}$  per cui la disuguaglianza si riduce a

$$2\mu \widetilde{D} \cdot \widetilde{D} \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{S}$$

e questo per ogni  $\widetilde{D}$  simmetrico. Poichè  $\widetilde{D} \cdot \widetilde{D} \geq 0 \quad \forall \widetilde{D}$ , ne consegue  $\mu \geq 0$ .

Se invece il fluido evolve muovendosi di moto rigido, allora  $\widetilde{D} = 0$  in  $\mathcal{S}$ , per cui dalla disuguaglianza discende:

$$\frac{\beta}{\vartheta} (\text{grad} \vartheta)^2 \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{S} \quad \implies \quad \beta \geq 0.$$

### 4.3 Impostazione del problema del moto per un fluido viscoso classico comprimibile.

A questo punto ci proponiamo di impostare il problema del moto per i fluidi viscosi classici comprimibili.

In primo luogo vediamo quale forma assume la prima equazione indefinita della meccanica dei corpi continui:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + \text{div} \widetilde{T}. \quad (4.3.1)$$

Teniamo conto che per un fluido viscoso classico comprimibile la relazione sforzo-deformazione è data da:

$$\tilde{T} = (\lambda \operatorname{div} \vec{v} - p) \tilde{a} + 2\mu \tilde{D},$$

con  $\lambda = \lambda(\vartheta)$ ,  $\mu = \mu(\vartheta)$ .

In particolare vogliamo vedere che forma assume  $\operatorname{div} \tilde{T}$ .

Osserviamo in primo luogo che, avendo richiesto che  $\tilde{T} \in \mathcal{C}^{1,0}(\mathcal{S})$ , d'ora in poi supporremo  $\vec{v} \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathcal{S})$ , (ossia che  $\vec{v}$  in  $\mathcal{S}$  rispetto a  $P$  ammetta gradiente primo e secondo continui mentre rispetto a  $t$  ammetta derivata prima continua), che  $p \in \mathcal{C}^{1,0}(\mathcal{S})$  e che  $\lambda, \mu \in \mathcal{C}^1$  rispetto a  $\vartheta$ .

Determiniamo la componente iesima di  $\operatorname{div} \tilde{T}$  tenendo conto che

$$T_{ij} = (\lambda \operatorname{div} \vec{v} - p) \delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$$

e

$$\left( \operatorname{div} \tilde{T} \right)_i = T_{ij,j}.$$

Dunque:

$$\begin{aligned} T_{ij,j} &= (\lambda \operatorname{div} \vec{v} - p)_{,j} \delta_{ij} + 2(\mu D_{ij})_{,j} = \\ &= (\lambda \operatorname{div} \vec{v})_{,i} - p_{,i} + 2(\mu D_{ij})_{,j} = \\ &= [\operatorname{grad}(\lambda \operatorname{div} \vec{v})]_i - [\operatorname{grad} p]_i + 2 \left[ \operatorname{div}(\mu \tilde{D}) \right]_i. \end{aligned}$$

Allora la prima equazione indefinita viene ad assumere la seguente forma:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + \operatorname{grad}(\lambda \operatorname{div} \vec{v}) + 2 \operatorname{div}(\mu \tilde{D}) - \operatorname{grad} p. \quad (4.3.2)$$

Se a questo punto poi supponiamo che il fluido che stiamo considerando sia newtoniano, ossia  $\lambda, \mu = \text{cost}$ , l'espressione di  $\operatorname{div} \tilde{T}$  si modifica nel modo seguente

$$\begin{aligned} \left( \operatorname{div} \tilde{T} \right)_i &= T_{ij,j} = \\ &= \lambda (\operatorname{div} \vec{v})_{,i} - p_{,i} + \mu (v_{i,j} + v_{j,i})_{,j} = \\ &= \lambda (\operatorname{div} \vec{v})_{,i} - p_{,i} + \mu (v_{i,jj} + v_{j,ij}). \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

D'altra parte:

$$v_{i,jj} + v_{j,ij} = \Delta v_i + v_{j,ji} = \Delta v_i + (v_{j,j})_{,i} = \Delta v_i + (\operatorname{div} \vec{v})_{,i}.$$

Sostituendo tale risultato nella (4.3.3), otteniamo:

$$\begin{aligned} \left( \operatorname{div} \tilde{T} \right)_i &= (\lambda + \mu) (\operatorname{div} \vec{v})_{,i} + \mu \Delta v_i - p_{,i} = \\ &= (\lambda + \mu) [\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{v})]_i + \mu (\Delta \vec{v})_i - (\operatorname{grad} p)_i. \end{aligned}$$

Allora, per un fluido viscoso classico comprimibile newtoniano, la prima equazione indefinita diventa:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} \vec{v}) + \mu \Delta \vec{v} - \text{grad} p. \quad (4.3.4)$$

Tale equazione è nota come **equazione di Navier - Stokes**.

A questo punto, vediamo se per un fluido viscoso classico comprimibile è possibile impostare il problema del moto in ambito puramente meccanico.

In tale ambito alla prima equazione indefinita possiamo associare soltanto l'equazione di continuità della massa:

$$\dot{\rho} + \rho \text{div} \vec{v} = 0.$$

Facendo il bilancio fra numero di equazioni a disposizione e numero di incognite, abbiamo in totale 5 incognite scalari:  $v_i$ ,  $\rho$ ,  $p$  (più eventualmente  $\vartheta$  se il fluido non è newtoniano), ma solo quattro equazioni scalari; di conseguenza non è possibile impostare il problema del moto per un fluido viscoso classico comprimibile rimanendo in ambito puramente meccanico, ma dobbiamo impostare il problema termomeccanico nel suo complesso.

Dunque in primo luogo dobbiamo associare alle equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + \rho \text{div} \vec{v} &= 0, \\ \rho \dot{\vec{v}} &= \rho \vec{F} + \text{grad}(\lambda \text{div} \vec{v}) + 2 \text{div}(\mu \tilde{D}) - \text{grad} p, \end{aligned}$$

l'equazione che traduce il primo assioma della termodinamica. Vediamo quale forma assume tale equazione per i fluidi viscosi classici comprimibili.

Scriviamo dapprima l'equazione indefinita conseguenza del I assioma della termodinamica per un generico corpo continuo:

$$\rho \dot{k} = \rho r - \text{div} \vec{q} + \tilde{T} \cdot \tilde{D}.$$

Ma, come abbiamo visto nel paragrafo precedente,

$$\tilde{T} \cdot \tilde{D} = p \frac{\dot{\rho}}{\rho} + 2\omega(\tilde{D})$$

per cui l'equazione indefinita conseguenza del I assioma della termodinamica per un fluido viscoso classico comprimibile, se si sfrutta la relazione sforzo-deformazione, è la seguente:

$$\rho \dot{k} = \rho r - \text{div} \vec{q} + p \frac{\dot{\rho}}{\rho} + 2\omega(\tilde{D}),$$

che viene chiamata **equazione dell'energia**.

Alle equazioni meccaniche e all'equazione dell'energia associamo inoltre le tre equazioni di stato e la legge di propagazione del calore:

$$\vec{q} = -\beta \text{grad} \vartheta.$$

Le incognite del problema sono ora  $v_i, p, \rho, k, (\text{o } \psi \text{ o } G), \vartheta, h, q_i$ , e quindi sono in totale 11. Ma anche le equazioni scalari sono 11. Di conseguenza il problema termomeccanico è impostato in maniera completa per quanto riguarda il bilancio tra numero di equazioni e numero di incognite.

A questo punto, per determinare effettivamente l'evoluzione del corpo reale schematizzato dal nostro modello, ossia per avere l'unicità della soluzione del problema, alle equazioni dovremo associare le condizioni ai limiti. Esse si distinguono in **condizioni iniziali** (ossia relative all'istante iniziale del moto), e **condizioni al contorno** (ossia relative alla frontiera della regione occupata dal fluido).

Ci limiteremo ora ad enunciare soltanto una condizione al contorno relativa al campo della velocità  $\vec{v}$ , che viene utilizzata spesso.

Supponiamo che  $\partial S(t)$ , ossia la frontiera della regione  $S(t)$  occupata dal fluido all'istante  $t, \forall t \in [t_0, t_1]$  sia costituita da pareti materiali rigide (ad esempio il caso di un fluido contenuto in un recipiente). Sia  $\vec{V} = \vec{V}(P, t), P \in \partial S(t), t \in [t_0, t_1]$  l'atto di moto di tali pareti materiali rigide, che supponiamo noto.

L'esperienza ci mostra che, se abbiamo a che fare con un liquido o con un gas viscoso, non solo le sue particelle non possono penetrare attraverso le pareti, cosa che accade anche per un fluido perfetto, ma queste aderiscono alle pareti stesse. Di conseguenza, mentre per i fluidi perfetti si impone al campo  $\vec{v}$  la condizione (scalare) di impenetrabilità:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} \Big|_{\partial S(t)} = \vec{V} \cdot \vec{n}, \quad \vec{n} \text{ versore normale a } \partial S(t) \text{ rivolto verso l'esterno di } S(t),$$

per i fluidi viscosi si richiede una condizione più restrittiva, detta di aderenza o anche *no-slip condition*, di carattere vettoriale:

$$\vec{v} \Big|_{\partial S(t)} = \vec{V}. \quad (4.3.5)$$

Il fatto che questa condizione, suggerita dall'esperienza, sia più restrittiva di quella relativa ai fluidi perfetti corrisponde anche ad una precisa esigenza matematica. Infatti mentre nel caso dei fluidi perfetti, nelle equazioni che ne governano il moto, operano su  $\vec{v}$  solo operatori differenziali spaziali del I ordine, in questo caso operano su  $\vec{v}$  anche operatori differenziali spaziali del II ordine, come  $\text{grad div}$  o  $\Delta$ .

## 4.4 Impostazione del problema del moto per un fluido viscoso classico incompressibile. Differenze di comportamento rispetto ai fluidi perfetti incompressibili.

Consideriamo ora un fluido viscoso classico incompressibile e vediamo come si può impostare il problema del suo moto.

In questo caso la prima equazione indefinita, se sfruttiamo la relazione sforzo deformazione che caratterizza questi fluidi:

$$\tilde{T} = -p\tilde{a} + 2\mu\tilde{D},$$

risulta molto più semplice.

Infatti, utilizzando i risultati ottenuti per i fluidi comprimibili, abbiamo:

$$\operatorname{div}\tilde{T} = -\operatorname{grad}p + 2\operatorname{div}(\mu\tilde{D}),$$

da cui dunque la prima equazione indefinita risulta:

$$\rho\dot{\vec{v}} = \rho\vec{F} + 2\operatorname{div}(\mu\tilde{D}) - \operatorname{grad}p. \quad (4.4.1)$$

Se poi il fluido in esame è incompressibile e newtoniano, ossia  $\mu = \text{cost}$ , rifacendo di nuovo i passaggi svolti precedentemente con  $\mu, \lambda = \text{cost}$  e tenendo presente la condizione di incompressibilità, otteniamo:

$$\operatorname{div}\tilde{T} = -\operatorname{grad}p + \mu\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v} + \mu\Delta\vec{v} = -\operatorname{grad}p + \mu\Delta\vec{v},$$

da cui dunque l'equazione (4.4.1) si riduce a:

$$\rho\dot{\vec{v}} = \rho\vec{F} + \mu\Delta\vec{v} - \operatorname{grad}p \quad (4.4.2)$$

che è nota come **equazione di Navier-Stokes per i fluidi newtoniani incompressibili**.

Ci proponiamo ora di dimostrare la seguente:

**Proposizione 4.3.** *Se  $\mu$  è costante oppure il fluido evolve in condizioni isoterliche, cioè  $\vartheta = \vartheta_0 = \text{cost}$  in  $\mathcal{S}$ , è possibile impostare il problema del moto per un fluido viscoso classico incompressibile in ambito puramente meccanico.*

Dimostrazione.

Oltre all'equazione di Navier-Stokes, in questo caso abbiamo a disposizione le equazioni:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{v} &= 0, & \text{condizione di incompressibilità,} \\ \dot{\rho} &= 0, & \text{equazione di continuità della massa.} \end{aligned}$$

In totale abbiamo 5 incognite scalari, cioè  $v_i$ ,  $\rho$ ,  $p$ , a fronte di 5 equazioni scalari, e dunque il problema del moto è impostato in modo completo.

E' importante rilevare che per i fluidi incomprimibili la pressione  $p$  è un'incognita puramente meccanica e quindi non è definita mediante un'equazione di stato. Naturalmente dobbiamo ora associare le condizioni iniziali e le condizioni al contorno.

Se supponiamo  $t_0 = 0$ , le condizioni iniziali, che fanno intervenire solo  $\rho$  e  $\vec{v}$ , sono le seguenti:

$$\begin{aligned}\rho(P, 0) &= \rho_0(P) \\ \vec{v}(P, 0) &= \vec{v}_0(P) \quad \forall P \in S(0),\end{aligned}$$

con  $\rho_0(P)$  e  $\vec{v}_0(P)$  campi noti.

Inoltre, abbiamo anche la condizione al contorno sul campo  $\vec{v}$ .

Se supponiamo che  $\partial S(t)$  sia formato da pareti materiali rigide di cui conosciamo l'atto di moto  $\vec{V} = \vec{V}(P, t)$ , con  $P \in \partial S(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ , poiché il fluido è viscoso, usualmente si associa la condizione di aderenza come nel caso precedente:

$$\vec{v} \Big|_{\partial S(t)} = \vec{V} \quad \forall t \in [0, t_1].$$

Se invece  $\mu = \mu(\vartheta)$  e non siamo in condizioni isoterme, il problema del moto non può essere impostato in maniera completa rimanendo in ambito puramente meccanico, perchè nelle 5 equazioni scalari di cui sopra interviene ora anche l'incognita scalare  $\vartheta$ .

Alle 5 equazioni scritte prima, dunque, è necessario aggiungere l'equazione che traduce il primo assioma della termodinamica per i fluidi viscosi classici incomprimibili:

$$\rho \dot{k} = \rho r - \operatorname{div} \vec{q} + 2\mu \tilde{D} \cdot \tilde{D}. \quad (4.4.3)$$

Inoltre dobbiamo aggiungere anche le due equazioni di stato e la legge di propagazione del calore:

$$\vec{q} = -\beta \operatorname{grad} \vartheta.$$

Nel complesso abbiamo ottenuto un problema descritto da 11 equazioni scalari in 11 incognite scalari:  $v_i$ ,  $\rho$ ,  $p$ ,  $k$  (o  $\psi$ ),  $\vartheta$ ,  $h$ ,  $q_i$ .

A queste equazioni vanno poi associate le condizioni ai limiti (condizioni iniziali e condizioni al contorno).

Un caso particolare di fluido incomprimibile è quello di un fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo, ossia tale che la densità di massa  $\rho$  dipende solo da  $t$  e non da  $P$ , ossia  $\rho = \rho(t)$ , anzichè  $\rho = \rho(P, t)$ , da cui segue che  $\operatorname{grad} \rho = \vec{0}$

in  $\mathcal{S}$ . Ora però, essendo il fluido incompressibile, è automaticamente soddisfatta la condizione:

$$\dot{\rho} = 0.$$

Ma:

$$\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{grad} \rho \cdot \vec{v} = 0 \quad \implies \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Di conseguenza se il fluido in esame è omogeneo,  $\rho$  non dipende neanche dal tempo, e dunque in definitiva  $\rho = \text{cost} > 0$  in  $\mathcal{S}$  e quindi non è più un'incognita del problema.

Le equazioni che governano il moto di questo fluido sono puramente meccaniche, e sono date da:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{v}' + \text{grad} \vec{v} \cdot \vec{v}) &= \rho \vec{F} + \mu \Delta \vec{v} - \text{grad} p, \\ \text{div} \vec{v} &= 0. \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

Le incognite scalari del problema sono 4:  $v_1, v_2, v_3, p$ .

In tal caso nelle condizioni iniziali interviene solo la velocità:

$$\vec{v}(P, 0) = \vec{v}_0(P) \quad \forall P \in S(0),$$

ed abbiamo la condizione al contorno di aderenza se supponiamo  $\partial S(t)$  costituito da pareti materiali rigide.

Poichè  $\rho = \text{cost} > 0$ , nella (4.4.4) possiamo dividere ambo i membri per  $\rho$ , ottenendo così l'equazione:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{F} + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{v} - \text{grad} \frac{p}{\rho}, \quad (4.4.5)$$

dove si pone  $\nu := \mu/\rho$ , che viene detto *coefficiente di viscosità cinematica*. L'equazione in questa forma è detta **equazione di Navier-Stokes per un fluido newtoniano incompressibile ed omogeneo**.

Alla (4.4.5) va poi associata l'equazione:

$$\text{div} \vec{v} = 0.$$

Risolvere il problema del moto per questo fluido significa trovare una coppia  $(\vec{v}, p)$  con  $\vec{v} \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathcal{S})$  e  $p \in \mathcal{C}^{1,0}(\mathcal{S})$  soddisfacente all'equazione (4.4.5), alla condizione di incompressibilità in  $\mathcal{S}$  e alle corrispondenti condizioni ai limiti.

Si noti comunque, che una volta trovata una soluzione di questo problema, la pressione  $p$  non è individuata mai in maniera univoca, poichè nell'equazione

(4.4.5) non compare esplicitamente ma soltanto tramite  $\text{grad}p$ . Dunque  $p$  è determinata a meno di una funzione arbitraria del tempo  $\alpha(t)$ .

Infatti, se

$$p^* = p + \alpha(t), \quad \text{allora} \quad \text{grad}p^* = \text{grad}p$$

e dunque se  $(\vec{v}, p)$  è soluzione del problema, lo è anche  $(\vec{v}, p^*)$ .

L'indeterminazione della pressione si verifica anche per i fluidi perfetti incomprimibili, come abbiamo visto nel capitolo precedente ed anche per fluidi propriamente detti più generali incomprimibili.

In ogni caso determinare la soluzione del problema in esame è difficile per la presenza nell'equazione di Navier-Stokes del termine non lineare  $\text{grad}\vec{v} \cdot \vec{v}$ . D'altra parte è possibile che il fluido che stiamo esaminando si muova così lentamente che le componenti di  $\vec{v}$  e  $\text{grad}\vec{v}$  siano talmente piccole da poter trascurare nell'equazione (4.4.5) il termine  $\text{grad}\vec{v} \cdot \vec{v}$ . In questo caso l'equazione (4.4.5) si riduce alla seguente:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad}p. \quad (4.4.6)$$

Ogni moto che sia soluzione della equazione (4.4.6) (che risulta lineare) prende il nome di **moto di Stokes**.

Ci proponiamo ora di evidenziare alcune differenze di comportamento tra un fluido perfetto incomprimibile ed un fluido viscoso classico incomprimibile.

- Consideriamo la potenza delle forze interne ad un generico istante  $t$  per un fluido perfetto incomprimibile:

$$\Pi_i(t) = - \int_{S(t)} \tilde{T} \cdot \tilde{D} dS = - \int_{S(t)} p \frac{\dot{\rho}}{\rho} dS = 0,$$

poiché, a causa dell'incomprimibilità,  $\dot{\rho} = 0$ .

Dunque per un fluido perfetto incomprimibile:

$$\Pi_i(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Se invece prendiamo in considerazione un fluido viscoso classico incomprimibile:  $\tilde{T} \cdot \tilde{D} = 2\mu \tilde{D} \cdot \tilde{D}$  con  $\mu \geq 0$  come conseguenza del II assioma della termodinamica. Dunque

$$\Pi_i(t) = -2 \int_{S(t)} \mu \tilde{D} \cdot \tilde{D} \leq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Per un fluido viscoso classico incompressibile le forze interne costituiscono una sollecitazione dissipativa. A tal proposito richiamiamo la seguente definizione:

**Definizione 4.3.** *Si definisce sollecitazione dissipativa una sollecitazione la cui potenza sia ad ogni istante  $\leq 0$ .*

- Mettiamo in evidenza un'ulteriore differenza tra i due tipi di fluidi incompressibili.

Dapprima consideriamo un fluido perfetto incompressibile che ad ogni istante  $t \in [t_0, t_1]$  durante il moto occupi la medesima regione  $S$ , la cui frontiera sia costituita da pareti materiali rigide e fisse. Assumiamo che non siano presenti forze esterne di massa per cui  $\vec{F} = \vec{0}$ .

Ci proponiamo di provare che nelle ipotesi in cui ci siamo posti l'energia cinetica  $T$  si conserva.

Infatti per il teorema dell'energia cinetica abbiamo:

$$\frac{dT}{dt}(t) = \Pi_e(t) + \Pi_i(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad (4.4.7)$$

dove

$$\begin{aligned} \Pi_e(t) &= \int_S \rho \vec{F} \cdot \vec{v} \, dS + \int_{\partial S} \vec{f} \cdot \vec{v} \, d\Sigma \\ &= \int_{\partial S} \vec{f} \cdot \vec{v} \, d\Sigma, \\ \Pi_i(t) &= 0. \end{aligned}$$

Ma

$$\vec{f} \Big|_{\partial S} = \vec{T}(\vec{n}) \Big|_{\partial S} = -p \vec{n} \Big|_{\partial S}$$

da cui

$$\vec{f} \cdot \vec{v} \Big|_{\partial S} = -p \vec{v} \cdot \vec{n} \Big|_{\partial S} = 0$$

poiché le pareti che costituiscono il bordo di  $S$  sono fisse e il fluido è perfetto ( $\vec{v} \cdot \vec{n} \Big|_{\partial S} = 0$ ).

Dalla (4.4.7), grazie ai risultati ottenuti, deduciamo:

$$\frac{dT}{dt} = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

da cui discende la tesi.

Se invece consideriamo un fluido viscoso classico incomprimibile nelle stesse condizioni del fluido perfetto preso in considerazione prima, possiamo provare facilmente che l'energia cinetica risulta una funzione non crescente del tempo.

Sussiste sempre l'equazione (4.4.7) e

$$\begin{aligned}\Pi_e(t) &= \int_{\partial S} \vec{f} \cdot \vec{v} \, d\Sigma, \\ \Pi_i(t) &= -2 \int_S \mu \tilde{D} \cdot \tilde{D} \, dS.\end{aligned}$$

Ma per la condizione di aderenza  $\vec{v}|_{\partial S} = \vec{0}$  e per quanto stabilito in precedenza  $\Pi_i \leq 0$ .

Dunque

$$\frac{dT}{dt} \leq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

da cui discende la tesi.

- Per un fluido perfetto incomprimibile ed omogeneo, grazie al teorema di Kelvin, la circolazione si conserva purché  $\vec{F}$  provenga da un potenziale scalare. Infatti, come abbiamo visto nel capitolo precedente, in tal caso:

$$\dot{\vec{v}} = \text{grad} \left( U_1 - \frac{p}{\rho} \right).$$

Consideriamo ora un fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo per il quale  $\vec{F}$  provenga da un potenziale scalare  $U_1$ . Se dividiamo entrambi i membri dell'equazione di Navier-Stokes per  $\rho$ , e teniamo presenti le ipotesi, deduciamo:

$$\dot{\vec{v}} = \text{grad} \left( U_1 - \frac{p}{\rho} \right) + \nu \Delta \vec{v}.$$

Non è perciò possibile applicare il teorema di Kelvin, a causa della presenza nella relazione scritta sopra del termine  $\nu \Delta \vec{v}$  e dunque la circolazione in genere non si conserva per un fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo soggetto a forze di massa la cui densità provenga da un potenziale scalare.

# Capitolo 5

## Problema ai limiti classico per un fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo

### 5.1 Impostazione del problema.

Consideriamo un fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo. Supponiamo che, pur non essendo in moto stazionario, il fluido occupi una regione dello spazio che sia fissa rispetto all'osservatore. Tale ipotesi è fisicamente ragionevole se teniamo presente che un fluido incomprimibile schematizza un liquido reale. Se assumiamo che l'intervallo di moto sia  $[0, +\infty)$ , avremo dunque:

$$S(t) = S \quad \forall t \in [0, +\infty)$$

con  $S$  chiusura di un dominio regolare dello spazio geometrico.

Inoltre, per l'ipotesi di incomprimibilità ed omogeneità, la densità di massa  $\rho$  è una costante positiva.

Come sappiamo, la prima equazione indefinita della meccanica dei corpi continui, esplicitando la relazione sforzo-deformazione per tale fluido e dividendo entrambi i membri per la costante  $\rho$ , assume la forma:

$$\dot{\vec{v}} = \vec{F} - \text{grad} \frac{p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v}. \quad (5.1.1)$$

Se teniamo presente che

$$\dot{\vec{v}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \vec{v} \cdot \vec{v},$$

e per semplicità indichiamo ancora con  $p$  la pressione divisa per la densità di massa, cioè  $\frac{p}{\rho}$ , la (5.1.1) si scrive nel modo seguente:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{F} - \text{grad } p + \nu \Delta \vec{v}.$$

Il problema ai limiti che considereremo è il seguente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} &= \vec{F} - \text{grad } p + \nu \Delta \vec{v}, \\ \text{div } \vec{v} &= 0 \end{aligned} \quad \text{in } S \times [0, +\infty) \quad (5.1.2)$$

cui associamo le condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned} \vec{v}(P, 0) &= \vec{v}_0(P) \quad \forall P \in S && \text{condizione iniziale,} \\ \vec{v} \Big|_{\partial S \times [0, +\infty)} &= \vec{V} && \text{condizione al contorno,} \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

dove  $\vec{v}_0$  e  $\vec{V}$  sono campi vettoriali assegnati.

Il problema ai limiti classico per un fluido newtoniano incompressibile consiste nel determinare in  $S \times [0, +\infty)$  una coppia  $(\vec{v}, p)$  con  $\vec{v} \in \mathcal{C}^{2,1}(S \times [0, +\infty))$  e  $p \in \mathcal{C}^{1,0}(S \times [0, +\infty))$  che soddisfi le equazioni (5.1.2) in  $S \times [0, +\infty)$  e le condizioni ai limiti (5.1.3).

Ovviamente affinché il problema ammetta soluzione è necessario che il dato iniziale e il dato al contorno soddisfino ad opportune condizioni di regolarità e compatibilità su cui non insistiamo.

In effetti, pur rimanendo sempre nell'ambito delle soluzioni classiche, potremmo anche alleggerire le ipotesi di regolarità su  $\vec{v}$  e  $p$ . Infatti è sufficiente assumere

$$\vec{v} \in \mathcal{C}^{2,1}(\overset{\circ}{S} \times (0, +\infty)) \cap \mathcal{C}^1(S \times [0, +\infty)), p \in \mathcal{C}^{1,0}(\overset{\circ}{S} \times (0, +\infty)) \cap \mathcal{C}(S \times [0, +\infty)).$$

Tuttavia nel seguito, per motivi di convenienza, supporremo verificate le condizioni di regolarità più forti. Premettiamo ora alcuni risultati preliminari.

## 5.2 Risultati preliminari.

Introduciamo la seguente

**Definizione 5.1.** *Diciamo che  $\lambda \in \mathbb{R}$  è un autovalore per il tensore doppio  $\tilde{t}$  se esiste un vettore  $\vec{u} \neq \vec{0}$  tale che*

$$\tilde{t} \cdot \vec{u} = \lambda \vec{u}.$$

*Il vettore  $\vec{u}$  è detto autovettore del tensore  $\tilde{t}$  corrispondente all'autovalore  $\lambda$ .*

Sia  $(\vec{e}_i)$  una base ortonormale per lo spazio vettoriale  $\vec{\mathcal{E}}$  e sia  $[t_{ij}]$  la matrice  $3 \times 3$  delle componenti del tensore  $\tilde{t}$  rispetto alla base  $(\vec{e}_i)$ .

Ovviamente

$$\tilde{t} \cdot \vec{u} = \lambda \vec{u} \iff t_{ij} u_j = \lambda u_i.$$

Ne discende la seguente

**Proposizione 5.1.** *Dato il tensore doppio  $\tilde{t}$ ,  $\lambda$  è un autovalore per  $\tilde{t}$  se e solo se è un autovalore per la matrice  $[t_{ij}]$  delle componenti del tensore rispetto ad una base ortonormale  $(\vec{e}_i)$  e  $\vec{u}$  è un autovettore del tensore  $\tilde{t}$  corrispondente all'autovalore  $\lambda$  se e solo se la terna  $(u_1, u_2, u_3)$  delle componenti di  $\vec{u}$  rispetto ad  $(\vec{e}_i)$  è un autovettore della matrice  $[t_{ij}]$  corrispondente all'autovalore  $\lambda$ .*

Tenendo presente la legge con cui variano le componenti di un tensore doppio e quelle di un vettore al variare della base, è facile provare che autovalori ed autovettori di un tensore doppio sono indipendenti dalla base utilizzata per determinarli. Dunque la ricerca degli autovalori e degli autovettori di un tensore doppio è ricondotta alla ricerca degli autovalori e degli autovettori della matrice  $3 \times 3$  delle sue componenti rispetto ad una base ortonormale fissata.

Proviamo ora il seguente

**Teorema 5.1.** *Sia  $\tilde{S}$  un tensore simmetrico del II ordine. Allora esso ammette tre autovalori (reali):  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  ed è sempre possibile trovare una base ortonormale di  $\vec{\mathcal{E}}$  formata da autovettori corrispondenti agli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .*

#### Dimostrazione

Fissata la base ortonormale  $(\vec{e}_i)$ , al tensore  $\tilde{S}$  è associata la matrice delle sue componenti  $[S_{ij}]$ , che è una matrice  $3 \times 3$  reale e simmetrica. Per un noto teorema di algebra lineare tale matrice ha tre autovalori reali:  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  e dunque per la proposizione precedente anche il tensore  $\tilde{S}$  possiede gli stessi autovalori.

Inoltre, sempre per risultati noti sulle matrici, indicata con  $(E_1, E_2, E_3)$  la base canonica di  $\mathbb{R}^3$ , è possibile trovare un'altra base ortonormale  $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$  di  $\mathbb{R}^3$  formata da tre autovettori della matrice  $[S_{ij}]$  corrispondenti agli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .

Se  $(\alpha_{1h}, \alpha_{2h}, \alpha_{3h})$  è la terna delle componenti canoniche di  $\vec{E}_h$  ( $h = 1, 2, 3$ ), la terna  $(\vec{e}_h)$  di vettori di  $\vec{\mathcal{E}}$  tali che

$$\vec{e}_h = \alpha_{ih} \vec{e}_i \quad h = 1, 2, 3$$

è una base ortonormale per  $\vec{\mathcal{E}}$  e per la proposizione 5.1 i tre vettori  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  sono autovettori di  $\tilde{S}$  corrispondenti agli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .

Il teorema è così dimostrato.

Stabiliamo ora due lemmi che ci saranno utili nel paragrafo successivo.

Sia  $\tilde{S}$  un tensore doppio simmetrico. Come sappiamo, questo ammette tre autovalori:  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .

Poniamo

$$\lambda_{\min} = \min\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}.$$

Dimostriamo il seguente

**Lemma 5.1.** *Dato il tensore doppio simmetrico  $\tilde{S}$ , si ha:*

$$\vec{u} \cdot \tilde{S} \cdot \vec{u} \geq \lambda_{\min} |\vec{u}|^2 \quad \forall \vec{u} \in \mathcal{E}.$$

Dimostrazione

Grazie al teorema 5.1, è possibile trovare una base ortonormale  $(\vec{e}_h)$  formata da autovettori di  $\tilde{S}$  corrispondenti ai tre autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , cioè tale che

$$\tilde{S} \cdot \vec{e}_h = \lambda_h \vec{e}_h \quad h = 1, 2, 3.$$

Preso un vettore  $\vec{u} \in \mathcal{E}$ , decomponiamolo rispetto alla base  $(\vec{e}_h)$  per cui:

$$\vec{u} = \sum_{h=1}^3 \bar{u}_h \vec{e}_h.$$

Consideriamo ora

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \tilde{S} \cdot \vec{u} &= \vec{u} \cdot \tilde{S} \cdot \sum_{h=1}^3 \bar{u}_h \vec{e}_h = \vec{u} \cdot \sum_{h=1}^3 \bar{u}_h (\tilde{S} \cdot \vec{e}_h) = \\ &= \vec{u} \cdot \sum_{h=1}^3 \bar{u}_h \lambda_h \vec{e}_h = \vec{u} \cdot (\lambda_1 \bar{u}_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \bar{u}_3 \vec{e}_3) = \\ &= \lambda_1 \bar{u}_1 (\vec{u} \cdot \vec{e}_1) + \lambda_2 \bar{u}_2 (\vec{u} \cdot \vec{e}_2) + \lambda_3 \bar{u}_3 (\vec{u} \cdot \vec{e}_3) = \\ &= \lambda_1 \bar{u}_1^2 + \lambda_2 \bar{u}_2^2 + \lambda_3 \bar{u}_3^2 \geq \lambda_{\min} (\bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2 + \bar{u}_3^2) = \lambda_{\min} |\vec{u}|^2. \end{aligned}$$

Il lemma è così dimostrato.

Proviamo un secondo lemma.

**Lemma 5.2.** *Sia  $S$  la chiusura di un dominio regolare di  $\mathcal{E}$  e siano  $\vec{w}, \beta$  un campo vettoriale e un campo scalare definiti in  $S$ . Se sono soddisfatte le condizioni seguenti:*

- $\vec{w}, \beta \in \mathcal{C}^1(S)$ ;

- $\operatorname{div} \vec{w} = 0$  in  $S$ ;
- $\vec{w}|_{\partial S} = \vec{0}$  o  $\beta|_{\partial S} = 0$ ,

allora:

$$\int_S \operatorname{grad} \beta \cdot \vec{w} \, dS = 0.$$

#### Dimostrazione

In primo luogo osserviamo che per una nota proprietà dell'operatore divergenza si ha in  $S$ :

$$\operatorname{div}(\beta \vec{w}) = \beta \operatorname{div} \vec{w} + \operatorname{grad} \beta \cdot \vec{w},$$

ma per ipotesi

$$\operatorname{div} \vec{w} = 0 \quad \text{in } S$$

per cui la relazione precedente si riduce a:

$$\operatorname{div}(\beta \vec{w}) = \operatorname{grad} \beta \cdot \vec{w}.$$

Integrando su  $S$  e applicando il teorema della divergenza, otteniamo:

$$\int_S \operatorname{grad} \beta \cdot \vec{w} \, dS = \int_S \operatorname{div}(\beta \vec{w}) \, dS = \int_{\partial S} \beta \vec{w} \cdot \vec{n} \, d\Sigma = 0,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato la terza ipotesi del lemma.

Il lemma è così dimostrato.

Osserviamo che il lemma continua a valere anche se  $\vec{w}, \beta \in \mathcal{C}^1(\overset{\circ}{S}) \cap \mathcal{C}(S)$  e  $\operatorname{div} \vec{w} = 0$  in  $\overset{\circ}{S}$ .

### 5.3 Teorema di unicità.

In questo paragrafo ci proponiamo di stabilire un teorema di unicità della soluzione del problema ai limiti (5.1.2), (5.1.3), considerato nel §5.1, che richiamiamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \vec{v} \cdot \vec{v} &= \vec{F} - \operatorname{grad} p + \nu \Delta \vec{v}, \\ \operatorname{div} \vec{v} &= 0 && \text{in } S \times [0, +\infty), \\ \vec{v}(P, 0) &= \vec{v}_0(P) && \forall P \in S, \\ \vec{v} \Big|_{\partial S \times [0, +\infty)} &= \vec{V}. \end{aligned}$$

**Teorema 5.2.** *Se  $(\vec{v}_1, p_1)$  e  $(\vec{v}_2, p_2)$  sono due soluzioni dello stesso problema ai limiti (5.1.2), (5.1.3), allora:*

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2, \quad p_1 = p_2 + \alpha(t) \quad \text{in } S \times [0, +\infty), \quad (5.3.1)$$

dove  $\alpha(t)$  è una funzione arbitraria del tempo.

Dimostrazione

Poiché  $(\vec{v}_1, p_1)$  è soluzione del problema (5.1.2), (5.1.3), avremo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \text{grad } \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 &= \vec{F} - \text{grad } p_1 + \nu \Delta \vec{v}_1, \\ \text{div } \vec{v}_1 &= 0, \\ \vec{v}_1(P, 0) &= \vec{v}_0(P) \quad \forall P \in S, \\ \vec{v}_1 \Big|_{\partial S \times [0, +\infty)} &= \vec{V}. \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Analogamente per  $(\vec{v}_2, p_2)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}_2}{\partial t} + \text{grad } \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 &= \vec{F} - \text{grad } p_2 + \nu \Delta \vec{v}_2, \\ \text{div } \vec{v}_2 &= 0, \\ \vec{v}_2(P, 0) &= \vec{v}_0(P) \quad \forall P \in S, \\ \vec{v}_2 \Big|_{\partial S \times [0, +\infty)} &= \vec{V}. \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

Poniamo:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \quad \alpha = p_1 - p_2. \quad (5.3.4)$$

Se sottraiamo membro a membro dalle equazioni (5.3.2) le corrispondenti (5.3.3) e usiamo le (5.3.4), otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 - \text{grad } \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 &= -\text{grad } \alpha + \nu \Delta \vec{v}, \\ \text{div } \vec{v} &= 0, \\ \vec{v}(P, 0) &= \vec{0} \quad \forall P \in S, \\ \vec{v} \Big|_{\partial S \times [0, +\infty)} &= \vec{0}. \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

D'altra parte, per la posizione fatta, abbiamo:

$$\vec{v}_1 = \vec{v} + \vec{v}_2. \quad (5.3.6)$$

Consideriamo ora nella prima equazione delle (5.3.5) il termine:

$$\text{grad } \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1$$

e sostituiamo a  $\vec{v}_1$  in  $\text{grad } \vec{v}_1$  l'espressione data dalla (5.3.6):

$$\text{grad } \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}_1 + \text{grad } \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1.$$

Allora la prima delle (5.3.5) assume la forma:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}_1 + \text{grad } \vec{v}_2 \cdot \vec{v} = -\text{grad } \alpha + \nu \Delta \vec{v}. \quad (5.3.7)$$

Moltiplichiamo scalarmente entrambi i membri della (5.3.7) per  $\vec{v}$ :

$$\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}_1 + \vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v}_2 \cdot \vec{v} = -\text{grad } \alpha \cdot \vec{v} + \nu \Delta \vec{v} \cdot \vec{v}. \quad (5.3.8)$$

Consideriamo separatamente i vari termini della (5.3.8).

Dapprima osserviamo che:

$$\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\vec{v}|^2. \quad (5.3.9)$$

Esaminiamo ora il termine:

$$\vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}_1.$$

Se denotiamo con  $(v_i^{(1)})$  e  $((\text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}_1)_i)$  le successioni delle componenti di  $\vec{v}_1$  e  $\text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}_1$  rispettivamente rispetto alla base  $(\vec{e}_i)$  del riferimento associato all'osservatore, avremo:

$$(\text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}_1)_i = v_{i,j} v_j^{(1)}.$$

(Ovviamente abbiamo adottato la convenzione della somma sugli indici ripetuti).

Otteniamo allora

$$\vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}_1 = v_i v_{i,j} v_j^{(1)}. \quad (5.3.10)$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned} v_i v_{i,j} &= v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_j} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_j} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_j} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial |\vec{v}|^2}{\partial x_j} = \frac{1}{2} |\vec{v}|_{,j}^2. \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

Poiché  $\frac{1}{2} |\vec{v}|_{,j}^2$  è la  $j$ -esima componente di  $\text{grad} \frac{|\vec{v}|^2}{2}$ , sostituendo il risultato trovato nella (5.3.10), arriviamo a

$$\vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v} \cdot \vec{v}_1 = \text{grad} \frac{|\vec{v}|^2}{2} \cdot \vec{v}_1. \quad (5.3.12)$$

Prendiamo ora in esame:

$$\vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v}_2 \cdot \vec{v} = v_i v_{i,j}^{(2)} v_j. \quad (5.3.13)$$

(Ovviamente denotiamo con  $(v_i^{(2)})$  la successione delle componenti di  $\vec{v}_2$ ).  
Se teniamo presente che

$$\text{grad} \vec{v}_2 = \tilde{D}_2 + \tilde{E}_2$$

con

$$\tilde{D}_2 = \frac{1}{2}(\text{grad} \vec{v}_2 + \text{grad}^T \vec{v}_2), \quad \tilde{E}_2 = \frac{1}{2}(\text{grad} \vec{v}_2 - \text{grad}^T \vec{v}_2),$$

la (5.3.13) diventa:

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v}_2 \cdot \vec{v} &= (D_{ij}^{(2)} + E_{ij}^{(2)}) v_i v_j \\ &= D_{ij}^{(2)} v_i v_j \\ &= \vec{v} \cdot \tilde{D}_2 \cdot \vec{v}, \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

poichè la contrazione di due indici di emisimmetria con due di simmetria dà come risultato 0. Ovviamente abbiamo denotato con  $(D_{ij}^{(2)})$  e  $(E_{ij}^{(2)})$  le successioni delle componenti di  $\tilde{D}_2$  e  $\tilde{E}_2$ .

Consideriamo poi

$$\Delta \vec{v} \cdot \vec{v} = v_{i,jj} v_i = (v_{i,j} v_i)_{,j} - v_{i,j} v_{i,j}. \quad (5.3.15)$$

D'altra parte:

$$(v_{i,j} v_i)_{,j} = (\vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v})_{j,j} = \text{div}(\vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v})$$

ed inoltre

$$v_{i,j} v_{i,j} = \text{grad} \vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v} = |\text{grad} \vec{v}|^2.$$

Dunque la (5.3.15) assume la forma:

$$\Delta \vec{v} \cdot \vec{v} = \text{div}(\vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v}) - |\text{grad} \vec{v}|^2. \quad (5.3.16)$$

A questo punto, se andiamo a sostituire nella (5.3.8) i risultati ottenuti in (5.3.9), (5.3.12), (5.3.14), (5.3.16) arriviamo alla seguente equazione:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\vec{v}|^2 + \text{grad} \frac{|\vec{v}|^2}{2} \cdot \vec{v}_1 + \vec{v} \cdot \tilde{D}_2 \cdot \vec{v} = \\ = -\text{grad} \alpha \cdot \vec{v} + \nu \text{div}(\vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v}) - \nu |\text{grad} \vec{v}|^2. \end{aligned} \quad (5.3.17)$$

Ora, fissato ad arbitrio  $t \in [0, +\infty)$ , integriamo entrambi i membri della (5.3.17), valutati all'istante  $t$  su  $S$ :

$$\begin{aligned} \int_S \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\vec{v}|^2 + \text{grad} \frac{|\vec{v}|^2}{2} \cdot \vec{v}_1 + \vec{v} \cdot \tilde{D}_2 \cdot \vec{v} \right] dS = \\ = \int_S [-\text{grad} \alpha \cdot \vec{v} + \nu \text{div}(\vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v}) - \nu |\text{grad} \vec{v}|^2] dS. \end{aligned} \quad (5.3.18)$$

La (5.3.18) si può poi scrivere nella forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_S |\vec{v}|^2 dS \right) + \int_S \text{grad} \frac{|\vec{v}|^2}{2} \cdot \vec{v}_1 dS + \int_S \vec{v} \cdot \tilde{D}_2 \cdot \vec{v} dS = \\ = - \int_S \text{grad} \alpha \cdot \vec{v} dS + \nu \int_S \text{div}(\vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v}) dS - \nu \int_S |\text{grad} \vec{v}|^2 dS, \end{aligned} \quad (5.3.19)$$

equazione che sussiste  $\forall t \in [0, +\infty)$ .

D'altra parte, per il lemma 5.2

$$\int_S \text{grad} \frac{|\vec{v}|^2}{2} \cdot \vec{v}_1 dS = 0, \quad \int_S \text{grad} \alpha \cdot \vec{v} dS = 0 \quad \forall t \in [0, +\infty)$$

ed inoltre per il teorema della divergenza e la condizione al contorno cui soddisfa il campo  $\vec{v}$

$$\int_S \text{div}(\vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v}) dS = \int_{\partial S} (\vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v}) \cdot \vec{n} d\Sigma = 0 \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

Perciò la (5.3.19) si riduce a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_S |\vec{v}|^2 dS \right) = \\ = - \int_S \vec{v} \cdot \tilde{D}_2 \cdot \vec{v} dS - \nu \int_S |\text{grad} \vec{v}|^2 dS \quad \forall t \in [0, +\infty). \end{aligned} \quad (5.3.20)$$

Ma, tenendo presente che

$$\nu = \text{costante} > 0, \quad |\text{grad} \vec{v}|^2 \geq 0 \quad \text{in } S \times [0, +\infty),$$

abbiamo:

$$\nu \int_S |\text{grad } \vec{v}|^2 dS \geq 0 \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

Allora la (5.3.20) fornisce la seguente disuguaglianza:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_S |\vec{v}|^2 dS \right) \leq - \int_S \vec{v} \cdot \tilde{D}_2 \cdot \vec{v} dS \quad \forall t \in [0, +\infty). \quad (5.3.21)$$

A questo punto rivolgiamo la nostra attenzione al campo tensoriale  $\tilde{D}_2$ .

Osserviamo che  $\forall (P, t) \in S \times [0, +\infty)$  il tensore doppio  $\tilde{D}_2(P, t)$  è simmetrico e dunque ammette tre autovalori (reali):  $\lambda_1(P, t)$ ,  $\lambda_2(P, t)$ ,  $\lambda_3(P, t)$ .

Fissati ad arbitrio  $P \in S$  e  $t \in [0, +\infty)$ , poniamo:

$$\lambda_{\min}(P, t) = \min\{\lambda_1(P, t), \lambda_2(P, t), \lambda_3(P, t)\}.$$

Per il lemma 5.1 abbiamo:

$$\vec{v}(P, t) \cdot \tilde{D}_2(P, t) \cdot \vec{v}(P, t) \geq \lambda_{\min}(P, t) |\vec{v}(P, t)|^2 \quad \forall (P, t) \in S \times [0, +\infty). \quad (5.3.22)$$

D'altra parte, per la condizione di incomprimibilità, si ha che  $\text{tr } \tilde{D}_2 = \text{div } \vec{v}_2 = 0$  in  $S \times [0, +\infty)$ . Poiché è facile provare che, se una matrice reale e simmetrica ha traccia nulla, il suo autovalore più piccolo è minore o uguale a zero, deduciamo:

$$\lambda_{\min}(P, t) \leq 0 \quad \forall (P, t) \in S \times [0, +\infty).$$

E' allora conveniente porre:

$$\lambda_{\min}(P, t) = -\gamma(P, t), \quad \gamma(P, t) \geq 0 \quad \forall (P, t) \in S \times [0, +\infty)$$

e perciò la (5.3.22) assume la forma:

$$\vec{v}(P, t) \cdot \tilde{D}_2(P, t) \cdot \vec{v}(P, t) \geq -\gamma(P, t) |\vec{v}(P, t)|^2 \quad \forall (P, t) \in S \times [0, +\infty),$$

da cui discende:

$$-\vec{v}(P, t) \cdot \tilde{D}_2(P, t) \cdot \vec{v}(P, t) \leq \gamma(P, t) |\vec{v}(P, t)|^2 \quad \forall (P, t) \in S \times [0, +\infty). \quad (5.3.23)$$

Fissiamo poi ad arbitrio  $\bar{t} \in [0, +\infty)$  e poniamo

$$h = 2 \sup_{S \times [0, \bar{t}]} \gamma(P, t).$$

Osserviamo che  $h \geq 0$  perché  $\gamma(P, t) \geq 0 \quad \forall (P, t) \in S \times [0, +\infty)$ .

Inoltre possiamo mostrare che  $h < +\infty$  perché, essendo  $\vec{v}_2 \in \mathcal{C}^{2,1}(S \times [0, +\infty))$

per definizione di soluzione,  $\vec{v}_2 \in \mathcal{C}^1(S \times [0, \bar{t}])$  e dunque  $\tilde{D}_2 \in \mathcal{C}(S \times [0, \bar{t}])$ . Infatti, fissiamo  $(P, t) \in S \times [0, \bar{t}]$  e sia  $\vec{e}(P, t)$  autovettore con modulo unitario di  $\tilde{D}_2(P, t)$  corrispondente a  $\lambda_{\min}(P, t)$ . Dunque

$$\tilde{D}_2(P, t) \cdot \vec{e}(P, t) = \lambda_{\min}(P, t) \vec{e}(P, t),$$

da cui

$$|\tilde{D}_2(P, t) \cdot \vec{e}(P, t)| = |\lambda_{\min}(P, t)| = \gamma(P, t).$$

D'altra parte si potrebbe provare che se  $\tilde{t}$  è un tensore doppio e  $\vec{u}$  un vettore si ha:

$$|\tilde{t} \cdot \vec{u}| \leq |\tilde{t}| |\vec{u}|.$$

Allora

$$\forall (P, t) \in S \times [0, \bar{t}] \quad \gamma(P, t) \leq |\tilde{D}_2(P, t)|.$$

Poiché  $\tilde{D}_2 \in \mathcal{C}(S \times [0, \bar{t}])$ , le sue componenti e di conseguenza la sua norma sono limitate in  $S \times [0, \bar{t}]$ . Perciò

$$\sup_{S \times [0, \bar{t}]} \gamma(P, t) < +\infty$$

e quindi  $h < +\infty$ .

Con la posizione fatta, dalla (5.3.23) discende:

$$-\vec{v}(P, t) \cdot \tilde{D}_2(P, t) \cdot \vec{v}(P, t) \leq \frac{h}{2} |\vec{v}(P, t)|^2 \quad \forall (P, t) \in S \times [0, \bar{t}]. \quad (5.3.24)$$

Allora dalla (5.3.21), tenendo presente la (5.3.24), deduciamo la seguente disuguaglianza:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_S |\vec{v}|^2 dS \right) \leq \frac{h}{2} \int_S |\vec{v}|^2 dS \quad \forall t \in [0, \bar{t}],$$

ossia

$$\frac{d}{dt} \left( \int_S |\vec{v}|^2 dS \right) \leq h \int_S |\vec{v}|^2 dS \quad \forall t \in [0, \bar{t}]. \quad (5.3.25)$$

Se poniamo:

$$\|\vec{v}\|^2(t) = \int_S |\vec{v}(P, t)|^2 dS,$$

la (5.3.25) si scrive nella forma:

$$\frac{d}{dt} (\|\vec{v}\|^2(t)) \leq h \|\vec{v}\|^2(t) \quad \forall t \in [0, \bar{t}]. \quad (5.3.26)$$

Se moltiplichiamo entrambi i membri della (5.3.26) per  $e^{-ht}$ , otteniamo:

$$e^{-ht} \frac{d}{dt} (\|\vec{v}\|^2(t)) - h e^{-ht} \|\vec{v}\|^2(t) \leq 0 \quad \forall t \in [0, \bar{t}],$$

da cui

$$\frac{d}{dt} [e^{-ht} \|\vec{v}\|^2(t)] \leq 0 \quad \forall t \in [0, \bar{t}]. \quad (5.3.27)$$

Dalla (5.3.27) deduciamo che la funzione  $e^{-ht} \|\vec{v}\|^2(t)$  è una funzione del tempo non crescente in  $[0, \bar{t}]$ .

All'istante  $\bar{t}$  si ha perciò

$$e^{-h\bar{t}} \|\vec{v}\|^2(\bar{t}) \leq \|\vec{v}\|^2(0). \quad (5.3.28)$$

Ma  $\vec{v}$  soddisfa alla condizione iniziale

$$\vec{v}(P, 0) = \vec{0} \quad \forall P \in S,$$

da cui

$$\|\vec{v}\|^2(0) = \int_S |\vec{v}(P, 0)|^2 dS = 0.$$

Dunque la (5.3.28) si riduce a

$$e^{-h\bar{t}} \|\vec{v}\|^2(\bar{t}) \leq 0 \quad \implies \quad \|\vec{v}\|^2(\bar{t}) = 0.$$

Otteniamo perciò:

$$\int_S |\vec{v}(P, \bar{t})|^2 dS = 0 \quad \implies \quad |\vec{v}(P, \bar{t})|^2 = 0 \quad \forall P \in S,$$

da cui:

$$\vec{v}(P, \bar{t}) = \vec{0} \quad \forall P \in S.$$

Poiché  $\bar{t}$  è arbitrario in  $[0, +\infty)$ , concludiamo che

$$\vec{v}(P, t) = \vec{0} \quad \forall (P, t) \in S \times [0, +\infty)$$

e dunque:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \quad \text{in } S \times [0, +\infty).$$

Per completare la dimostrazione del teorema di unicità ci resta da provare che  $\alpha = \alpha(P, t)$  risulta una funzione arbitraria del tempo.

Dall'equazione (5.3.7), tenendo presente che  $\vec{v}(P, t) = \vec{0} \quad \forall (P, t) \in S \times [0, +\infty)$ , otteniamo:

$$\text{grad } \alpha = \vec{0} \quad \forall (P, t) \in S \times [0, +\infty),$$

da cui deduciamo che  $\alpha$  non dipende da  $P$  ed è una funzione arbitraria del tempo.

Il teorema è così dimostrato in maniera completa.

Nel prossimo paragrafo stabiliremo un teorema di stabilità per il problema ai limiti (5.1.2), (5.1.3), nell'ipotesi che le forze di massa provengano da un potenziale scalare e che il bordo di  $S$  sia fisso.

## 5.4 Teorema di stabilità.

Supponiamo ancora di avere un fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo che durante il moto occupi la regione  $S$  che non varia al trascorrere del tempo.

Assumiamo inoltre che la densità delle forze esterne di massa  $\vec{F}$  provenga dal potenziale scalare  $U_1$ .

Ovviamente abbiamo:  $\rho = \text{costante}$  positiva.

Le equazioni che governano il moto del fluido sono dunque:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} &= \text{grad} \left( U_1 - \frac{p}{\rho} \right) + \nu \Delta \vec{v}, \\ \text{div } \vec{v} &= 0 \end{aligned} \quad \text{in } S \times [0, +\infty) \quad (5.4.1)$$

cui associamo le condizioni ai limiti (5.1.3) con  $\vec{V} = \vec{0}$ .  
Se introduciamo la pressione modificata  $p^*$  così definita

$$p^* = \frac{p}{\rho} - U_1$$

e la sostituiamo nella (5.4.1), il problema ai limiti che considereremo è il seguente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} &= -\text{grad } p^* + \nu \Delta \vec{v}, \\ \text{div } \vec{v} &= 0 \end{aligned} \quad \text{in } S \times [0, +\infty) \quad (5.4.2)$$

$$\vec{v}(P, 0) = \vec{v}_0(P) \quad \forall P \in S, \quad \vec{v} \Big|_{\partial S \times [0, +\infty)} = \vec{0}. \quad (5.4.3)$$

Dimostriamo il seguente

**Teorema 5.3.** *Se  $(\vec{v}, p^*)$  è soluzione del problema (5.4.2), (5.4.3), allora*

$$\|\vec{v}\|(t) \leq e^{-kt} \|\vec{v}_0\| \quad \forall t \in [0, +\infty)$$

dove  $k = k(S, \nu)$  è una costante positiva.

Dimostrazione

Moltiplichiamo scalarmente entrambi i membri della prima delle (5.4.2) per  $\vec{v}$  ottenendo così:

$$\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} = -\text{grad } p^* \cdot \vec{v} + \nu \Delta \vec{v} \cdot \vec{v} \quad \text{in } S \times [0, +\infty). \quad (5.4.4)$$

Consideriamo singolarmente i termini della (5.4.4).

In primo luogo abbiamo

$$\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\vec{v}|^2. \quad (5.4.5)$$

Se poi si tiene presente il risultato ottenuto nel teorema di unicità per il termine:  $\vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}_1$ , otteniamo:

$$\vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} = \text{grad } \frac{|\vec{v}|^2}{2} \cdot \vec{v}. \quad (5.4.6)$$

Sempre per il risultato ottenuto nel teorema di unicità, abbiamo:

$$\Delta \vec{v} \cdot \vec{v} = \text{div}(\vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v}) - |\text{grad } \vec{v}|^2. \quad (5.4.7)$$

Se sostituiamo nella (5.4.4) i risultati di (5.4.5), (5.4.6), (5.4.7) e integriamo su  $S$  l'equazione risultante, otteniamo  $\forall t \in [0, +\infty)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_S |\vec{v}|^2 dS \right) + \int_S \text{grad } \frac{|\vec{v}|^2}{2} \cdot \vec{v} dS \\ &= - \int_S \text{grad } p^* \cdot \vec{v} dS + \nu \int_S \text{div}(\vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v}) dS - \nu \int_S |\text{grad } \vec{v}|^2 dS. \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

Ma il secondo integrale al I membro così come il primo integrale al II membro della (5.4.8) sono nulli per il lemma 5.2, mentre il secondo integrale al II membro è nullo per il teorema della divergenza e per il fatto che  $\vec{v}$  è nullo sul bordo di  $S$  ad ogni istante.

Dunque la (5.4.8) si riduce a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_S |\vec{v}|^2 dS \right) = -\nu \int_S |\text{grad } \vec{v}|^2 dS \quad \forall t \in [0, +\infty). \quad (5.4.9)$$

Richiamiamo ora (senza dimostrarla) una disuguaglianza che svolge un ruolo importante in Fisica Matematica, **la disuguaglianza di Poincaré**.

**Proposizione 5.2.** *Sia  $S$  la chiusura di un dominio regolare e sia  $\vec{u} = \vec{u}(P)$  una campo vettoriale di classe  $\mathcal{C}^1(S)$  tale che  $\vec{u}|_{\partial S} = \vec{0}$ . Allora*

$$\int_S |\vec{u}|^2 dS \leq \gamma \int_S |\text{grad } \vec{u}|^2 dS,$$

dove  $\gamma$  è una costante positiva dipendente solo dalla geometria, cioè  $\gamma = \gamma(S)$ , detta *costante di Poincaré*.

Ritorniamo ora alla dimostrazione del teorema, applicando la disuguaglianza di Poincaré al campo  $\vec{v}(\cdot, t)$  dove  $t$  è un istante arbitrario fissato in  $[0, +\infty)$ . E' immediato verificare che per ogni  $t$  fissato il campo  $\vec{v}(\cdot, t)$  soddisfa alle ipotesi della proposizione appena enunciata per cui possiamo scrivere:

$$\int_S |\vec{v}(P, t)|^2 dS \leq \gamma \int_S |\text{grad } \vec{v}(P, t)|^2 dS \quad \forall t \in [0, +\infty)$$

da cui

$$\int_S |\text{grad } \vec{v}|^2 dS \geq \frac{1}{\gamma} \int_S |\vec{v}|^2 dS \quad \text{in } [0, +\infty). \quad (5.4.10)$$

Se allora sostituiamo la disuguaglianza (5.4.10) nella (5.4.9), otteniamo:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_S |\vec{v}|^2 dS \right) \leq -\frac{\nu}{\gamma} \int_S |\vec{v}|^2 dS \quad \forall t \in [0, +\infty),$$

ossia

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_S |\vec{v}|^2 dS \right) + \frac{\nu}{\gamma} \int_S |\vec{v}|^2 dS \leq 0 \quad \forall t \in [0, +\infty). \quad (5.4.11)$$

Se poniamo  $k = \frac{\nu}{\gamma}$ , la (5.4.11) si scrive nella forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_S |\vec{v}|^2 dS \right) + 2k \int_S |\vec{v}|^2 dS \leq 0 \quad \forall t \in [0, +\infty). \quad (5.4.12)$$

Moltiplichiamo ora entrambi i membri della (5.4.12) per  $e^{2kt}$  per cui deduciamo:

$$e^{2kt} \frac{d}{dt} \left( \int_S |\vec{v}|^2 dS \right) + 2k e^{2kt} \int_S |\vec{v}|^2 dS \leq 0 \quad \forall t \in [0, +\infty),$$

da cui

$$\frac{d}{dt} [e^{2kt} \|\vec{v}\|^2(t)] \leq 0 \quad \forall t \in [0, +\infty). \quad (5.4.13)$$

Dalla (5.4.13) discende che la funzione  $e^{2kt} \|\vec{v}\|^2(t)$  è una funzione del tempo non crescente.

Dunque

$$e^{2kt} \|\vec{v}\|^2(t) \leq \|\vec{v}\|^2(0) \implies \|\vec{v}\|^2(t) \leq e^{-2kt} \|\vec{v}\|^2(0) \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

D'altra parte

$$\|\vec{v}\|^2(0) = \int_S |\vec{v}(P, 0)|^2 dS = \int_S |\vec{v}_0(P)|^2 dS = \|\vec{v}_0\|^2.$$

L'ultima disuguaglianza fornisce così

$$\|\vec{v}\|^2(t) \leq e^{-2kt} \|\vec{v}_0\|^2 \implies \|\vec{v}\|(t) \leq e^{-kt} \|\vec{v}_0\| \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

Il teorema di stabilità è dunque provato.

Tale teorema è detto di *stabilità* perché la norma in  $L^2(S)$  di  $\vec{v}(\cdot, t)$  decresce esponenzialmente al trascorrere del tempo e tende a zero per  $t \rightarrow +\infty$ .

# Capitolo 6

## Moto di Poiseuille e di Poiseuille-Couette per un fluido newtoniano incomprimibile

### 6.1 Premesse.

Consideriamo un fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo in moto stazionario dal punto di vista meccanico per cui

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad S(t) = S, \quad \vec{v} = \vec{v}(P), \quad \vec{F} = \vec{F}(P), \quad p = p(P).$$

Poiché  $\vec{v}$  non dipende da  $t$ , si ha:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \implies \dot{\vec{v}} = \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}.$$

Allora il moto stazionario di un fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo è governato dal sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} &= \vec{F} - \text{grad } p + \nu \Delta \vec{v}, \\ \text{div } \vec{v} &= 0 \end{aligned} \quad \text{in } S. \quad (6.1.1)$$

Nelle equazioni scritte sopra non compare il tempo e dunque al sistema non associamo condizioni iniziali, ma solo condizioni al contorno.

Se assumiamo che  $\partial S$  sia composto da pareti materiali rigide, possiamo imporre la condizione di aderenza:

$$\vec{v} \Big|_{\partial S} = \vec{V}, \quad (6.1.2)$$

con  $\vec{V} = \vec{V}(P)$  atto di moto delle pareti che costituiscono  $\partial S$ .

Risolvere il problema al contorno (6.1.1), (6.1.2) significa determinare le coppie  $(\vec{v}, p)$  dove  $\vec{v}$  e  $p$  sono campi definiti su  $S$ ,  $\vec{v} \in \mathcal{C}^2(S)$ ,  $p \in \mathcal{C}^1(S)$ ,  $(\vec{v}, p)$  è soluzione del sistema (6.1.1) e  $\vec{v}$  soddisfa alla condizione al contorno (6.1.2).

Osserviamo che nell'equazione (6.1.1)<sub>1</sub> compare il termine non lineare  $\text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}$  per cui risolvere il problema (6.1.1), (6.1.2) in forma chiusa, cioè esplicitare la soluzione esprimendola mediante funzioni elementari, è piuttosto difficile. Tuttavia, se la geometria della regione  $S$  è particolarmente semplice o ha particolari proprietà di simmetria oppure se si cerca il campo della velocità in una forma opportuna è possibile determinare soluzioni del problema (6.1.1) in forma chiusa o comunque ottenibili numericamente. Si parla in questo caso di **soluzioni esatte**.

Nei paragrafi successivi, così come nei due capitoli successivi, vedremo alcuni esempi di soluzioni esatte.

## 6.2 Moto di Poiseuille tra due piani paralleli.

Sia dato un fluido newtoniano, incompressibile ed omogeneo che occupa la regione compresa tra due piani  $\Pi_1, \Pi_2$  paralleli, rigidi, fissi rispetto ad un osservatore (vedi Figura 6.1).

Supponiamo che sul fluido non agiscano forze esterne di massa e che nella regione  $S$  compresa tra i due piani, occupata dal fluido, il moto sia stazionario dal punto di vista meccanico.

Le equazioni che governano tale moto sono dunque:

$$\begin{aligned} \rho \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} &= \mu \Delta \vec{v} - \text{grad } p, \\ \text{div } \vec{v} &= 0 \end{aligned} \quad \text{in } S \quad (6.2.1)$$

con le condizioni al contorno:

$$\vec{v} \Big|_{\Pi_1} = \vec{0}, \quad \vec{v} \Big|_{\Pi_2} = \vec{0}. \quad (6.2.2)$$

Sia  $2h$  la distanza tra i due piani (con  $h$  costante positiva) e il riferimento associato all'osservatore sia quello in Figura 6.1: l'origine  $O$  è un punto equidistante dai due piani, l'asse  $Ox_1$  è parallelo ai due piani,  $Ox_2$  normale ai due piani e  $Ox_3$  orientato di conseguenza. Si ha perciò:

$$\Pi_\alpha = \left\{ P(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E} : (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2, x_2 = (-1)^\alpha h \right\} \quad \alpha = 1, 2.$$

Inoltre:

$$S = \left\{ P(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E} : (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2, x_2 \in [-h, h] \right\}.$$

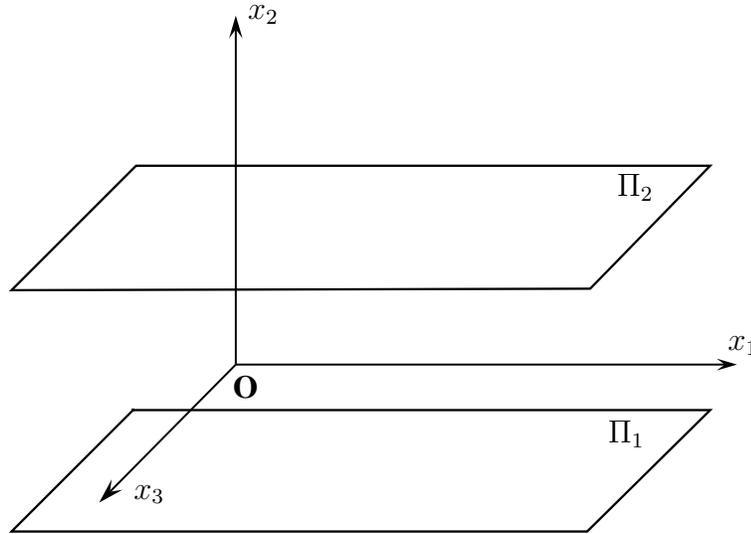


Figura 6.1: Geometria del problema

Un **moto di Poiseuille** (stazionario) tra i due piani è una soluzione  $(\vec{v}, p)$  del problema (6.2.1), (6.2.2) tale che  $\vec{v}$  è parallelo ad  $\vec{e}_1$  ed ha la rappresentazione analitica indipendente da  $x_3$ . Perciò cerchiamo una soluzione  $(\vec{v}, p)$  del problema (6.2.1), (6.2.2) tale che la rappresentazione analitica della velocità sia data da:

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = v_1(x_1, x_2) \vec{e}_1 \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \xi(S).$$

A priori non facciamo alcuna ipotesi sulla pressione, per cui la sua rappresentazione analitica è

$$p = p(x_1, x_2, x_3) \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \xi(S).$$

Scriviamo ora le equazioni del moto del fluido per componenti ed in termini di rappresentazioni analitiche, senza tenere conto, per il momento, delle condizioni imposte a  $\vec{v}$ . Abbiamo in  $\xi(S)$ :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j &= \mu \Delta v_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} & i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} &= 0. \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

Dalla quarta equazione delle (6.2.3), tenendo conto che:

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0,$$

deduciamo:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0 \quad \text{in } \xi(S).$$

Dunque deve essere

$$\vec{v} = v_1(x_2) \vec{e}_1,$$

con  $v_1(x_2)$  definita in  $[-h, h]$ .

Ora riconsideriamo le tre equazioni (6.2.3) che, per la forma della rappresentazione analitica di  $\vec{v}$ , si riducono a:

$$\begin{aligned} i = 1 & \quad \mu \frac{d^2 v_1}{dx_2^2} = \frac{\partial p}{\partial x_1}; \\ i = 2 & \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial x_2}; \\ i = 3 & \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

Dalla seconda e dalla terza equazione discende che  $p$  non dipende da  $x_2$  e  $x_3$ , e quindi  $p = p(x_1)$ , con  $x_1 \in \mathbb{R}$ .

Alla luce di questa osservazione consideriamo allora la prima equazione.

Otteniamo:

$$\mu \frac{d^2 v_1}{dx_2^2}(x_2) = \frac{dp}{dx_1}(x_1) \quad \forall x_2 \in [-h, h], \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}.$$

Poichè  $x_1$  e  $x_2$  sono variabili indipendenti e il primo membro dell'equazione scritta sopra è una funzione solo di  $x_2$ , mentre il secondo membro è funzione solo di  $x_1$ , affinché l'equazione sia soddisfatta  $\forall x_1 \in \mathbb{R}$  e  $\forall x_2 \in [-h, h]$  è necessario che i due membri siano uguali ad una stessa costante, che indichiamo con  $-C$ , con  $C = \text{costante}$ .

Avremo dunque:

$$\mu \frac{d^2 v_1}{dx_2^2}(x_2) = \frac{dp}{dx_1}(x_1) = -C \quad \forall x_2 \in [-h, h], \quad \forall x_1 \in \mathbb{R},$$

da cui otteniamo le due equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx_1}(x_1) &= -C \\ \frac{d^2 v_1}{dx_2^2}(x_2) &= -\frac{C}{\mu}. \end{aligned}$$

A questo punto distinguiamo due casi:

1)  $C = 0$

Abbiamo allora:

$$\frac{dp}{dx_1}(x_1) = 0, \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad p = p_0 \quad \text{in } \mathbb{R},$$

dove  $p_0$  è una costante arbitraria.

Inoltre deduciamo:

$$\frac{d^2 v_1}{dx_2^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dv_1}{dx_2} = C_1 \quad \Longrightarrow \quad v_1 = C_1 x_2 + C_2 \quad \forall x_2 \in [-h, h],$$

con  $C_1, C_2$  costanti arbitrarie.

Per determinare i valori di queste due costanti, imponiamo le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} \vec{v} \Big|_{\Pi_1} &= \vec{0} & \Longrightarrow & \quad v_1(-h) = 0, \\ \vec{v} \Big|_{\Pi_2} &= \vec{0} & \Longrightarrow & \quad v_1(h) = 0, \end{aligned}$$

per cui ricaviamo:

$$\begin{aligned} 0 &= -C_1 h + C_2 \\ 0 &= C_1 h + C_2. \end{aligned}$$

Sottraendo e sommando membro a membro queste due equazioni, deduciamo:

$$\begin{aligned} 2 C_1 h &= 0 & \Longrightarrow & \quad C_1 = 0 \\ C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Dunque otteniamo:

$$p = p_0, \quad \vec{v} = \vec{0}.$$

La pressione è costante e il fluido è in quiete.

2)  $C \neq 0$

Innanzitutto integriamo l'equazione cui soddisfa  $p$ :

$$\frac{dp}{dx_1}(x_1) = -C \quad \Longrightarrow \quad p = -C x_1 + p_0 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R},$$

dove  $p_0$  è una costante arbitraria.

E' interessante vedere qual è il significato fisico della costante  $C$ .

Consideriamo i due piani di equazione  $x_1 = a$  e  $x_1 = a + 1$ , con  $a$  costante arbitraria e siano  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  le intersezioni di  $S$  con tali piani.

Poichè  $p = p(x_1)$ , su  $\Sigma_1$  la pressione  $p$  assume un valore costante, e così pure su  $\Sigma_2$ . Se  $p_1$  e  $p_2$  individuano rispettivamente questi due valori costanti, si ha:

$$\begin{aligned} p_1 &= -C a + p_0 \\ p_2 &= -C (a + 1) + p_0, \end{aligned}$$

da cui otteniamo:

$$p_1 - p_2 = C.$$

Dunque  $C$  viene a rappresentare la differenza di pressione fra i punti di due sezioni di  $S$  normali a  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  e a distanza unitaria l'una dall'altra. Per questo motivo  $C$  è chiamato *salto di pressione*.

Andando ora a integrare la seconda equazione otteniamo:

$$\frac{dv_1}{dx_2} = -\frac{C}{\mu} x_2 + C_1 \implies v_1 = -\frac{C}{2\mu} x_2^2 + C_1 x_2 + C_2 \quad \forall x_2 \in [-h, h]$$

con  $C_1$  e  $C_2$  costanti arbitrarie.

Come prima, per determinare le costanti  $C_1$  e  $C_2$ , sfruttiamo le condizioni al contorno:

$$v_1(-h) = v_1(h) = 0,$$

e quindi otteniamo:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{C}{2\mu} h^2 - C_1 h + C_2 && \text{per } x_2 = -h, \\ 0 &= -\frac{C}{2\mu} h^2 + C_1 h + C_2 && \text{per } x_2 = h. \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro dalla seconda equazione la prima, deduciamo:

$$2 C_1 h = 0 \implies C_1 = 0.$$

Andando a sostituire nella prima equazione, abbiamo:

$$0 = -\frac{C}{2\mu} h^2 + C_2.$$

In definitiva otteniamo:

$$v_1(x_2) = \frac{C}{2\mu} (h^2 - x_2^2) \quad x_2 \in [-h, h]. \quad (6.2.4)$$

La velocità dunque viene ad avere un andamento parabolico. Se  $C > 0$  la parabola ha la concavità rivolta verso il basso, se  $C < 0$ , la parabola ha la concavità rivolta verso l'alto. In ogni caso il vertice  $V$  della parabola ha ascissa  $x_{V2} = 0$ .

**Osservazione 6.1.** Si osservi che in corrispondenza di ogni valore fissato del salto di pressione  $C$  si ottiene uno ed un solo moto di Poiseuille.

Possiamo riassumere i risultati ottenuti nel seguente:

**Teorema 6.1.** *Dato un fluido newtoniano, incomprimibile ed omogeneo, un moto (stazionario) di Poiseuille tra i due piani paralleli rigidi e fissi di equazione  $x_2 = -h$  e  $x_2 = h$  è dato dalla coppia  $(\vec{v}, p)$  tale che*

$$p(x_1) = -C x_1 + p_0 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}, \quad \vec{v} = v_1(x_2) \vec{e}_1 \quad \forall x_2 \in [-h, h]$$

con

$$v_1(x_2) = \frac{C}{2\mu} (h^2 - x_2^2),$$

dove la costante  $C$  rappresenta il salto della pressione nella direzione  $Ox_1$ . Se  $C = 0$ , la pressione è costante e il fluido è in quiete.

Forniamo ora il grafico di  $v_1(x_2)$  assegnando opportuni valori numerici, fisicamente significativi, ai parametri che compaiono nella (6.2.4).

Assumiamo che il liquido reale, che rappresentiamo con il modello di fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo, sia il mercurio liquido a temperatura ambiente.

Il suo coefficiente di viscosità  $\mu$  è dato da:

$$\mu = 1.6 \cdot 10^{-3} \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}.$$

Per  $C$  scegliamo i valori seguenti:

$$C = 6.4 \cdot 10^{-3} \text{kg m}^{-2} \text{s}^{-2}, \quad C = -6.4 \cdot 10^{-3} \text{kg m}^{-2} \text{s}^{-2}.$$

Inoltre assumiamo  $h = 4\text{m}$ . Nel primo caso si ha

$$v_1(x_2) = -2x_2^2 + 32 \quad , \quad x_2 \in [-4, 4],$$

mentre nel secondo

$$v_1(x_2) = 2x_2^2 - 32 \quad , \quad x_2 \in [-4, 4].$$

I grafici di  $v_1$ , nei due casi, sono riportati nella Figura 6.2.

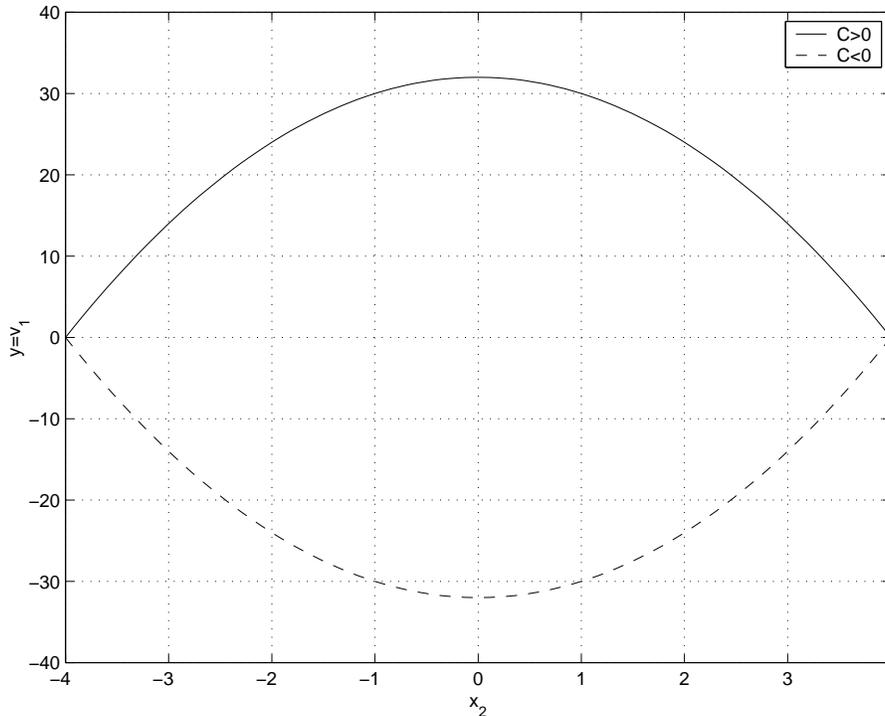


Figura 6.2: Andamento di  $v_1(x_2)$

Può essere interessante vedere che espressione assumono le componenti del tensore degli sforzi di Cauchy, tenendo conto che il fluido è newtoniano ed incompressibile per cui:

$$\tilde{T} = -p\tilde{a} + 2\mu\tilde{D}.$$

Poichè  $\vec{v}$  ha le componenti tutte nulle tranne  $v_1$  e  $v_1 = v_1(x_2)$ , allora le componenti di  $\tilde{D}$  sono tutte nulle tranne:

$$D_{12} = D_{21} = \frac{1}{2} \frac{dv_1}{dx_2} = -\frac{1}{2} \frac{C}{\mu} x_2.$$

Siamo ora in grado di scrivere le componenti di  $\tilde{T}$ , tenendo conto che in generale

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}.$$

In conclusione otteniamo:

$$\begin{aligned} T_{11} &= T_{22} = T_{33} = C x_1 - p_0, \\ T_{12} &= T_{21} = 2\mu D_{12} = -2\mu \frac{C}{2\mu} x_2 = -C x_2. \end{aligned}$$

Le altre componenti sono nulle.

Se andiamo a scrivere la matrice  $[T_{ij}]$  associata a  $\tilde{T}$ , abbiamo:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} Cx_1 - p_0 & -Cx_2 & 0 \\ -Cx_2 & Cx_1 - p_0 & 0 \\ 0 & 0 & Cx_1 - p_0 \end{bmatrix}.$$

Possiamo anche vedere quale forma assume, per il moto di Poiseuille, la trazione superficiale  $\vec{f}$  nei punti di  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ .

Cominciamo a considerare quanto avviene nei punti del secondo piano.

$$\vec{f} \Big|_{\Pi_2} = \vec{T}(\vec{n}) \Big|_{\Pi_2} = \vec{T}(\vec{e}_2) \Big|_{\Pi_2} = \tilde{T} \cdot \vec{e}_2 \Big|_{\Pi_2}$$

poiché il versore  $\vec{n}$  normale a  $\Pi_2$  rivolto verso l'esterno di  $S$  è  $\vec{e}_2$ .

In generale  $(\tilde{T} \cdot \vec{u})_i = T_{ij} u_j$ ; pertanto, con  $\vec{u} = \vec{e}_2$  abbiamo:

$$f_i \Big|_{\Pi_2} = T_{i2} \Big|_{\Pi_2} \quad i = 1, 2, 3.$$

Otteniamo dunque:

$$f_1 \Big|_{\Pi_2} = T_{12} \Big|_{\Pi_2} = -Ch,$$

componente che rappresenta uno sforzo di taglio, essendo parallela a  $\Pi_2$ ;

$$f_2 \Big|_{\Pi_2} = T_{22} \Big|_{\Pi_2} = Cx_1 - p_0,$$

componente che rappresenta uno sforzo normale;

$$f_3 \Big|_{\Pi_2} = T_{32} \Big|_{\Pi_2} = 0,$$

componente nulla che rappresenta uno sforzo di taglio.

Analogamente possiamo determinare  $\vec{f} \Big|_{\Pi_1} = -\tilde{T} \cdot \vec{e}_2 \Big|_{\Pi_1}$ .

Avremo:

$$f_1 \Big|_{\Pi_1} = -Ch = f_1 \Big|_{\Pi_2},$$

$$f_2 \Big|_{\Pi_1} = -Cx_1 + p_0 = -f_2 \Big|_{\Pi_2},$$

$$f_3 \Big|_{\Pi_1} = 0 = f_3 \Big|_{\Pi_2}.$$

### 6.3 Moto di Poiseuille-Couette tra due piani paralleli.

Supponiamo di avere ancora un fluido viscoso classico incompressibile ed omogeneo, in assenza di forze di massa, che si muove di moto stazionario. La regione occupata sia ancora quella compresa tra due piani rigidi e paralleli, dei quali  $\Pi_1$  sia fisso rispetto all'osservatore, mentre  $\Pi_2$  si muova di moto traslatorio rettilineo uniforme con velocità  $\vec{V}$  parallela al piano stesso.

Fissiamo come riferimento cartesiano ortonormale associato all'osservatore il riferimento  $Ox_1x_2x_3$  avente l'origine  $O$  equidistante dai due piani, l'asse  $Ox_1$  parallelo e concorde con  $\vec{V}$ , l'asse  $Ox_2$  normale ai due piani per cui l'asse  $Ox_3$  risulta parallelo ai piani (Vedi Figura 5.1).

Con tale scelta si ha:

$$\vec{V} = V \vec{e}_1 \quad \text{con } V = \text{costante} > 0.$$

Un **moto di Poiseuille-Couette** tra i due piani è costituito da ogni coppia  $(\vec{v}, p)$  che sia soluzione del sistema (6.2.1), con  $\vec{v} \in \mathcal{C}^2(S)$ ,  $p \in \mathcal{C}^1(S)$  tale che  $\vec{v}$  soddisfi alla condizione al contorno di aderenza:

$$\vec{v} \Big|_{\Pi_1} = \vec{0}, \quad \vec{v} \Big|_{\Pi_2} = V \vec{e}_1, \quad (6.3.1)$$

ed abbia la rappresentazione analitica della forma:

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = v_1(x_1, x_2) \vec{e}_1.$$

Procedendo in maniera del tutto analoga a quanto abbiamo visto per il moto di Poiseuille tra due piani, otteniamo che, per la condizione di incompressibilità,  $v_1$  dipende solo da  $x_2$ , che  $p$  dipende solo da  $x_1$  e che le due funzioni  $p(x_1)$  e  $v_1(x_2)$  soddisfano alle due equazioni differenziali ordinarie :

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx_1}(x_1) &= -C \\ \frac{d^2v_1}{dx_2^2}(x_2) &= -\frac{C}{\mu}. \end{aligned}$$

A questo punto, come per il moto di Poiseuille, distinguiamo due casi.

1)  $C = 0$

Deduciamo

$$p(x_1) = p_0 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}, \quad v_1(x_2) = C_1 x_2 + C_2 \quad \forall x_2 \in [-h, h],$$

dove  $p_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  sono costanti arbitrarie. Le due costanti  $C_1$  e  $C_2$  si determinano dalle condizioni di aderenza (6.3.1) che forniscono

$$v_1(-h) = 0 \quad v_1(h) = V. \quad (6.3.2)$$

Come si verifica facilmente si ottiene

$$C_1 = \frac{V}{2h}, \quad C_2 = \frac{V}{2}$$

per cui

$$v_1(x_2) = \frac{V}{2h}(x_2 + h) \quad \forall x_2 \in [-h, h].$$

Dunque, a differenza di quanto avviene nel caso di Poiseuille, quando la pressione è costante, il fluido non resta in quiete e  $v_1(x_2)$  cresce linearmente da 0 a  $V$ .

## 2) $C \neq 0$

Come nel moto di Poiseuille,

$$p(x_1) = -C x_1 + p_0 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}$$

dove  $C$  rappresenta il salto di pressione nella direzione  $Ox_1$  e  $p_0$  è una costante arbitraria inessenziale.

Per quanto riguarda la funzione  $v_1(x_2)$ , se teniamo presente la linearità del problema al contorno cui soddisfa, concludiamo che questa è data dalla somma della velocità nel moto di Poiseuille studiato nel paragrafo precedente con  $C \neq 0$  e dalla velocità nel moto di Poiseuille-Couette con  $C = 0$  che abbiamo appena ottenuto.

In conclusione l'espressione di  $v_1(x_2)$  è la seguente:

$$v_1(x_2) = \frac{C}{2\mu}(h^2 - x_2^2) + \frac{V}{2h}(h + x_2) \quad \forall x_2 \in [-h, h].$$

Facciamo alcune osservazioni.

**Osservazione 6.2.** Ad ogni salto di pressione  $C$  corrisponde uno ed un solo moto di Couette.

**Osservazione 6.3.** Se  $C \neq 0$  l'andamento di  $v_1(x_2)$  è sempre parabolico, ma si

differenza da quello che si ha nel moto di Poiseuille.

Se  $C > 0$  la concavità della parabola è rivolta verso il basso e l'ascissa del vertice, che nel moto di Poiseuille è nulla, è data da

$$x_{V2} = \frac{\mu V}{2hC} > 0.$$

Vediamo se  $x_{V2}$  è interno all'intervallo  $[-h, h]$ . Tale condizione si verifica se

$$\frac{\mu V}{2hC} < h \implies \frac{\mu V}{2h^2} < C.$$

Otteniamo perciò che l'ascissa del vertice della parabola è interna all'intervallo  $[-h, h]$  se  $C > \frac{\mu V}{2h^2}$ .

Dunque se  $C > \frac{\mu V}{2h^2}$ ,  $v_1(x_2)$  nell'intervallo  $[-h, h]$  cresce da 0 sino a raggiungere il valore massimo e poi decresce sino al valore  $V$ , mentre se  $0 < C \leq \frac{\mu V}{2h^2}$ ,  $v_1(x_2)$  nell'intervallo  $[-h, h]$  è sempre crescente da 0 a  $V$ .

Se  $C < 0$  la concavità della parabola è rivolta verso l'alto e l'ascissa del vertice, data da  $\frac{\mu V}{2hC}$ , è negativa. In tal caso  $x_{V2}$  è interno all'intervallo  $[-h, h]$  se

$$\frac{\mu V}{2hC} > -h \quad \text{ossia se} \quad \frac{\mu V}{2h^2} < -C \implies C < -\frac{\mu V}{2h^2}.$$

Dunque se  $C < -\frac{\mu V}{2h^2}$ ,  $v_1(x_2)$  nell'intervallo  $[-h, h]$  decresce da 0 sino a raggiungere il valore minimo e poi cresce sino al valore  $V$ , mentre se  $-\frac{\mu V}{2h^2} \leq C < 0$ ,  $v_1(x_2)$  è sempre crescente dal valore 0 al valore  $V$ .

Possiamo riassumere i risultati ottenuti nel seguente:

**Teorema 6.2.** *Dato un fluido viscoso newtoniano incomprimibile ed omogeneo, un moto (stazionario) di Poiseuille-Couette tra due piani paralleli, di cui uno fisso e l'altro in moto traslatorio rettilineo uniforme in una direzione parallela al piano stesso, è dato dalla coppia  $(\vec{v}, p)$  tale che*

$$p(x_1) = -C x_1 + p_0 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}, \quad \vec{v} = v_1(x_2) \vec{e}_1 \quad \forall x_2 \in [-h, h]$$

con

$$v_1(x_2) = \frac{C}{2\mu} (h^2 - x_2^2) + \frac{V}{2h} (h + x_2),$$

dove l'asse  $Ox_1$  ha la direzione della velocità  $\vec{V}$  del piano in moto e la costante  $C$  rappresenta il salto della pressione nella direzione  $Ox_1$ .

Rappresentiamo ora graficamente  $v_1(x_2)$ , per diversi valori numerici dei parametri che intervengono nella sua espressione.

Come nel paragrafo precedente, prendiamo in esame il caso del mercurio liquido, con  $h = 4 \text{ m}$  e  $V = 16 \text{ m s}^{-1}$ .

Consideriamo i quattro possibili sottocasi che si possono verificare:

$$1) C > \frac{\mu V}{2h^2} = 0.8 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-2}.$$

$$\text{Assumiamo } C = 6.4 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-2} \implies v_1(x_2) = -2x_2^2 + 2x_2 + 40.$$

$$2) 0 < C \leq 0.8 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-2}$$

$$\text{Prendiamo } C = 0.32 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-2} \implies v_1(x_2) = -0.1x_2^2 + 2x_2 + 9.6.$$

$$3) C < -\frac{\mu V}{2h^2} = -0.8 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-2}$$

$$\text{Scegliamo } C = -3.2 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-2} \implies v_1(x_2) = x_2^2 + 2x_2 - 8.$$

$$4) -\frac{\mu V}{2h^2} = -0.8 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-2} \leq C < 0$$

$$\text{Prendiamo } C = -0.32 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-2} \implies v_1(x_2) = 0.1x_2^2 + 2x_2 + 6.4.$$

I relativi grafici sono riportati nelle Figure 6.3, 6.4, 6.5, 6.6.

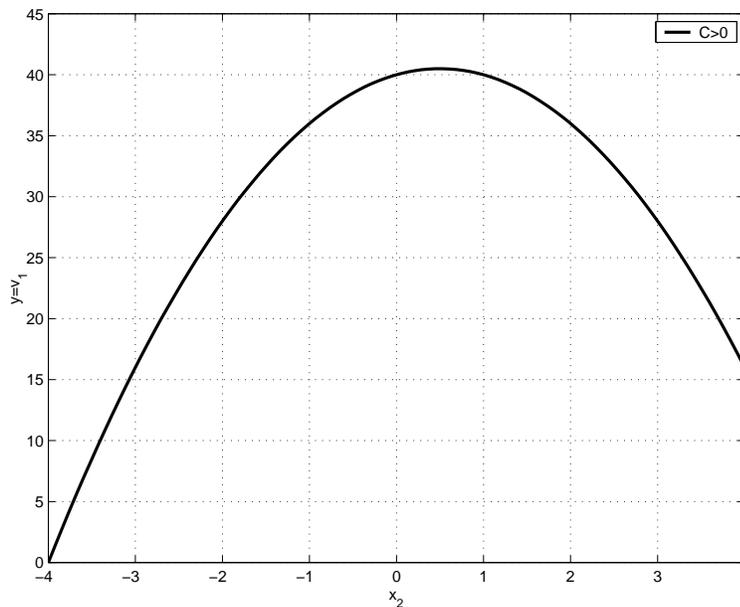
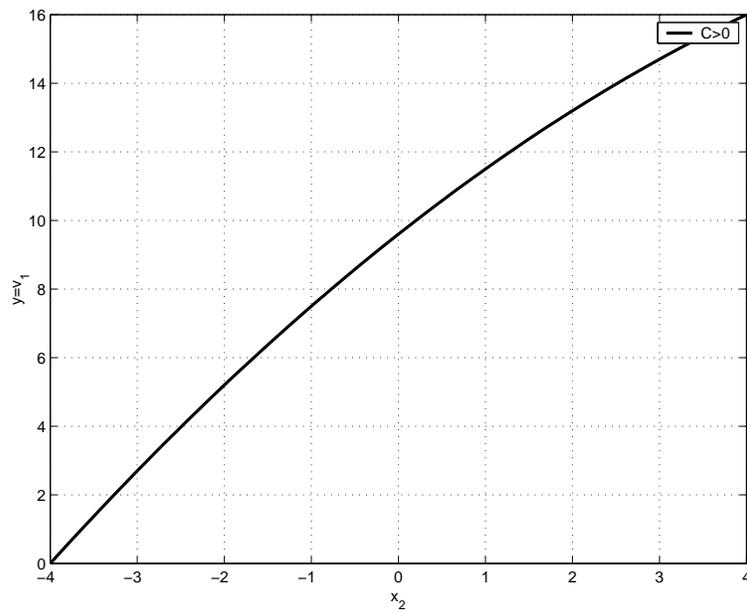
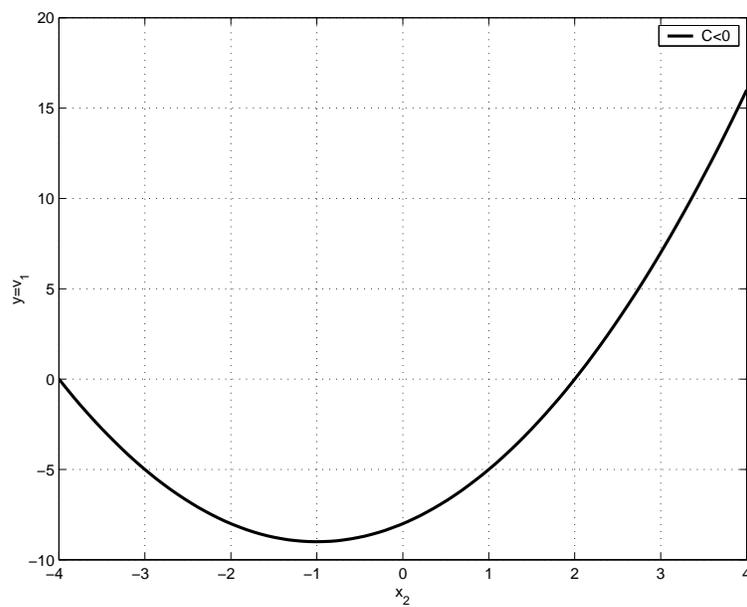
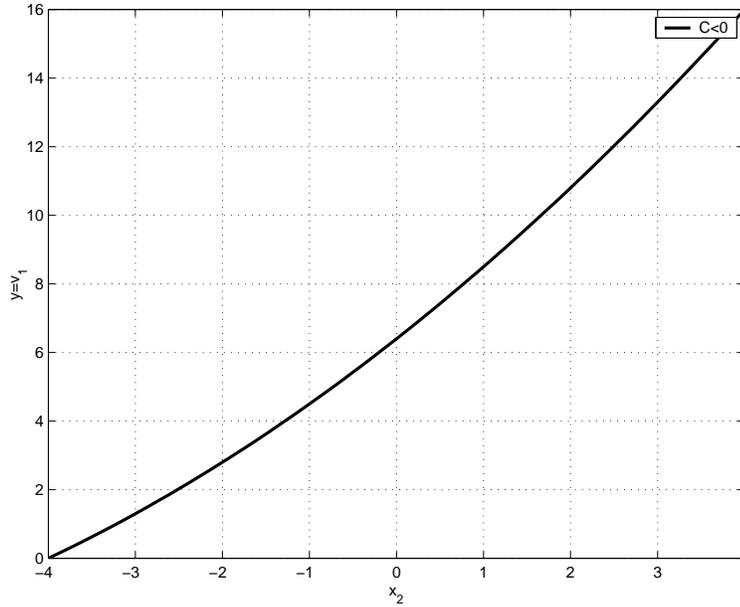


Figura 6.3: Andamento di  $v_1(x_2)$  nel Caso 1)

Figura 6.4: Andamento di  $v_1(x_2)$  nel Caso 2)Figura 6.5: Andamento di  $v_1(x_2)$  nel Caso 3)

Figura 6.6: Andamento di  $v_1(x_2)$  nel Caso 4)

Determiniamo ora il tensore degli sforzi di Cauchy come abbiamo fatto per il moto di Poiseuille.

Tenendo presente che le uniche componenti non nulle del tensore  $\tilde{D}$  sono:

$$D_{12} = D_{21} = \frac{1}{2} \frac{dv_1}{dx_2} = -\frac{1}{2} \frac{C}{\mu} x_2 + \frac{V}{4h},$$

per la matrice  $[T_{ij}]$  associata a  $\tilde{T}$  abbiamo:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} Cx_1 - p_0 & -Cx_2 + \frac{\mu V}{2h} & 0 \\ -Cx_2 + \frac{\mu V}{2h} & Cx_1 - p_0 & 0 \\ 0 & 0 & Cx_1 - p_0 \end{bmatrix}.$$

Può essere interessante anche determinare  $\vec{f}|_{\Pi_1}$ ,  $\vec{f}|_{\Pi_2}$ . Ricordando quanto visto per il moto di Poiseuille, deduciamo che le tre componenti di  $\vec{f}|_{\Pi_2}$  sono date da:

$$f_1|_{\Pi_2} = T_{12}|_{\Pi_2} = -Ch + \frac{\mu V}{2h}$$

$$f_2|_{\Pi_2} = T_{22}|_{\Pi_2} = Cx_1 - p_0$$

$$f_3 \Big|_{\Pi_2} = T_{32} \Big|_{\Pi_2} = 0.$$

Analogamente per  $\vec{f} \Big|_{\Pi_1}$  si ottiene:

$$f_1 \Big|_{\Pi_1} = -T_{12} \Big|_{\Pi_1} = -Ch - \frac{\mu V}{2h}$$

$$f_2 \Big|_{\Pi_1} = -T_{22} \Big|_{\Pi_1} = -Cx_1 + p_0$$

$$f_3 \Big|_{\Pi_1} = -T_{32} \Big|_{\Pi_1} = 0.$$

**Osservazione 6.5.** I risultati che abbiamo ottenuto per i moti di Poiseuille e di Poiseuille-Couette continuano a sussistere se assumiamo che  $\rho \vec{F}$  provenga da un potenziale  $U$ . Infatti basta introdurre una pressione modificata  $p^*$  così definita:

$$p^* = p - U$$

e sostituire alla pressione effettiva la pressione modificata.

**Osservazione 6.6.** I moti di Poiseuille e di Poiseuille-Couette trovano applicazione pratica nello studio di un liquido in un canale.

# Capitolo 7

## Moti indotti da un piano rotante per un fluido newtoniano incomprimibile

### 7.1 Premesse

Supponiamo di avere ancora un fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo in moto stazionario. La regione  $S$  occupata dal fluido sia un semispazio la cui frontiera sia costituita dal piano materiale rigido  $\Pi$  che ruota uniformemente attorno ad un asse fisso normale al piano stesso. Sia  $Ox_3$  l'asse di rotazione con  $O$  punto del piano ed orientato verso la regione occupata dal fluido, mentre gli assi  $Ox_1, Ox_2$  giacciono su  $\Pi$ . Si ha perciò:

$$S = \{P(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E} \mid x_3 \geq 0\}.$$

La velocità angolare del piano rotante sia:  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_3$  con  $\Omega > 0$ .

Dunque le equazioni che governano il moto del fluido, dopo aver diviso entrambi i membri dell'equazione di Navier-Stokes per  $\rho$ , sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} &= \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \vec{v}, \\ \text{div } \vec{v} &= 0 \end{aligned} \quad \text{in } S. \quad (7.1.1)$$

D'altra parte

$$\rho = \text{costante} \quad \implies \quad \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad} \left( \frac{p}{\rho} \right).$$

Inoltre assumiamo che la densità delle forze esterne di massa provenga da un potenziale scalare, cioè

$$\vec{F} = \text{grad } U_1.$$

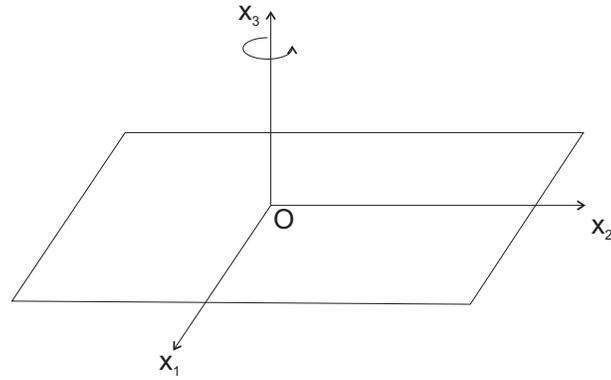


Figura 7.1: Geometria del problema

Perciò si ha

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = -\text{grad} \left( \frac{p}{\rho} - U_1 \right).$$

E' allora conveniente introdurre il campo della pressione modificata dato da

$$p^* = \frac{p}{\rho} - U_1.$$

Di conseguenza, il sistema (7.1.1) assume la forma:

$$\begin{aligned} \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} &= -\text{grad } p^* + \nu \Delta \vec{v}, \\ \text{div } \vec{v} &= 0 \end{aligned} \quad \text{in } S. \quad (7.1.2)$$

A tale sistema associamo la condizione di aderenza

$$\vec{v} \Big|_{\Pi} = \vec{\Omega} \times (P - O) \Big|_{\Pi}. \quad (7.1.3)$$

Risolvere il problema al contorno (7.1.2), (7.1.3) significa trovare le coppie  $(\vec{v}, p^*)$  con  $\vec{v} \in \mathcal{C}^2(S)$ ,  $p^* \in \mathcal{C}^1(S)$  soddisfacenti le equazioni (7.1.2) e la condizione al contorno (7.1.3).

Tale problema occupa una posizione centrale in fluidodinamica a partire dal lavoro pionieristico di T. von Karman (1921).

I motivi principali di questo interesse stanno nel fatto che il problema ha immediate applicazioni tecniche, ad esempio alle macchine rotanti, e che la geometria del moto è una delle più semplici possibili cosicché ci si aspetta di trovare delle soluzioni esatte.

Una prima soluzione del problema è quella banale data da  $(\vec{v}^{(R)}, p^{*(R)})$  con

$$\vec{v}^{(R)} = \vec{\Omega} \times (P - O), \quad p^{*(R)} = \frac{\Omega^2}{2} |P - P^*|^2 + p_0^{(R)} \quad \forall P \in S$$

dove  $P^*$  è la proiezione ortogonale di  $P$  sull'asse  $Ox_3$  e  $p_0^{(R)}$  è una costante arbitraria. In corrispondenza di tale moto il fluido si muove di moto rotatorio uniforme attorno all'asse  $Ox_3$  insieme al piano  $\Pi$  che dunque trascina con sé tutto il fluido.

Verifichiamo che effettivamente il moto rigido  $(\vec{v}^{(R)}, p^{*(R)})$  è una soluzione del problema.

La condizione al contorno è soddisfatta banalmente.

Vediamo se sono soddisfatte le equazioni (7.1.2).

A tal fine ricorriamo alle rappresentazioni analitiche di  $p^{*(R)}$  e  $\vec{v}^{(R)}$ :

$$p^{*(R)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\Omega^2}{2}(x_1^2 + x_2^2) + p_0^{(R)},$$

$$\vec{v}^{(R)}(x_1, x_2, x_3) = \Omega \vec{e}_3 \times (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3)$$

da cui

$$v_1^{(R)} = -\Omega x_2, \quad v_2^{(R)} = \Omega x_1, \quad v_3^{(R)} = 0.$$

Si vede immediatamente che  $\text{div} \vec{v}^{(R)} = 0$  in  $S$  poiché:

$$\frac{\partial v_1^{(R)}}{\partial x_1} = \frac{\partial v_2^{(R)}}{\partial x_2} = \frac{\partial v_3^{(R)}}{\partial x_3} = 0.$$

Per quanto riguarda la prima delle (7.1.2), questa è equivalente alle tre equazioni scalari:

$$\frac{\partial v_i^{(R)}}{\partial x_j} v_j^{(R)} = -\frac{\partial p^{*(R)}}{\partial x_i} + \nu \Delta v_i^{(R)} \quad i = 1, 2, 3. \quad (7.1.4)$$

Per  $i = 1$  abbiamo:

$$\frac{\partial v_1^{(R)}}{\partial x_j} v_j^{(R)} = \frac{\partial v_1^{(R)}}{\partial x_2} v_2^{(R)} = -\Omega^2 x_1, \quad -\frac{\partial p^{*(R)}}{\partial x_1} + \nu \Delta v_1^{(R)} = -\Omega^2 x_1$$

e dunque la prima delle (7.1.4) è soddisfatta.

Per  $i = 2$ :

$$\frac{\partial v_2^{(R)}}{\partial x_j} v_j^{(R)} = \frac{\partial v_2^{(R)}}{\partial x_1} v_1^{(R)} = -\Omega^2 x_2, \quad -\frac{\partial p^{*(R)}}{\partial x_2} + \nu \Delta v_2^{(R)} = -\Omega^2 x_2$$

e dunque anche la seconda delle (7.1.4) è soddisfatta.

Infine per  $i = 3$

$$\frac{\partial v_3^{(R)}}{\partial x_j} v_j^{(R)} = -\frac{\partial p^{*(R)}}{\partial x_3} + \nu \Delta v_3^{(R)} = 0.$$

Dunque è verificata anche l'ultima delle (7.1.4).

E' interessante considerare le linee di flusso del campo della velocità  $\vec{v}^{(R)}$ , che

risultano essere circonferenze che giacciono su piani di equazione  $x_3 = \text{costante}$  ed hanno il centro sull'asse  $Ox_3$ . Per provare tale risultato possiamo seguire due metodi.

Il primo metodo è il più veloce. Essendo il moto stazionario, linee di flusso e traiettorie delle particelle coincidono e, poiché il moto del fluido è un moto rigido di rotazione uniforme attorno all'asse  $Ox_3$ , le particelle descrivono delle circonferenze che giacciono su piani di equazione  $x_3 = \text{costante}$  ed hanno il centro sull'asse  $Ox_3$ .

Il secondo metodo, basato sulla definizione di linee di flusso, è meno immediato, ma ci sarà utile nel seguito. Come sappiamo, le linee di flusso sono il sostegno delle curve  $P = P(\lambda)$  che sono soluzioni massimali dell'equazione differenziale del I ordine vettoriale

$$\frac{dP}{d\lambda} = \vec{v}^{(R)}(P),$$

equivalente al sistema di tre equazioni scalari del I ordine:

$$\frac{dx_i}{d\lambda} = v_i^{(R)}(x_1, x_2, x_3) \quad i = 1, 2, 3$$

nelle tre funzioni incognite  $x_i = x_i(\lambda) \quad i = 1, 2, 3$ .

Esplicitando le funzioni  $v_i^{(R)}(x_1, x_2, x_3)$ , otteniamo il seguente sistema:

$$\frac{dx_1}{d\lambda} = -\Omega x_2, \tag{7.1.5}$$

$$\frac{dx_2}{d\lambda} = \Omega x_1, \tag{7.1.6}$$

$$\frac{dx_3}{d\lambda} = 0. \tag{7.1.7}$$

Dalla (7.1.7) discende che le linee di flusso sono cammini piani poiché  $x_3 = c$  con  $c = \text{costante} \in [0, +\infty)$ .

Inoltre moltiplicando entrambi i membri della (7.1.5) per  $x_1$  e della (7.1.6) per  $x_2$  e sommando, si ottiene:

$$x_1 \frac{dx_1}{d\lambda} + x_2 \frac{dx_2}{d\lambda} = 0 \quad \implies \quad \frac{1}{2} \frac{d}{d\lambda} (x_1^2 + x_2^2) = 0,$$

da cui:

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \quad \text{con } R = \text{costante} > 0.$$

Le linee di flusso sono dunque caratterizzate dalle seguenti equazioni cartesiane:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= R^2, \\ x_3 &= c \in [0, +\infty). \end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto che le linee di flusso del campo  $\vec{v}^{(R)}$  sono circonferenze che giacciono su piani di equazione  $x_3 = c$  ed hanno il centro sull'asse  $Ox_3$ . Osserviamo che il cammino luogo dei centri di tali circonferenze è il semiasse positivo  $Ox_3$ .

Il problema al contorno considerato ammette altre soluzioni che possono essere raggruppate in due classi:

- soluzioni che sono **simmetriche**
- soluzioni che sono **non simmetriche**

rispetto all'asse di rotazione  $Ox_3$ .

Appartiene alla prima classe il moto di von Karman, che è basato, oltre che sull'ipotesi di simmetria, sulle ulteriori ipotesi che la componente della velocità del fluido lungo l'asse di rotazione dipenda solo da  $x_3$  e che all'infinito la velocità del fluido sia normale al piano rotante. Con tali ipotesi lo studio del moto è ricondotto ad un problema differenziale per un sistema di due equazioni differenziali ordinarie non lineari che non possiede una soluzione esprimibile in termini di funzioni note, ma che si può solo integrare numericamente.

Noi non ci occuperemo del moto di von Karman, ma studieremo un tipo di moto che non è simmetrico rispetto all'asse di rotazione e faremo vedere che per tale moto si trova una soluzione esplicita espressa in termini di funzioni esponenziali e trigonometriche.

## 7.2 Soluzioni non simmetriche

Occupiamoci di una classe di soluzioni del problema al contorno (7.1.2),(7.1.3) che non sono simmetriche.

A tal fine fissiamo sul piano  $\Pi$  ad arbitrio un punto  $P_0$  e sia  $(f_0, g_0, 0)$  la terna delle sue coordinate cartesiane. Ovviamente  $f_0$  e  $g_0$  sono numeri reali arbitrari. Consideriamo poi l'asse parallelo ad  $Ox_3$  e con lo stesso verso, avente come origine il punto  $P_0$ ; tale asse lo denotiamo con  $P_0x'_3$ . Poniamo

$$p^*(P) = \frac{\Omega^2}{2}|P - P'|^2 + p_0 \quad \forall P \in S \quad (7.2.1)$$

dove  $P'$  è la proiezione ortogonale del punto  $P$  sull'asse  $P_0x'_3$  e  $p_0$  è una costante arbitraria.

Ci proponiamo di determinare un campo vettoriale  $\vec{v} \in \mathcal{C}^2(S)$  soddisfacente alle tre condizioni seguenti:

- 1) la coppia  $(\vec{v}, p^*)$  con  $p^*$  data dalla (7.2.1) è soluzione del problema (7.1.2), (7.1.3);
- 2) le linee di flusso del campo  $\vec{v}$  sono circonferenze che giacciono su piani di equazione  $x_3 = \text{costante}$ ;
- 3) le componenti della rappresentazione analitica di  $\vec{v}$  sono limitate rispetto a  $x_3$  con  $x_3 \in [0, +\infty)$ .

Introduciamo le rappresentazioni analitiche di  $p^*$  e  $\vec{v}$ :

$$p^* = \frac{\Omega^2}{2}[(x_1 - f_0)^2 + (x_2 - g_0)^2] + p_0, \quad \vec{v} = \vec{v}(x_1, x_2, x_3).$$

E' conveniente cercare le componenti della rappresentazione analitica di  $\vec{v}$  nella forma:

$$v_1 = -\Omega[x_2 - g(x_3)], \quad (7.2.2)$$

$$v_2 = \Omega[x_1 - f(x_3)], \quad (7.2.3)$$

$$v_3 = 0. \quad (7.2.4)$$

dove  $f, g$  sono funzioni incognite  $\in C^2([0, +\infty))$ . Infatti, se le componenti della velocità hanno la forma scritta sopra è sicuramente soddisfatta la condizione 2). Verifichiamo tale asserzione.

Siano  $x_i = x_i(\lambda)$   $i = 1, 2, 3$  le equazioni cartesiane parametriche di una generica linea di flusso. Le funzioni  $x_i(\lambda)$  devono soddisfare al sistema differenziale del I ordine:

$$\frac{dx_1}{d\lambda} = -\Omega[x_2 - g(x_3)], \quad (7.2.5)$$

$$\frac{dx_2}{d\lambda} = \Omega[x_1 - f(x_3)], \quad (7.2.6)$$

$$\frac{dx_3}{d\lambda} = 0. \quad (7.2.7)$$

Dalla (7.2.7) si ottiene

$$x_3 = c \quad \text{con } c \in [0, +\infty).$$

Sostituendo tale risultato nelle (7.2.5), (7.2.6), deduciamo

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\lambda} = -\Omega[x_2 - g(c)] &\implies \frac{d}{d\lambda}[x_1 - f(c)] = -\Omega[x_2 - g(c)], \\ \frac{dx_2}{d\lambda} = \Omega[x_1 - f(c)] &\implies \frac{d}{d\lambda}[x_2 - g(c)] = \Omega[x_1 - f(c)]. \end{aligned}$$

Osserviamo che le due equazioni scritte sopra si presentano nella stessa forma delle (7.1.5) e (7.1.6) con la sostituzione di  $[x_1 - f(c)]$  e  $[x_2 - g(c)]$  a  $x_1$  e  $x_2$  rispettivamente. Se si procede in maniera analoga a quanto abbiamo fatto per le (7.1.5) e (7.1.6), deduciamo che le equazioni cartesiane delle linee di flusso relative a  $\vec{v}$  sono le seguenti:

$$\begin{aligned} [x_1 - f(c)]^2 + [x_2 - g(c)]^2 &= R^2, \\ x_3 &= c \end{aligned}$$

con  $R$  costante positiva e  $c \in [0, +\infty)$ .

Dunque tali linee di flusso sono circonferenze che giacciono su piani di equazione  $x_3 = c$  i cui centri sono i punti di coordinate  $(f(c), g(c), 0)$  con  $c \in [0, +\infty)$ .

Il luogo dei centri di queste circonferenze è il cammino

$$\Lambda = \{P(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E} \mid x_1 = f(c), x_2 = g(c), x_3 = c, c \in [0, +\infty)\}.$$

Cerchiamo ora di determinare  $f, g$  in modo che  $(\vec{v}, p^*)$  sia soluzione del sistema di equazioni che governa il moto del fluido. In primo luogo è facile verificare che è soddisfatta l'equazione:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{in } S.$$

Infatti

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0.$$

Consideriamo ora l'equazione vettoriale (7.1.2) che equivale alle tre equazioni scalari:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i} + \nu \Delta v_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (7.2.8)$$

Si vede immediatamente che per  $i = 3$  la (7.2.8) è soddisfatta banalmente.

Per  $i = 1$  otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x_j} v_j &= -\frac{\partial p^*}{\partial x_1} + \nu \Delta v_1 \implies \\ -\Omega^2 [x_1 - f(x_3)] &= -\Omega^2 [x_1 - f_0] + \nu \Omega g''(x_3) \implies \\ \nu g''(x_3) - \Omega f(x_3) &= -\Omega f_0. \end{aligned}$$

Analogamente per  $i = 2$  deduciamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_2}{\partial x_j} v_j &= -\frac{\partial p^*}{\partial x_2} + \nu \Delta v_2 \implies \\ -\Omega^2 [x_2 - g(x_3)] &= -\Omega^2 [x_2 - g_0] - \nu \Omega f''(x_3) \implies \\ \nu f''(x_3) + \Omega g(x_3) &= \Omega g_0. \end{aligned}$$

In conclusione otteniamo che la coppia  $(f, g)$  soddisfa al seguente sistema di equazioni:

$$\nu g''(x_3) - \Omega f(x_3) = -\Omega f_0, \quad (7.2.9)$$

$$\nu f''(x_3) + \Omega g(x_3) = \Omega g_0. \quad (7.2.10)$$

che, dividendo entrambi i membri delle due equazioni per  $\nu$ , si può scrivere nella forma:

$$g''(x_3) - \frac{\Omega}{\nu} f(x_3) = -\frac{\Omega}{\nu} f_0, \quad (7.2.11)$$

$$f''(x_3) + \frac{\Omega}{\nu} g(x_3) = \frac{\Omega}{\nu} g_0. \quad (7.2.12)$$

Vediamo dunque che, avendo richiesto che le componenti della rappresentazione analitica della velocità abbiano la forma (7.2.2), (7.2.3), (7.2.4), lo studio del moto, governato inizialmente da un sistema di equazioni alle derivate parziali, è ricondotto ad un sistema di due equazioni differenziali ordinarie. Per tale motivo le (7.2.2), (7.2.3), (7.2.4) sono dette **trasformazioni di similarità**.

Il sistema (7.2.11), (7.2.12) è un sistema differenziale di due equazioni in due incognite, del II ordine, lineare, a coefficienti costanti, non omogeneo.

Cominciamo col determinarne la soluzione generale, che ovviamente dipenderà da quattro costanti arbitrarie. Potremmo seguire diversi metodi.

Un metodo potrebbe essere quello di ricondurre il sistema dato ad un sistema differenziale di quattro equazioni differenziali del I ordine in quattro incognite assumendo come incognite, oltre alle funzioni  $f$  e  $g$  anche le loro derivate prime  $f'$  e  $g'$ , ed utilizzando poi le tecniche relative ai sistemi lineari del I ordine a coefficienti costanti non omogenei. Tuttavia questo metodo è molto lungo e complesso.

Un secondo metodo che potremmo seguire è quello di ricondurci ad un'unica equazione differenziale in una sola incognita, derivando più volte le due equazioni del sistema, ma nel nostro caso arriveremmo ad un'equazione differenziale lineare del IV ordine e per determinarne la soluzione generale dovremmo calcolare le radici dell'equazione caratteristica, equazione algebrica del IV ordine.

Noi seguiremo un terzo metodo molto più semplice grazie alla forma particolare delle equazioni (7.2.11), (7.2.12).

Introduciamo la funzione a valori complessi  $F(x_3)$  così definita:

$$F(x_3) = f(x_3) + i g(x_3) \quad \forall x_3 \in [0, +\infty) \quad (7.2.13)$$

e il numero complesso:

$$F_0 = f_0 + i g_0, \quad (7.2.14)$$

dove  $i$  è l'unità immaginaria.

Ora moltiplichiamo per  $i$  entrambi i membri della (7.2.11) e all'equazione così ottenuta sommiamo membro a membro la (7.2.12):

$$f''(x_3) + i g''(x_3) - i \frac{\Omega}{\nu} [f(x_3) + i g(x_3)] = -i \frac{\Omega}{\nu} [f_0 + i g_0]. \quad (7.2.15)$$

Utilizzando le posizioni (7.2.13), (7.2.14), la (7.2.15) diventa:

$$F''(x_3) - i \frac{\Omega}{\nu} F(x_3) = -i \frac{\Omega}{\nu} F_0, \quad (7.2.16)$$

che è un'equazione differenziale ordinaria del II ordine a coefficienti costanti (complessi) non omogenea nella funzione incognita a valori complessi  $F(x_3)$ . Per determinarne la soluzione generale possiamo procedere come per le equazioni lineari non omogenee a coefficienti reali con funzione incognita reale.

La soluzione generale della (7.2.16) la cerchiamo della forma:

$$F = \hat{F} + F^*$$

con  $\hat{F}$  soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla (7.2.16) e  $F^*$  soluzione particolare dell'equazione completa.

L'equazione omogenea associata alla (7.2.16) è la seguente:

$$F''(x_3) - i \frac{\Omega}{\nu} F(x_3) = 0.$$

La sua equazione caratteristica è data da:

$$\lambda^2 - i \frac{\Omega}{\nu} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda^2 = i \frac{\Omega}{\nu}.$$

Tenendo presente che l'argomento principale dell'unità immaginaria è  $\frac{\pi}{2}$ , otteniamo che le due determinazioni della radice quadrata (in campo complesso) del numero  $i \frac{\Omega}{\nu}$  sono:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} \left[ \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right] = \sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}} (1 + i),$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{4} + \pi \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{4} + \pi \right) \right] = -\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}} (1 + i).$$

Se poniamo:

$$m = \sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}},$$

allora la soluzione generale dell'omogenea associata alla (7.2.16) è:

$$\hat{F}(x_3) = C_1 e^{-m(1+i)x_3} + C_2 e^{m(1+i)x_3} \quad (7.2.17)$$

con  $C_1$  e  $C_2$  costanti arbitrarie a valori complessi.

Per quanto riguarda  $F^*$ , la cerchiamo della forma:

$$F^* = A \quad \text{con } A = \text{costante.}$$

Sostituendo nella (7.2.16), otteniamo

$$-i \frac{\Omega}{\nu} A = -i \frac{\Omega}{\nu} F_0 \quad \implies \quad A = F_0.$$

In conclusione la soluzione generale della (7.2.16) è :

$$F(x_3) = C_1 e^{-m(1+i)x_3} + C_2 e^{m(1+i)x_3} + F_0. \quad (7.2.18)$$

Per determinare le due costanti arbitrarie  $C_1$  e  $C_2$  sfruttiamo le altre condizioni cui deve soddisfare  $\vec{v}$  che ancora non abbiamo sfruttato.

In particolare la condizione 3) richiede che le componenti di  $\vec{v}$  siano limitate rispetto a  $x_3 \in [0, +\infty)$  e che quindi siano limitate le due funzioni  $f$  e  $g$ . Se allora teniamo presente che  $e^{mx_3}$  tende a  $+\infty$  per  $x_3 \rightarrow +\infty$ , per avere la limitatezza dobbiamo porre

$$C_2 = 0.$$

Dunque la (7.2.18) si riduce a:

$$F(x_3) = C_1 e^{-m(1+i)x_3} + F_0. \quad (7.2.19)$$

Sfruttiamo ora la condizione al contorno per determinare  $C_1$ :

$$\vec{v} \Big|_{\Pi} = \vec{\Omega} \times (P - O) \Big|_{\Pi}$$

fornisce:

$$v_1(x_1, x_2, 0) = -\Omega x_2, \quad v_2(x_1, x_2, 0) = \Omega x_1, \quad v_3(x_1, x_2, 0) = 0.$$

La condizione su  $v_3$  è soddisfatta, mentre le condizioni su  $v_1$  e  $v_2$ , per la forma che abbiamo richiesto al campo della velocità, comportano:

$$\begin{aligned} -\Omega [x_2 - g(0)] = -\Omega x_2 &\implies g(0) = 0, \\ \Omega [x_1 - f(0)] = \Omega x_1 &\implies f(0) = 0. \end{aligned}$$

Dunque dalla condizione al contorno di aderenza ne discende:

$$F(0) = 0,$$

che fornisce:

$$C_1 = -F_0.$$

Dalla (7.2.19) otteniamo perciò:

$$F(x_3) = F_0[1 - e^{-mx_3}(\cos mx_3 - i \sin mx_3)] \quad \forall x_3 \in [0, +\infty). \quad (7.2.20)$$

Separiamo la parte reale e la parte immaginaria:

$$f(x) + i g(x_3) = (f_0 + i g_0) [1 - e^{-mx_3}(\cos mx_3 - i \sin mx_3)],$$

da cui

$$\begin{aligned} f(x_3) &= f_0 (1 - e^{-mx_3} \cos mx_3) - g_0 e^{-mx_3} \sin mx_3, \\ g(x_3) &= g_0 (1 - e^{-mx_3} \cos mx_3) + f_0 e^{-mx_3} \sin mx_3 \quad \forall x_3 \in [0, +\infty). \end{aligned} \quad (7.2.21)$$

I risultati ottenuti ci portano ad enunciare il seguente

**Teorema 7.1.** *Sia dato un fluido newtoniano, incomprimibile, omogeneo, che occupi il semispazio  $S = \{P(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E} : x_3 \geq 0\}$  limitato dal piano rigido  $x_3 = 0$  rotante attorno all'asse  $Ox_3$  fissato, con velocità angolare costante  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_3$ ,  $\Omega > 0$ . Allora, se il campo della pressione modificata è dato dalla (7.2.1), la velocità  $\vec{v}$  di tale fluido in moto stazionario, soddisfacente le ipotesi 1), 2), 3) ha le componenti date da (7.2.2), (7.2.3), (7.2.4) con  $f$  e  $g$  definite in (7.2.21).*

Possiamo fare alcune osservazioni.

**Osservazione 7.1.** Se facciamo il limite per  $x_3 \rightarrow +\infty$  in entrambi i membri delle (7.2.21) otteniamo:

$$\lim_{x_3 \rightarrow +\infty} f(x_3) = f_0, \quad \lim_{x_3 \rightarrow +\infty} g(x_3) = g_0.$$

Questo risultato stabilisce che per  $x_3 \rightarrow +\infty$ ,  $\vec{v}$  differisce dalla velocità nel moto rotatorio uniforme attorno all'asse  $Ox_3$  con velocità angolare  $\vec{\Omega}$  per il vettore costante  $\vec{v}_0 = \Omega(g_0 \vec{e}_1 - f_0 \vec{e}_2)$ . Infatti all'infinito abbiamo:

$$v_1 = -\Omega(x_2 - g_0), \quad v_2 = \Omega(x_1 - f_0), \quad v_3 = 0.$$

Notiamo che all'infinito si ha ancora un moto rotatorio uniforme con velocità angolare  $\vec{\Omega}$  non attorno all'asse  $Ox_3$ , ma attorno all'asse  $P_0x'_3$ .

**Osservazione 7.2.** Il gradiente del campo di pressione  $p^*$  dato dalla (7.2.1) differisce dal gradiente di  $p^{*(R)}$  per il vettore costante  $\vec{c}_0 = -\Omega^2(f_0 \vec{e}_1 + g_0 \vec{e}_2)$  che è ortogonale al vettore  $\vec{v}_0$ . Infatti:

$$\begin{aligned} \text{grad } p^{*(R)} &= \Omega^2(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2), \\ \text{grad } p^* &= \Omega^2[(x_1 - f_0) \vec{e}_1 + (x_2 - g_0) \vec{e}_2] = \text{grad } p^{*(R)} + \vec{c}_0. \end{aligned}$$

Notiamo che  $\vec{c}_0$  è parallelo al vettore  $P_0 - 0 = f_0 \vec{e}_1 + g_0 \vec{e}_2$  che determina la traslazione dell'asse di rotazione del moto rotatorio all'infinito.

**Osservazione 7.3.** Per ogni  $(f_0, g_0) \in \mathbb{R}^2$  esiste uno ed un sol moto del tipo detto sopra. Inoltre, se  $f_0 = g_0 = 0$ , ritroviamo la soluzione banale  $(\vec{v}^{(R)}, p^{*(R)})$ , come doveva essere.

**Osservazione 7.4.** Consideriamo il cammino  $\Lambda$ , luogo dei centri delle circonferenze che costituiscono le linee di flusso del campo  $\vec{v}$ . Come abbiamo visto, le sue equazioni parametriche cartesiane sono:

$$x_1 = f(c), \quad x_2 = g(c), \quad x_3 = c, \quad c \in [0, +\infty).$$

Se  $c = 0$  otteniamo il punto di  $\Lambda$  di coordinate  $(f(0) = 0, g(0) = 0, 0)$ ; dunque il cammino  $\Lambda$  parte dall'origine  $O$ . Per  $c \rightarrow +\infty$ , abbiamo:

$$x_1 \rightarrow f_0, \quad x_2 \rightarrow g_0, \quad x_3 \rightarrow +\infty.$$

Perciò per  $x_3 \rightarrow +\infty$  il cammino  $\Lambda$  tende a sovrapporsi all'asse  $P_0x'_3$  e quindi a disporsi parallelamente all'asse  $Ox_3$ .

**Osservazione 7.5.** Osserviamo che se  $\nu = 0$ , ossia se il fluido è perfetto, nell'ipotesi che  $p^*$  abbia la forma (7.2.1), e che le componenti della rappresentazione analitica della velocità siano date dalle (7.2.2), (7.2.3), (7.2.4), il sistema (7.2.9), (7.2.10) ha come unica soluzione

$$f(x_3) = f_0, \quad g(x_3) = g_0 \quad \forall x_3 \geq 0.$$

Dunque nel caso di fluido perfetto, il moto in tutto il semispazio risulta un moto rigido di rotazione uniforme con velocità angolare  $\Omega$  attorno all'asse  $P_0x'_3$ .

Mostriamo ora alcuni esempi numerici.  
I grafici delle funzioni  $f$  e  $g$  sono dati per

$$f_0 = 10 \text{ m}, \quad g_0 = 2 \text{ m}, \quad \nu = 0.001 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

Nelle Figure 7.2 e 7.4 sono rappresentati i grafici di  $f$  e  $g$  quando  $\Omega = 1 \text{ rad s}^{-1}$  e  $\Omega = 10 \text{ rad s}^{-1}$  rispettivamente, mentre le Figure 7.3 e 7.5 mostrano i grafici del cammino  $\Lambda$  luogo dei centri delle circonferenze che costituiscono le linee di flusso del campo  $\vec{v}$  con le rispettive proiezioni.

Esaminando le Figure 7.2 e 7.4 vediamo che a contatto col piano  $x_3 = 0$  c'è una regione in cui il moto del fluido non è un moto rigido di rotazione, mentre al di là di questa il moto risulta un moto rigido di rotazione uniforme con velocità angolare  $\Omega$  attorno all'asse  $P_0x'_3$ , come avremmo in tutto il semispazio se il fluido fosse perfetto. Allora la natura viscosa del fluido newtoniano si manifesta solo in una regione a contatto col piano rotante, regione che viene detta **strato limite** o **boundary layer** ed al di là di tale strato il fluido si comporta come un fluido perfetto.

Lo spessore del boundary layer, come si deduce tenendo presente l'espressione di  $m = \sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}}$ , diminuisce all'aumentare di  $\Omega$  ed al diminuire di  $\nu$ .

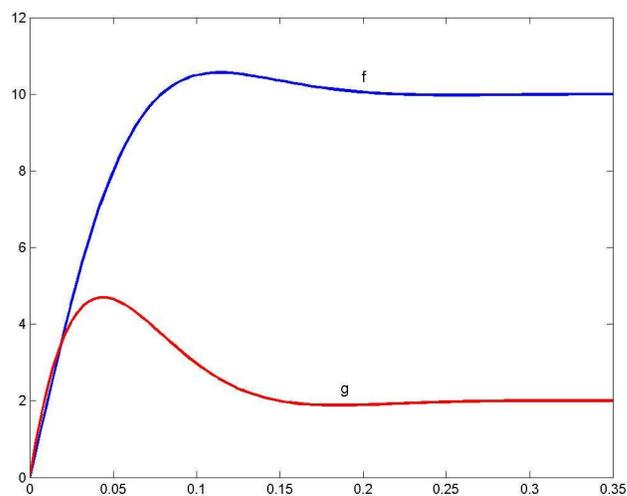


Figura 7.2: Grafici di  $f$  e  $g$  quando  $\Omega = 1 \text{ rad s}^{-1}$ .

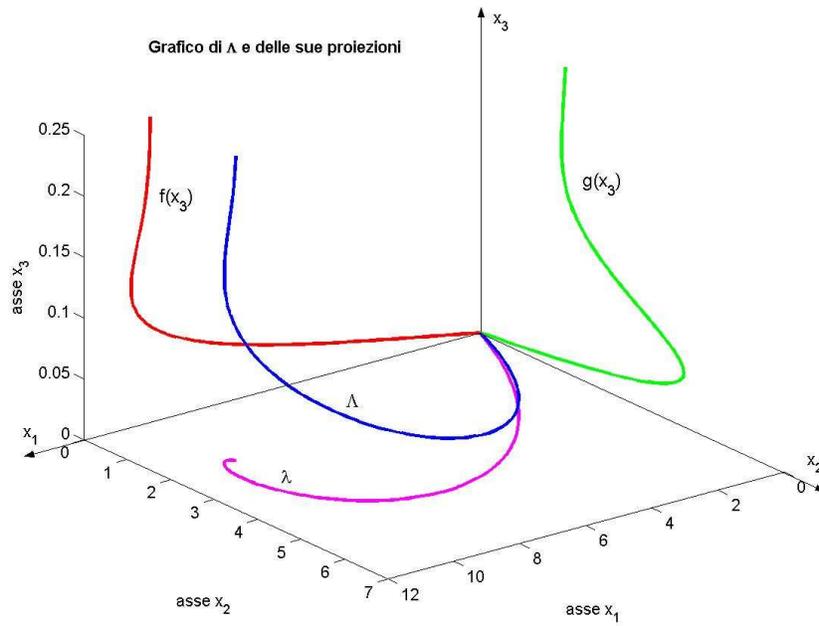


Figura 7.3: Grafico di  $\Lambda$  e delle sue proiezioni quando  $\Omega = 1 \text{ rad s}^{-1}$ .

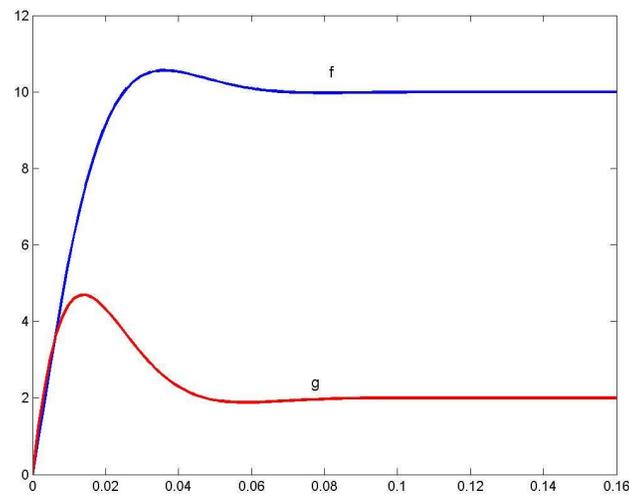


Figura 7.4: Grafici di  $f$  e  $g$  quando  $\Omega = 10 \text{ rad s}^{-1}$ .

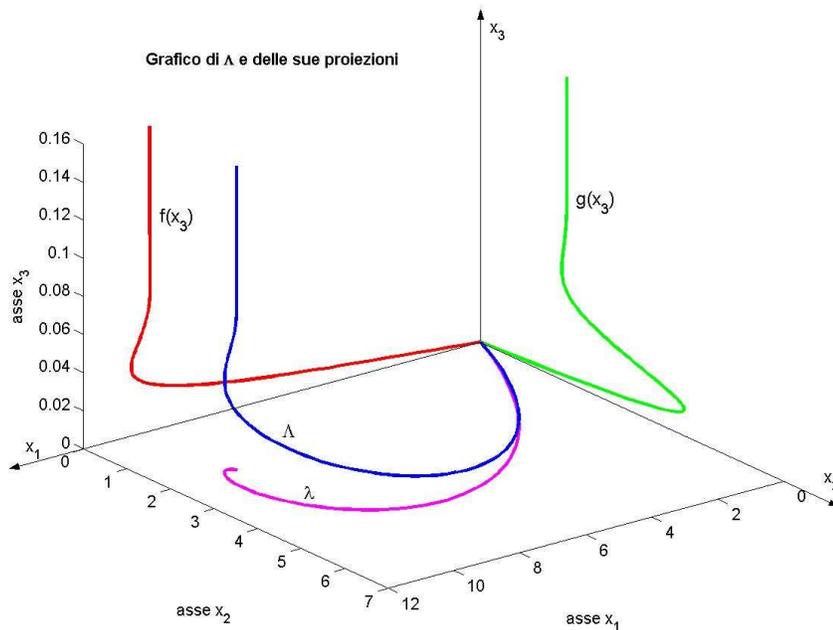


Figura 7.5: Grafico di  $\Lambda$  e delle sue proiezioni quando  $\Omega = 10 \text{ rad s}^{-1}$ .

Del problema esaminato sopra si possono anche studiare alcune varianti. Possiamo ad esempio supporre che il fluido sia compreso tra due piani paralleli  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  che ruotano uniformemente con la stessa velocità angolare  $\vec{\Omega}$  attorno ad uno stesso asse ad essi normale.

Il problema può essere ulteriormente complicato assumendo che i due piani ruotino attorno a due assi diversi ad essi normali. Quest'ultima variante è molto interessante dal punto di vista fisico perché trova applicazione nel **reometro**, strumento che viene utilizzato per misurare il coefficiente di viscosità dei liquidi.

**1667. MOTI INDOTTI DA UN PIANO ROTANTE PER UN FLUIDO NEWTONIANO INCOMPRESSIBILE**

# Capitolo 8

## Moti con punti di ristagno per un fluido newtoniano

### 8.1 Premesse

I moti con uno o più punti di ristagno si presentano quando un liquido o un gas reale si muove verso o attorno ad un ostacolo oppure quando un ostacolo si muove entro un fluido.

Si definisce **punto di ristagno** un punto appartenente alla frontiera dell'ostacolo o interno alla regione occupata dal fluido in cui la velocità di questo è nulla. I più semplici moti di tale tipo si verificano quando un fluido provenendo dall'infinito colpisce una parete rigida, piana, fissa rispetto all'osservatore. E' comunque da rilevare che i risultati che si ottengono in questo caso particolare si possono estendere a moti più complessi per i quali l'ostacolo ha forma arbitraria, purché ci si limiti a considerare il moto in un intorno del piano tangente alla frontiera dell'ostacolo in un dato punto.

Si possono avere moti con punti di ristagno sia dipendenti dal tempo sia stazionari, sia piani che tridimensionali. Nel caso in cui l'ostacolo sia una parete piana e che il moto sia piano, il fluido può colpire la parete perpendicolarmente, ed allora si parla di **moto piano ortogonale** oppure obliquamente ed allora si parla di **moto piano obliquo**.

I moti con punti di ristagno hanno un notevole interesse fisico perché appaiono molto spesso nel mondo reale come componenti di moti più complessi e trovano numerose applicazioni in vari settori dell'industria e dell'ingegneria, in particolare in aerodinamica. Inoltre hanno un notevole interesse anche dal punto di vista matematico perché mediante trasformazioni di similarità è possibile ricondurre il problema del moto con punti di ristagno per fluidi anche molto complessi ad un problema in cui interviene un sistema di equazioni differenziali ordinarie con

opportune condizioni ai limiti, più semplice da risolvere.

In questo capitolo ci limiteremo a studiare il moto stazionario piano ortogonale di un fluido perfetto e di un fluido newtoniano, entrambi incomprimibili ed omogenei, nel caso in cui l'ostacolo è costituito da una parete rigida, piana e fissa rispetto all'osservatore. Tale moto è caratterizzato dalla presenza sull'ostacolo di un punto di ristagno.

Per affrontare il problema del moto piano ortogonale con un punto di ristagno per un fluido newtoniano incomprimibile considereremo dapprima l'analogo moto per un fluido perfetto incomprimibile.

## 8.2 Moto piano ortogonale con punti di ristagno per un fluido perfetto incomprimibile

Consideriamo un fluido perfetto, incomprimibile ed omogeneo. Sia  $Ox_1x_2x_3$  il riferimento cartesiano ortonormale associato all'osservatore. Supponiamo che il fluido durante il moto occupi la regione  $S$  al di sopra del piano di equazione  $x_2 = 0$  per cui

$$S = \{ P(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E} : (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2, x_2 \geq 0 \}. \quad (8.2.1)$$

Assumiamo inoltre che il moto sia stazionario dal punto di vista meccanico e che avvenga in assenza di forze esterne di massa.

Abbiamo dunque:

$$\vec{v} = \vec{v}(P), \quad p = p(P), \quad \vec{F}(P) = \vec{0} \quad \forall P \in S.$$

Di conseguenza, l'equazione fondamentale della meccanica dei fluidi perfetti,

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} - \text{grad } p,$$

per le ipotesi fatte sul fluido e sul moto, si riduce a:

$$\rho \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} = -\text{grad } p \quad (8.2.2)$$

dove  $\rho$  è una costante positiva.

A quest'equazione dobbiamo associare la condizione di incomprimibilità

$$\text{div } \vec{v} = 0. \quad (8.2.3)$$

Se assumiamo che la frontiera del semispazio occupata dal fluido sia una parete materiale rigida e fissa rispetto all'osservatore, aggiungiamo alle due equazioni

precedenti la condizione al contorno di impenetrabilità:

$$\vec{v} \cdot \vec{n}|_{x_2=0} = 0 \quad (8.2.4)$$

dove  $\vec{n}$  è il versore normale al piano di equazione  $x_2 = 0$ , rivolto verso l'esterno di  $S$ .

Poichè

$$\vec{n} = -\vec{e}_2$$

la (8.2.4) fornisce

$$v_2|_{x_2=0} = 0.$$

Ora, per il moto piano con punti di ristagno per un fluido perfetto, che si muove verso la parete piana di equazione  $x_2 = 0$  perpendicolarmente ad essa il campo della velocità ha la rappresentazione analitica di componenti:

$$v_1 = a x_1, \quad v_2 = -a x_2, \quad v_3 = 0 \quad \forall (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x_2 \geq 0 \quad (8.2.5)$$

con  $a$  costante positiva.

Osserviamo che questo moto presenta sull'ostacolo, costituito dalla parete piana, un punto di ristagno nell'origine  $O$  poichè in tale punto le tre componenti della velocità  $v_1, v_2, v_3$  sono nulle. Se ci limitiamo a considerare il moto nel piano  $Ox_1x_2$  l'origine è il solo punto di ristagno, se invece consideriamo il moto nello spazio tutti i punti dell'asse  $Ox_3$  sono punti di ristagno.

Inoltre si tratta di un **moto potenziale**, dal momento che il campo della velocità  $\vec{v}$  proviene da un potenziale cinetico  $\gamma = \gamma(P)$ .

Precisamente si ha:

$$\vec{v} = \text{grad } \gamma,$$

dove

$$\gamma(P) = \frac{a}{2}(x_1^2 - x_2^2), \quad \forall P(x_1, x_2, x_3) \in S \quad (8.2.6)$$

a meno di una costante arbitraria inessenziale.

E' immediato verificare che il campo della velocità così definito soddisfa la condizione di incomprimibilità e la condizione al contorno. Resta da determinare il campo della pressione in modo tale che  $(\vec{v}, p)$  soddisfi l'equazione

$$\rho \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} = -\text{grad } p.$$

Ma possiamo osservare che, trattandosi di un fluido perfetto, incomprimibile ed omogeneo, soggetto a forze esterne di massa identicamente nulle ( $\vec{F} = \vec{0}$ ) con il campo della velocità  $\vec{v}$  proveniente da un potenziale cinetico  $\gamma$ , ed essendo il

moto stazionario dal punto di vista meccanico, sono soddisfatte le ipotesi del **II teorema di Bernoulli**. Perciò si ha:

$$\frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{costante in } S$$

ovvero

$$p = \text{costante} - \frac{\rho \vec{v}^2}{2}.$$

Tenendo conto dell'espressione di  $\vec{v}$ , deduciamo :

$$p = p_0 - \rho \frac{a^2}{2}(x_1^2 + x_2^2),$$

dove la costante  $p_0$  è il valore che la pressione assume nell'origine, punto di ristagno.

Osserviamo che  $p_0$  rappresenta il valore massimo assunto dalla pressione.

Ci proponiamo infine di determinare le linee di flusso per il moto sopra considerato. Per determinarle possiamo seguire due strade.

Rifacciamoci dapprima alla definizione di linee di flusso. Perciò dobbiamo procurarci le curve  $P(\lambda)$  che sono soluzioni massimali dell'equazione del I ordine vettoriale

$$\frac{dP}{d\lambda} = \vec{v}(P)$$

che è equivalente al sistema differenziale di tre equazioni scalari:

$$\frac{dx_i}{d\lambda} = v_i(x_1, x_2, x_3) \quad i = 1, 2, 3$$

le cui incognite sono le tre funzioni  $x_1 = x_1(\lambda)$ ,  $x_2 = x_2(\lambda)$ ,  $x_3 = x_3(\lambda)$ .

Nel nostro caso il sistema assume la forma seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{d\lambda} = ax_1 \\ \frac{dx_2}{d\lambda} = -ax_2 \\ \frac{dx_3}{d\lambda} = 0. \end{array} \right. \quad (8.2.7)$$

Questo sistema è formato da tre equazioni disaccoppiate del I ordine lineari, a coefficienti costanti, omogenee. La sua soluzione generale è

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 e^{a\lambda} \\ x_2 &= C_2 e^{-a\lambda} \\ x_3 &= C_3 \end{aligned}$$

con  $C_1, C_2, C_3$  costanti arbitrarie e  $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ .

Quindi le equazioni cartesiane parametriche con parametro  $\lambda$  delle linee di flusso sono:

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 e^{a\lambda} \\ x_2 &= C_2 e^{-a\lambda} \\ x_3 &= C_3 \quad \forall \lambda \in (-\infty; +\infty). \end{aligned} \quad (8.2.8)$$

In corrispondenza di ogni terna  $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$ , con  $C_2 \geq 0$  (perchè abbiamo assunto per ipotesi che il fluido si muova rimanendo nella regione dello spazio al di sopra del piano  $x_2 = 0$ ), otteniamo una singola linea di flusso.

Osserviamo che le linee di flusso sono cammini piani che giacciono su piani paralleli al piano  $Ox_1x_2$ . Le linee di flusso con  $C_3 = 0$  stanno sul piano  $Ox_1x_2$ .

Inoltre le linee di flusso corrispondenti a  $C_1 \neq 0$  e  $C_2 = 0$  sono cammini rettilinei paralleli all'asse  $Ox_1$ . Se poi  $C_3 = 0$ , allora le linee di flusso coincidono con il semiasse positivo o il semiasse negativo  $Ox_1$  a seconda che  $C_1$  sia  $> 0$  o  $< 0$ .

Se  $C_1 = 0$  e  $C_2 \neq 0$  le linee di flusso sono cammini rettilinei paralleli al semiasse positivo  $Ox_2$ . Se in più  $C_3 = 0$ , allora le linee di flusso coincidono con il semiasse positivo  $Ox_2$ .

Se  $C_1 = 0$  e  $C_2 = 0$  la linea di flusso degenera in un singolo punto.

Infine nel caso  $C_1 \neq 0$  e  $C_2 \neq 0$  possiamo eliminare dal sistema (8.2.8) il parametro  $\lambda$ , usando la seconda equazione parametrica del sistema, ossia:

$$e^{-a\lambda} = \frac{x_2}{C_2}$$

che è equivalente a:

$$e^{a\lambda} = \frac{C_2}{x_2}.$$

Sostituendo nella prima equazione del sistema (8.2.8) deduciamo:

$$x_1 = C_1 \frac{C_2}{x_2} \quad \Rightarrow \quad x_1 x_2 = C_1 C_2 \quad \text{cioè } x_1 x_2 = \text{costante}.$$

Se poi teniamo presente che  $x_3 = C_3$ , concludiamo che le linee di flusso corrispondenti a  $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0$  sono rami di iperboli che giacciono su piani di equazione  $x_3 = \text{costante}$ .

Alla stessa conclusione possiamo pervenire determinando, per il moto che stiamo considerando, la funzione di corrente  $\psi(x_1, x_2)$  che abbiamo introdotto nel paragrafo 1.4, definizione 1.33. Se riprendiamo l'esempio 1.2, vediamo che il moto piano stazionario preso in considerazione in tale esempio è un moto piano ortogonale con un punto di ristagno per un fluido perfetto. Dunque ne abbiamo già determinato la funzione di corrente e questa è data da

$$\psi(x_1, x_2) = ax_1x_2 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \quad \forall x_2 \geq 0.$$

Sempre seguendo l'esempio 1.2, deduciamo anche che le linee di flusso sono cammini piani giacenti sui piani  $x_3 = \text{costante}$  tali che

$$\begin{aligned} ax_1x_2 &= C & \forall x_1 \in \mathbb{R} \quad \forall x_2 \geq 0 \\ x_3 &= C'. \end{aligned}$$

con  $C$  e  $C'$  costanti arbitrarie. Se  $C = 0$ , otteniamo che le linee di flusso sono cammini rettilinei paralleli all'asse  $Ox_1$  o paralleli al semiasse positivo  $Ox_2$ . In particolare, se  $C' = 0$ , le linee di flusso coincidono con l'asse  $Ox_1$  o col semiasse positivo  $Ox_2$ .

Se  $C \neq 0$ , le linee di flusso sono rami di iperbole che giacciono sui piani  $x_3 = \text{costante}$ .

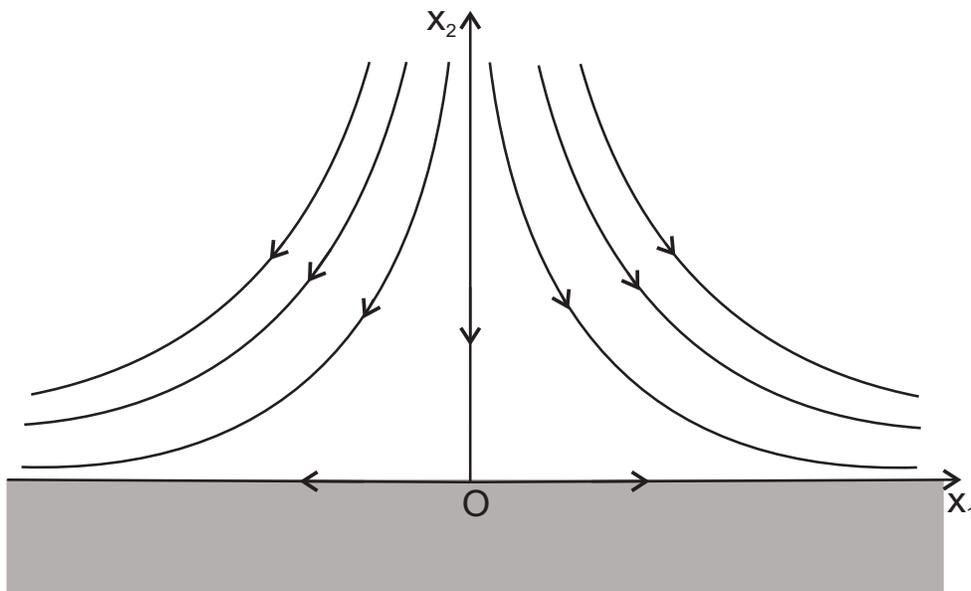


Figura 8.1: Linee di flusso nel piano  $Ox_1x_2$

### 8.3 Moto piano ortogonale con punti di ristagno per un fluido newtoniano incomprimibile: impostazione del problema

Affronteremo ora lo studio del moto piano ortogonale con punti di ristagno per un fluido newtoniano, incomprimibile ed omogeneo.

Fissiamo il riferimento cartesiano ortonormale  $Ox_1x_2x_3$ . Assumiamo ancora che

il liquido reale che schematizziamo con questo modello di fluido parta dall'infinito e si muova verso la parete piana, fissa, rigida di equazione  $x_2 = 0$ , perpendicolarmente ad essa. Il moto sia piano, con piano direttore  $Ox_1x_2$ .

La regione  $S$  occupata dal fluido sia il semispazio al di sopra del piano  $x_2 = 0$  per cui

$$S = \{ P(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E} : (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2, x_2 \geq 0 \}.$$

Supponiamo che il moto sia stazionario dal punto di vista meccanico e avvenga in assenza di forze esterne di massa. Abbiamo perciò

$$\vec{v} = \vec{v}(P), \quad p = p(P), \quad \vec{F}(P) = \vec{0} \quad \forall P \in S.$$

Le equazioni che governano il moto del fluido sono:

$$\begin{aligned} \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} &= \nu \Delta \vec{v} - \text{grad } \frac{p}{\rho}, \\ \text{div } \vec{v} &= 0. \end{aligned} \quad (8.3.1)$$

Alle equazioni (8.3.1) va poi associata la condizione al contorno di aderenza per  $\vec{v}$ :

$$\vec{v}|_{x_2=0} = \vec{0}. \quad (8.3.2)$$

Studiare il problema del moto consiste, quindi, nel determinare in  $S$  la coppia  $(\vec{v}, p)$  soddisfacente alle due equazioni scritte sopra ed alla condizione al contorno di aderenza tale che  $\vec{v} \in \mathcal{C}^2(S)$ ,  $p \in \mathcal{C}^1(S)$ .

Per il moto piano ortogonale con un punto di ristagno di un fluido perfetto abbiamo visto che la velocità ha le componenti date da:

$$v_1 = a x_1 \quad v_2 = -a x_2 \quad v_3 = 0 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}, \quad \forall x_2 \geq 0$$

con  $a$  costante e la pressione è fornita dall'equazione di Bernoulli

$$p = p_0 - \rho \frac{a^2}{2} (x_1^2 + x_2^2).$$

Come è facile verificare, la coppia  $(\vec{v}, p)$  con  $\vec{v}, p$  definite nel modo detto sopra, soddisfa il sistema (8.3.1) che governa il moto del fluido newtoniano, ma non verifica la condizione di aderenza (8.3.2), poiché la prima componente della velocità,  $v_1$ , è non nulla sulla parete  $x_2 = 0$ .

Dobbiamo allora modificare questa soluzione per prendere in considerazione l'effetto della viscosità espresso dalla condizione di aderenza.

Cerchiamo quindi una soluzione avente un campo della velocità  $\vec{v}$  la cui rappresentazione analitica abbia le componenti della forma:

$$v_1 = a x_1 f'(x_2), \quad v_2 = -a f(x_2), \quad v_3 = 0, \quad (8.3.3)$$

dove  $f = f(x_2)$  è una funzione da determinarsi sufficientemente regolare.

Le (8.3.3) rappresentano le equazioni della trasformazione di similarità poiché, come vedremo, consentono di ricondurre lo studio del moto ad un'equazione differenziale ordinaria.

Osserviamo che la condizione di incomprimibilità è automaticamente soddisfatta. Infatti

$$\operatorname{div} \vec{v} = v_{i,i} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = a f'(x_2) - a f'(x_2) = 0.$$

Si devono cercare, allora, una funzione  $f = f(x_2)$  definita per  $x_2 \geq 0$  e una funzione  $p = p(x_1, x_2, x_3)$  definita per  $(x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2$  e  $x_2 \geq 0$  tali che sia soddisfatta l'equazione di Navier-Stokes e sia verificata la condizione di velocità nulla su  $x_2 = 0$ .

D'altra parte l'esperienza mostra che la viscosità del fluido si manifesta in maniera rilevante solo in una regione adiacente alla parete; dobbiamo allora richiedere che  $f$  e  $p$  assicurino che per  $x_2 \rightarrow +\infty$  il fluido newtoniano si comporti come un fluido perfetto incomprimibile omogeneo di uguale densità.

In conclusione, affinché sia garantita la condizione di aderenza alla parete, imponiamo a  $f$  di soddisfare alle due condizioni:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0 \tag{8.3.4}$$

e affinché all'infinito il moto del fluido newtoniano abbia lo stesso andamento del moto con punti di ristagno per un fluido perfetto, incomprimibile ed omogeneo richiediamo che

$$\lim_{x_2 \rightarrow +\infty} f'(x_2) = 1. \tag{8.3.5}$$

La condizione (8.3.5) implica

$$\lim_{x_2 \rightarrow +\infty} v_1 = a x_1,$$

mentre per  $v_2$  possiamo soltanto concludere che

$$v_2 \sim -a(x_2 - A) \quad \text{per } x_2 \rightarrow +\infty$$

dove  $A$  è una costante che può assumere qualsiasi valore, poichè, come si verifica facilmente con la regola di de L'Hôpital, se  $f'(x_2) = 1$  per  $x_2 \rightarrow +\infty$ , allora

$$\lim_{x_2 \rightarrow +\infty} \frac{f(x_2)}{x_2 - A} = 1,$$

ossia  $f \sim x_2 - A$  per  $x_2 \rightarrow +\infty$ .

In effetti, come vedremo successivamente dalla risoluzione numerica del problema, esiste una costante  $A$  strettamente positiva, di cui determineremo il valore, tale che

$$\lim_{x_2 \rightarrow +\infty} [f(x_2) - x_2] = -A.$$

Dunque, per  $x_2 \rightarrow +\infty$ , il moto piano ortogonale con punti di ristagno per un fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo ha lo stesso andamento del moto piano ortogonale con punti di ristagno per un fluido perfetto incomprimibile ed omogeneo di uguale densità di massa che si muove non verso la parete di equazione  $x_2 = 0$ , bensì di equazione  $x_2 = A$  e per il quale velocità e pressione hanno la forma seguente:

$$\begin{aligned} v_1 &= a x_1, & v_2 &= -a(x_2 - A), & v_3 &= 0, \\ p &= p_0 - \rho \frac{a^2}{2} [x_1^2 + (x_2 - A)^2] & \forall (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2, & \forall x_2 \geq A. \end{aligned} \quad (8.3.6)$$

Tenendo presente che le componenti di  $\vec{v}$  sono date dalle (8.3.3), scriviamo l'equazione di Navier-Stokes in componenti:

$$v_{i,j} v_j = \nu v_{i,jj} - \frac{p_{,i}}{\rho}.$$

Per  $i = 1$  si ha:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} v_2 = \nu \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1},$$

ossia

$$a^2 x_1 f'^2 - a^2 x_1 f f'' = a \nu x_1 f''' - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1}. \quad (8.3.7)$$

Per  $i = 2$  si deduce:

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} v_2 = \nu \left( \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2},$$

ossia

$$a^2 f f' = -a \nu f'' - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2}. \quad (8.3.8)$$

Per  $i = 3$  si ottiene

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3}$$

da cui

$$p = p(x_1, x_2).$$

Nelle due prime equazioni scritte sopra compare la pressione  $p(x_1, x_2)$  che è incognita. Ma dalla (8.3.8) otteniamo

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = -\rho a^2 f f' - \rho a \nu f''$$

che, integrata rispetto a  $x_2$ , fornisce:

$$p = -\rho \frac{a^2}{2} f^2(x_2) - \rho a \nu f'(x_2) + P(x_1), \quad (8.3.9)$$

con  $P(x_1)$  funzione arbitraria.

Tale funzione si può determinare ricordando che per  $x_2 \rightarrow +\infty$  la pressione deve comportarsi come la pressione per il moto piano ortogonale con punti di ristagno di un fluido perfetto incomprimibile ed omogeneo di densità  $\rho$  che si muove verso la parete  $x_2 = A$ . Per questo fluido la pressione è data dalla (8.3.6)<sub>4</sub>:

$$p = p_0 - \rho \frac{a^2}{2} [x_1^2 + (x_2 - A)^2].$$

Possiamo valutare la (8.3.9) per  $x_2 \rightarrow +\infty$ , tenendo presente che

$$\text{per } x_2 \rightarrow +\infty : f'(x_2) \rightarrow 1, \quad f(x_2) \sim x_2 - A,$$

e poi confrontare l'equazione che otteniamo con la (8.3.6)<sub>4</sub>. Troviamo così due espressioni della pressione per  $x_2 \rightarrow +\infty$  ed uguagliandole determiniamo la funzione  $P(x_1)$ .

Valutando la (8.3.9) per  $x_2 \rightarrow +\infty$ , si ha che all'infinito la pressione del fluido newtoniano ha il seguente comportamento

$$-\rho \frac{a^2}{2} (x_2 - A)^2 - \rho a \nu + P(x_1).$$

Confrontando questa con la (8.3.6)<sub>4</sub>, otteniamo:

$$p_0 - \rho \frac{a^2}{2} [(x_1^2 + (x_2 - A)^2)] = -\rho \frac{a^2}{2} (x_2 - A)^2 - \rho a \nu + P(x_1),$$

da cui

$$P(x_1) = p_0 + \rho a \nu - \rho \frac{a^2}{2} x_1^2. \quad (8.3.10)$$

Sostituendo la (8.3.10) nella (8.3.9) si deduce:

$$p = p_0 - \rho \frac{a^2}{2} x_1^2 - \rho \frac{a^2}{2} f^2(x_2) + \rho a \nu [1 - f'(x_2)].$$

che possiamo scrivere come

$$p = p_0 - \rho \frac{a^2}{2} [x_1^2 + f^2(x_2)] - \rho a \nu f'(x_2),$$

avendo indicato per brevità ancora con  $p_0$  la costante  $p_0 + \rho a \nu$ .

Notiamo che la nuova costante  $p_0$  rappresenta il valore della pressione nell'origine

(che è punto di ristagno) ed è il valore massimo che la pressione assume sulla parete  $x_2 = 0$ .

Ora possiamo calcolare  $\frac{\partial p}{\partial x_1}$  che compare nella (8.3.7)

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = -\rho a^2 x_1.$$

Quindi la (8.3.7) si riduce a

$$\frac{\nu}{a} f''' + f f'' - f'^2 + 1 = 0. \quad (8.3.11)$$

A tale equazione si devono poi associare le condizioni al contorno (8.3.4), (8.3.5).

Dunque il problema del moto piano ortogonale con punti di ristagno per un fluido newtoniano omogeneo ed incomprimibile è ricondotto al problema differenziale ordinario (8.3.11), (8.3.4), (8.3.5).

I risultati ottenuti si possono riassumere nel seguente teorema:

**Teorema 8.1.** *Dato un fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo, il moto piano con punti di ristagno di tale fluido, che si muove verso la parete  $x_2 = 0$ , rigida e fissa, perpendicolarmente ad essa, ha la forma seguente:*

$$\vec{v} = ax_1 f'(x_2) \vec{e}_1 - af(x_2) \vec{e}_2$$

$$p = -\rho \frac{a^2}{2} [x_1^2 + f^2(x_2)] - \rho a \nu f'(x_2) + p_0$$

con  $p_0$  costante,  $x_1 \in \mathbb{R}$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}^+$  e  $f$  soddisfacente il seguente problema

$$\frac{\nu}{a} f''' + f f'' - f'^2 + 1 = 0$$

$$f(0) = 0 \quad f'(0) = 0$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow +\infty} f'(x_2) = 1.$$

La (8.3.11) è un'equazione differenziale ordinaria non lineare, del terzo ordine ed il problema (8.3.11), (8.3.4), (8.3.5) non è risolubile mediante funzioni elementari, ma solo numericamente. Sono comunque noti teoremi di esistenza ed unicità del problema, come vedremo nel paragrafo successivo.

## 8.4 Moto piano ortogonale con punti di ristagno per un fluido newtoniano : risultati analitici e numerici

In primo luogo, scriviamo in una forma più opportuna e precisamente **in forma adimensionale** la (8.3.11):

$$\frac{\nu}{a} f''' + f f'' - f'^2 + 1 = 0.$$

Ciò ci consentirà di eliminare il parametro materiale  $\frac{\nu}{a}$ .

Se esaminiamo le dimensioni fisiche di  $a$ ,  $f$ ,  $\nu$ ,  $\left(\frac{a}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}$ , come è facile verificare, queste sono:

$$[a] = t^{-1}, \quad [f] = l, \quad [\nu] = l^2 t^{-1}, \quad \left[\left(\frac{a}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = l^{-1}.$$

Allora poniamo:

$$\eta = \left(\frac{a}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}} x_2 \tag{8.4.1}$$

$$\phi(\eta) = \left(\frac{a}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}} f\left(\left(\frac{\nu}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \eta\right).$$

La nuova variabile  $\eta$  e la nuova funzione  $\phi(\eta)$  sono adimensionali. Tenendo presente che:

$$f(x_2) = \left(\frac{\nu}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \phi\left(\left(\frac{a}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}} x_2\right),$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} f'(x_2) &= \phi'(\eta), \\ f''(x_2) &= \left(\frac{a}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}} \phi''(\eta), \\ f'''(x_2) &= \frac{a}{\nu} \phi'''(\eta), \end{aligned}$$

dove, per semplicità, indichiamo con l'apice anche la derivata di  $\phi$  rispetto a  $\eta$ .

Grazie a tali risultati l'equazione (8.3.11) si riduce a:

$$\phi''' + \phi \phi'' - \phi'^2 + 1 = 0, \tag{8.4.2}$$

nota come **equazione di Hiemenz**. All'equazione (8.4.2) vanno poi associate le condizioni al contorno sulla parete e per  $x_2 \rightarrow +\infty$ .

L'equazione (8.4.2) trae il suo nome da K. Hiemenz che per la prima volta nel 1911 risolse numericamente il problema nella sua tesi di laurea.

Sulla parete di equazione  $x_2 = 0$ , avevamo imposto come condizioni al contorno  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 0$ . Se lavoriamo con la variabile adimensionale  $\eta$  e la funzione adimensionale  $\phi$ , queste condizioni si riscrivono come:

$$\phi(0) = 0, \quad \phi'(0) = 0. \quad (8.4.3)$$

Per  $x_2 \rightarrow +\infty$  è richiesto  $f'(x_2) \rightarrow 1$ . Nella nuova variabile  $\eta$  e per la nuova funzione  $\phi$ , questa condizione assume la forma:

$$\phi'(\eta) \rightarrow 1 \quad \text{per} \quad \eta \rightarrow +\infty. \quad (8.4.4)$$

Abbiamo dunque ottenuto un'equazione differenziale ordinaria non lineare del III ordine, (8.4.2), adimensionale cui sono associate tre condizioni al contorno, date da (8.4.4) e (8.4.3), pure adimensionali.

La soluzione del problema (8.4.2), (8.4.4), (8.4.3) non si può trovare in termini di funzioni elementari.

Tuttavia tale problema è un sottocaso del seguente problema differenziale più generale:

$$\phi''' + \phi \phi'' + \lambda (1 - \phi'^2) = 0, \quad (8.4.5)$$

con le condizioni al contorno

$$\phi(0) = \alpha, \quad \phi'(0) = \beta, \quad \phi'(\infty) = 1, \quad (8.4.6)$$

dove  $\lambda$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  sono costanti.

L'equazione (8.4.5) è nota come **equazione di Falkner-Skan**.

Nel nostro caso particolare, abbiamo:

$$\lambda = 1, \quad \alpha = \beta = 0.$$

Per tale problema esistono alcuni risultati di esistenza ed unicità della soluzione. Riportiamo qui i teoremi più significativi.

**Teorema 8.2.** *Sia  $\lambda > 0$ ,  $-\infty < \alpha < \infty$ ,  $0 \leq \beta < 1$ . Allora esiste una e una sola soluzione  $\phi(\eta)$  di (8.4.5), (8.4.6) tale che*

$$0 < \phi'(\eta) < 1 \quad \text{per} \quad 0 < \eta < \infty.$$

*Inoltre la soluzione soddisfa la condizione:*

$$\phi''(\eta) > 0 \quad \text{per} \quad 0 \leq \eta < \infty.$$

Una dimostrazione del teorema precedente, che omettiamo, è dovuta a Coppel (1960). Successivamente nel 1970 K. Kuen Tam provò l'esistenza di almeno una soluzione del problema senza assumere la condizione:  $0 < \phi'(\eta) < 1$  nell'ipotesi  $\alpha = \beta = 0$ .

**Teorema 8.3.** *L'equazione differenziale (8.4.5) soggetta alle condizioni (8.4.3), (8.4.4) ha almeno una soluzione.*

Notiamo che il Teorema 8.3 non fornisce l'unicità della soluzione. Craven e Peletier nel 1972 hanno dimostrato l'unicità nel caso  $\alpha = \beta = 0$ , eliminando le ipotesi sul segno di  $\phi'$ .

Una volta determinata la funzione  $\phi(\eta)$ , la soluzione completa del problema del moto è:

$$\begin{aligned} v_1 &= a x_1 f'(x_2) = a x_1 \phi'(\eta) \\ v_2 &= -a f(x_2) = -a \left(\frac{\nu}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \phi(\eta) = -(a\nu)^{\frac{1}{2}} \phi(\eta) \\ p &= -\rho \frac{a^2}{2} [x_1^2 + f^2(x_2)] - \rho a \nu f'(x_2) + p_0 \\ &= -\rho \frac{a^2}{2} [x_1^2 + \frac{\nu}{a} \phi^2(\eta)] - \rho a \nu \phi'(\eta) + p_0. \end{aligned}$$

Come abbiamo già detto in precedenza, la soluzione numerica del problema differenziale (8.4.2), (8.4.4), (8.4.3) è stata data per la prima volta nel 1911 nella tesi di laurea da Hiemenz (questo moto infatti è noto anche come moto di Hiemenz), e più tardi (1935) è stata perfezionata da Howarth.

Sotto riportiamo i grafici delle funzioni  $\phi(\eta)$ ,  $\phi'(\eta)$  e  $\phi''(\eta)$  determinati risolvendo numericamente il problema (8.4.2), (8.4.4), (8.4.3).

Dalla figura 8.2 notiamo che i grafici delle funzioni  $\phi(\eta)$ ,  $\phi'(\eta)$ ,  $\phi''(\eta)$  soddisfano le condizioni del teorema 8.2.

Inoltre vediamo che la curva  $\phi'(\eta)$  inizia a crescere linearmente a partire da  $\eta = 0$  e tende asintoticamente all'unità. Per  $\eta = 2.4$  si ha  $\phi' = 0.99$  cioè il valore finale è raggiunto con un'accuratezza dell'1 per cento.

Per quanto riguarda il grafico di  $\phi(\eta)$  vediamo che per  $\eta > 2.4$ , la funzione ha un andamento lineare come si avrebbe nel caso del moto con un punto di ristagno per un fluido perfetto. Precisamente per  $\eta > 2.4$

$$\phi(\eta) \simeq \eta - \alpha$$

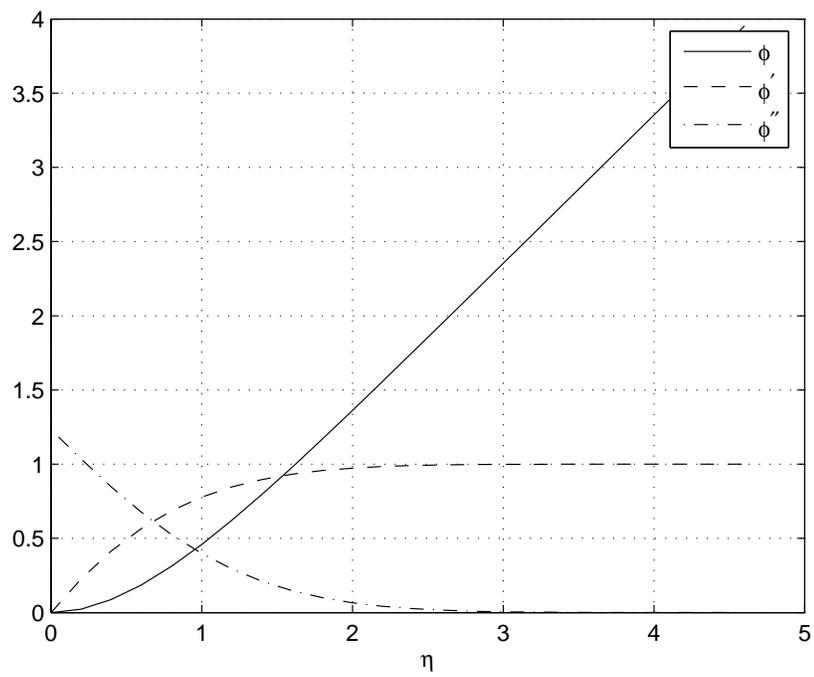


Figura 8.2: Moto di Hiemenz

dove  $\alpha = 0.6479$ . Si ha perciò, come osservato nel paragrafo precedente, che

$$\lim_{x_2 \rightarrow +\infty} [f(x_2) - x_2] = -A,$$

dove  $A = \sqrt{\frac{\nu}{a}} 0.6479$ .

Se consideriamo la distanza dal piano  $x_2 = 0$  corrispondente a  $\eta = 2.4$  e la denotiamo con  $\delta$ , si ha:

$$\delta = \left(\frac{\nu}{a}\right)^{\frac{1}{2}} 2.4. \quad (8.4.7)$$

E' importante notare che per  $x_2 > \delta$  il moto del fluido newtoniano ha lo stesso andamento del moto piano ortogonale di un fluido perfetto, che colpisce la parete di equazione  $x_2 = A = \sqrt{\frac{\nu}{a}} 0.6479$ ; mentre per  $x_2 < \delta$  i due moti sono diversi e quindi si rileva il comportamento tipico del fluido viscoso.

La regione  $x_2 < \delta$  è detta *boundary layer* o *strato limite*. L'effetto della viscosità si manifesta essenzialmente solo in tale regione. La sua ampiezza è influenzata dalla viscosità: è piccola a basse viscosità cinematiche e proporzionale a  $\nu^{\frac{1}{2}}$ .

Si noti che lo spessore del boundary è indipendente da  $x_1$ .

Calcoliamo ora  $\text{grad } p$ , essendo

$$p = -\rho \frac{a^2}{2} [x_1^2 + \frac{\nu}{a} \phi^2(\eta)] - \rho a \nu \phi'(\eta) + p_0$$

dove

$$\eta = \left(\frac{a}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}} x_2.$$

Si ha perciò:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x_1} &= -\rho a^2 x_1 \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} &= -\rho a^{\frac{3}{2}} \nu^{\frac{1}{2}} (\phi \phi' + \phi''). \end{aligned}$$

Vediamo dunque che la componente lungo  $\vec{e}_2$  di  $\text{grad } p$ ,  $\frac{\partial p}{\partial x_2}$ , è proporzionale a  $\rho a^{\frac{3}{2}} \nu^{\frac{1}{2}}$  in ogni punto di  $S$ .

Come si verifica facilmente, anche il moto piano ortogonale con punti di ristagno per un fluido newtoniano ammette una funzione di corrente  $\psi$  che ci

proponiamo di determinare e che ci consente di trovare le linee di flusso. Consideriamo quindi il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x_1, x_2) = a f(x_2), \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x_1, x_2) = a x_1 f'(x_2). \end{cases} \quad (8.4.8)$$

Se integriamo la prima equazione rispetto a  $x_1$ , otteniamo

$$\psi(x_1, x_2) = a x_1 f(x_2) + \Psi(x_2)$$

con  $\Psi$  funzione arbitraria.

Dalla seconda equazione del sistema deduciamo

$$a x_1 f'(x_2) + \Psi'(x_2) = a x_1 f'(x_2);$$

dunque

$$\Psi(x_2) = \text{costante} \implies \psi(x_1, x_2) = a x_1 f(x_2) + \text{costante}.$$

Se prendiamo la costante nulla, abbiamo:

$$\psi(x_1, x_2) = a x_1 f(x_2) \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \quad \forall x_2 \in \mathbb{R}^+.$$

Le linee di flusso sono perciò cammini piani giacenti su piani  $x_3 = \text{costante}$ , luogo dei punti  $P(x_1, x_2, x_3)$  ( $x_2 \geq 0$ ) tali che

$$x_1 f(x_2) = C$$

$$x_3 = C'$$

con  $C, C'$  costanti.

Poiché il moto è piano, possiamo limitarci a considerare le linee di flusso nel piano  $Ox_1x_2$  e scriviamo l'equazione

$$x_1 f(x_2) = C$$

in forma adimensionale, ossia nella forma

$$\xi \phi(\eta) = C,$$

dove  $\xi = \left(\frac{a}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}} x_1$ .

Nella figura 8.3 sono rappresentate tali linee di flusso.

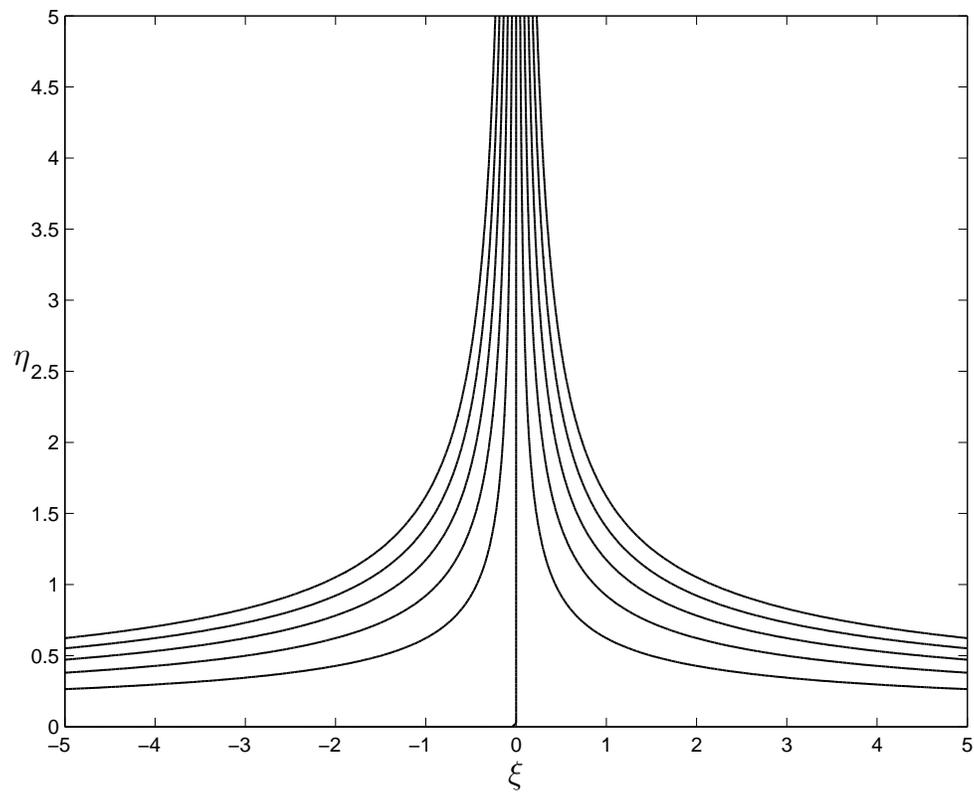


Figura 8.3: Linee di flusso del moto di Hiemenz nelle variabili adimensionali  $\xi, \eta$

**Osservazione 8.1.** L'esistenza della costante  $A$  non nulla tale che

$$\lim_{x_2 \rightarrow +\infty} [f(x_2) - x_2] = -A$$

che abbiamo determinato risolvendo il problema numericamente è stata provata da Hartmann nel suo trattato sulle equazioni differenziali studiando il comportamento asintotico della soluzione del problema (8.4.5), (8.4.6), soddisfacente alle condizioni (8.4.7).

**Osservazione 8.2.** E' interessante dal punto di vista fisico determinare le componenti parallele alla parete della trazione superficiale data da

$$\vec{f} = \tilde{T} \cdot \vec{n}|_{x_2=0}$$

dove  $\vec{n} = -\vec{e}_2$ .

Poichè

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

e le componenti di  $\vec{v}$  sono date dalle (8.3.3), otteniamo

$$f_1 = -T_{12}|_{x_2=0} = -\mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)|_{x_2=0} = -\mu a x_1 f''(0) = -\rho a^{\frac{3}{2}} \nu^{\frac{1}{2}} x_1 \phi''(0)$$

$$f_2 = -T_{22}|_{x_2=0} = p|_{x_2=0} - 2\mu\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)|_{x_2=0} = -\rho \frac{a^2}{2} x_1^2 + p_0$$

$$f_3 = -T_{32}|_{x_2=0} = 0.$$

Dunque la componente non nulla di  $\vec{f}$  parallela alla parete è data da

$$f_1 = -\rho a^{\frac{3}{2}} \nu^{\frac{1}{2}} x_1 \phi''(0).$$

Il valore di  $\phi''(0)$ , ottenuto risolvendo numericamente il problema, è

$$\phi''(0) = 1.2326.$$



# Capitolo 9

## Magnetofluidodinamica

### 9.1 Brevi richiami di elettromagnetismo

Nell'elettromagnetismo dei corpi continui svolgono un ruolo fondamentale i seguenti campi, che in genere dipendono da  $P$  e da  $t$ :

- $\vec{E}$  campo elettrico;
- $\vec{H}$  campo magnetico;
- $\vec{D}$  induzione elettrica o vettore spostamento elettrico;
- $\vec{B}$  induzione magnetica;
- $\rho_e$  densità di volume delle cariche elettriche;
- $\vec{J}$  densità di corrente elettrica.

**Definizione 9.1.** *Diremo che una regione dello spazio è sede di fenomeni elettromagnetici in un certo intervallo di tempo se in ogni punto di tale regione e ad ogni istante sono definiti i campi introdotti precedentemente.*

I campi che intervengono nell'elettromagnetismo, nell'ipotesi che siano sufficientemente regolari, sono legati tra loro dalle quattro equazioni di Maxwell che, scritte in un opportuno sistema di misura, precisamente nel Sistema Inter-

nazionale (SI), hanno la forma:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (9.1.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (9.1.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (9.1.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_e. \quad (9.1.4)$$

Tali equazioni sono soddisfatte in ogni punto della regione  $S$  sede di fenomeni elettromagnetici ed ad ogni istante dell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  in cui i fenomeni stessi sono osservati.

Le equazioni di Maxwell esprimono in forma locale le quattro leggi, dedotte sperimentalmente, che sono alla base dell'elettromagnetismo e che sono espresse in forma globale. Precisamente la (9.1.1) è conseguenza della legge di Oersted-Ampère, la (9.1.2) della legge di Faraday-Neumann, le (9.1.3) e (9.1.4) delle leggi di Gauss per l'induzione magnetica e l'induzione elettrica rispettivamente. Per brevità, non richiamiamo tali leggi.

Si osservi che se supponiamo  $\vec{H}, \vec{D} \in \mathcal{C}^2(S \times [t_0, t_1])$  e  $\vec{J}, \rho_e \in \mathcal{C}^1(S \times [t_0, t_1])$ , da (9.1.1) e (9.1.4) si deduce l'equazione:

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = 0 \text{ in } S \times [t_0, t_1]. \quad (9.1.5)$$

Infatti basta applicare l'operatore divergenza ad entrambi i membri della (9.1.1), tenere presente che  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = 0$  e sostituire a  $\operatorname{div} \vec{D}$  la densità delle cariche elettriche  $\rho_e$  come conseguenza della (9.1.4).

La (9.1.5) si potrebbe ottenere anche partendo dalla relazione globale che esprime il principio di conservazione della carica elettrica. Per tale motivo la (9.1.5) è nota come **equazione di continuità dell'elettromagnetismo**.

Per quanto riguarda la densità di corrente  $\vec{J}$ , si distingue tra *corrente di conduzione* e *corrente di convezione*.

La prima è dovuta al moto di cariche elettriche senza trasporto di materia e caratterizza i conduttori, mentre la seconda è dovuta al moto di cariche elettriche con trasporto di materia ed è presente nelle soluzioni elettrolitiche.

Le equazioni (9.1.1), (9.1.2), (9.1.3), (9.1.4) e (9.1.5) esprimono quelle proprietà fondamentali che sussistono per tutti i continui che sono sede di fenomeni

elettromagnetici.

A tali equazioni dobbiamo quindi associare le relazioni che caratterizzano dal punto di vista fisico il comportamento elettromagnetico del mezzo reale che si studia, cioè le **equazioni costitutive elettromagnetiche**, che si presentano nella forma:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \widehat{B}(\vec{H}) \\ \vec{D} &= \widehat{D}(\vec{E}) \\ \vec{J} &= \widehat{J}(\vec{E})\end{aligned}\tag{9.1.6}$$

dove l'ultima equazione sussiste per un conduttore in quiete.

Se le proprietà elettriche e magnetiche del mezzo reale preso in esame sono indipendenti dalla direzione, le (9.1.6)<sub>1</sub> e (9.1.6)<sub>2</sub> si presentano nel modo seguente:

$$\vec{B} = \mu_e \vec{H}, \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}\tag{9.1.7}$$

dove  $\mu_e$  ed  $\epsilon$  sono campi scalari dipendenti da  $P$  che si ottengono sperimentalmente, detti rispettivamente *permeabilità magnetica* e *permeabilità (o permittività) elettrica*. Se il mezzo è omogeneo,  $\mu_e$  e  $\epsilon$  sono delle costanti ed, in particolare,  $\epsilon$  è detta *costante dielettrica*.

Più in generale, in luogo delle (9.1.7) potremmo avere relazioni lineari della forma

$$\vec{B} = \tilde{\mu}_e \cdot \vec{H}, \quad \vec{D} = \tilde{\epsilon} \cdot \vec{E}$$

con  $\tilde{\mu}_e$  ed  $\tilde{\epsilon}$  campi tensoriali del secondo ordine.

Per quanto riguarda la densità della corrente di conduzione in un conduttore in quiete, la relazione più semplice tra  $\vec{J}$  ed  $\vec{E}$  è la seguente

$$\vec{J} = \sigma_e \vec{E}\tag{9.1.8}$$

con  $\sigma_e$  campo scalare dipendente da  $P$  detto *coefficiente di conducibilità elettrica*. Se per un conduttore elettrico sussiste la (9.1.8), si dice che questo è isotropo.

Si noti che il campo di variazione dei valori di  $\sigma_e$  è enorme. Ad esempio, la conduttività del rame è  $10^7$  volte maggiore di quella dell'acqua di mare che è considerata un buon conduttore e  $10^{19}$  volte maggiore di quella del vetro comune.

Anche per  $\vec{J}$ , in luogo delle (9.1.8), possiamo avere una relazione lineare più complessa della forma:

$$\vec{J} = \tilde{\sigma}_e \cdot \vec{E}$$

con  $\tilde{\sigma}_e$  campo tensoriale del secondo ordine.

Note le equazioni costitutive (9.1.6), i campi incogniti scalari si riducono a 7 ( $E_i, H_i, \rho_e$  con  $i = 1, 2, 3$ ). Tali campi soddisfano alle quattro equazioni di Maxwell equivalenti ad otto equazioni scalari.

Ma, come si verifica facilmente, se supponiamo  $\vec{B}, \vec{E} \in \mathcal{C}^2(S \times [t_0, t_1])$ , la (9.1.3) non è indipendente dalla (9.1.2).

Infatti se applichiamo l'operatore divergenza ad entrambi i membri della (9.1.2), tenendo presente che  $\text{div rot } \vec{E} = 0$ , deduciamo

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{B} = 0 \text{ in } S \times [t_0, t_1].$$

Dunque il campo scalare  $\text{div } \vec{B}$  risulta indipendente dal tempo. Se assumiamo che all'istante iniziale  $t_0$   $\text{div } \vec{B} = 0$  in  $S$ , otteniamo  $\text{div } \vec{B} = 0$  in  $S \times [t_0, t_1]$ , ossia la (9.1.3).

Per impostare il problema in maniera completa dobbiamo poi associare alle equazioni di Maxwell ed alle equazioni costitutive opportune condizioni iniziali ed al contorno.

Le condizioni iniziali consistono nell'assegnare all'istante iniziale  $t_0$  il campo elettrico ed il campo magnetico

$$\vec{E}(P, t_0) = \vec{E}_0(P), \quad \vec{H}(P, t_0) = \vec{H}_0(P) \quad \forall P \in S.$$

Per quanto riguarda le **condizioni al contorno**, queste dipendono dal problema fisico che si studia e devono comunque tenere conto delle condizioni di passaggio per i campi elettromagnetici.

Consideriamo nella regione in cui si studiano i fenomeni elettromagnetici, due corpi continui, separati da una superficie  $\Sigma$  e sia  $\vec{n}$  il versore della normale a  $\Sigma$  rivolto ad esempio verso il secondo corpo.

Si dimostra che, come conseguenze delle leggi fisiche alla base dell'elettromagnetismo, i campi vettoriali  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{B}, \vec{D}$  devono soddisfare alle seguenti **condizioni di passaggio**:

- $\vec{n} \times \vec{E}$  è continuo attraverso  $\Sigma$ , cioè è continua attraverso  $\Sigma$  la componente di  $\vec{E}$  nel piano tangente a  $\Sigma$ ;
- $\vec{n} \times \vec{H}$  è continuo attraverso  $\Sigma$ , cioè è continua attraverso  $\Sigma$  la componente di  $\vec{H}$  nel piano tangente a  $\Sigma$ ;
- $\vec{n} \cdot \vec{B}$  è continuo attraverso  $\Sigma$ , cioè è continua la componente normale di  $\vec{B}$  attraverso  $\Sigma$ ;

- La componente normale di  $\vec{D}$  subisce una discontinuità attraverso  $\Sigma$  :

$$(\vec{n} \cdot \vec{D})_2 - (\vec{n} \cdot \vec{D})_1 = \omega_e$$

dove  $\omega_e$  è la densità superficiale di cariche elettriche presenti su  $\Sigma$ .

## 9.2 Elementi di magnetofluidodinamica

La magnetofluidodinamica studia le interazioni macroscopiche tra liquidi o gas conduttori di elettricità ed i campi elettromagnetici.

I fenomeni che si studiano nella magnetofluidodinamica si presentano quando si ha a che fare con metalli liquidi (ad esempio mercurio e sodio liquidi), con liquidi biologici (come ad esempio il sangue) ed in generale liquidi conduttori di elettricità come l'acqua degli oceani, con soluzioni elettrolitiche e con gas a temperature molto elevate che subiscono un processo di ionizzazione.

Un gas ionizzato in assenza di un campo magnetico esterno si comporta come un gas classico, ossia non conduttore; se invece viene immerso in un campo magnetico esterno compaiono fenomeni che normalmente non si osservano in fluidi non conduttori. Lo studio di un gas ionizzato è comunque molto complesso in quanto compaiono diversi tipi di particelle.

Per lo studio dell'interazione tra un fluido conduttore di elettricità e campi elettromagnetici, possiamo adottare due modelli:

### 1. MAGNETOFLUIDODINAMICA CLASSICA

Il fluido conduttore di elettricità viene visto come un corpo continuo. Tale modello, nel caso di gas ionizzati, è utilizzato solo nei casi particolari di un campo magnetico esterno debole o di una scarsa ionizzazione del gas.

### 2. FISICA DEI PLASMI

E' basata su considerazioni di tipo statistico che portano alle equazioni di Boltzmann ed alla teoria cinetica. Tale modello è utilizzato soprattutto nel caso di gas altamente ionizzati.

Il nostro scopo è rimanere nell'ambito della magnetofluidodinamica, o meglio della magnetoidrodinamica, nella quale si considerano fluidi incomprimibili atti a rappresentare liquidi reali.

La magnetoidrodinamica, la magnetogasdinamica e la fisica dei plasmi intervengono notevolmente in natura: basti pensare agli oceani, alle aurore boreali, ai lampi, ai fulmini ed alle tempeste solari.

Nell'industria i gas ad alte temperature vengono utilizzati per studiare il comportamento dei materiali quando vengono sottoposti ad alte temperature.

Gas ad alte temperature vengono anche impiegati nelle centrali nucleari e, più

in generale, nei generatori di energia.

Le soluzioni elettrolitiche sono di primaria importanza nell'industria chimica.

La magnetofluidodinamica interviene anche in biomedicina poichè i fluidi biologici sono influenzati dall'applicazione di un campo magnetico esterno, come avviene ad esempio nella risonanza magnetica.

Ricordiamo infine che la ionosfera che consente le comunicazioni radio è un plasma e che la magnetogasdinamica è in generale molto sfruttata nell'industria aeronautica.

Noi ci limitiamo solo allo studio del moto di un fluido incomprimibile, conduttore di elettricità immerso in un campo magnetico esterno o, eventualmente, anche in un campo elettrico esterno.

E' evidente che le equazioni che si utilizzano per affrontare un tale problema saranno una combinazione delle equazioni che governano il moto di un fluido (perfetto, newtoniano o anche di natura più generale) in assenza di un campo elettromagnetico, opportunamente modificate, e delle equazioni di Maxwell.

Consideriamo un fluido viscoso classico, incomprimibile, conduttore di elettricità. Supponiamo che il fluido sia omogeneo, ossia  $\rho = \text{costante} > 0$  e che sia newtoniano con  $\mu = \text{costante} > 0$ .

Se il fluido è immerso in un campo elettromagnetico, oltre a  $\vec{v} = \vec{v}(P, t)$  e a  $p(P, t)$ , dobbiamo introdurre i quattro campi vettoriali che intervengono in Elettromagnetismo:

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \vec{H}(P, t) && \text{(campo magnetico)} \\ \vec{B} &= \vec{B}(P, t) && \text{(campo induzione magnetica)} \\ \vec{E} &= \vec{E}(P, t) && \text{(campo elettrico)} \\ \vec{D} &= \vec{D}(P, t) && \text{(campo spostamento elettrico o induzione elettrica)}.\end{aligned}$$

Inoltre, essendo il fluido conduttore, sarà definito anche il campo della densità della corrente elettrica di conduzione

$$\vec{J} = \vec{J}(P, t).$$

Assumiamo poi che le proprietà elettriche e magnetiche dal fluido siano indipendenti dalla direzione e che si abbia precisamente:

$$\begin{aligned}\epsilon &= \text{cost} > 0 && \text{(costante dielettrica);} \\ \sigma_e &= \text{cost} > 0 && \text{(coefficiente di conducibilità elettrica);} \\ \mu_e &= \text{cost} > 0 && \text{(permeabilità magnetica)}.\end{aligned}$$

Per semplicità aggiungiamo l'ipotesi che la costante dielettrica  $\epsilon$  sia sufficientemente piccola da poter considerare trascurabile la *corrente di spostamento*, data da  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ .

L'interazione del fluido con il campo magnetico (ed eventualmente con quello elettrico) esterno, in cui è immerso, produce un campo magnetico ed elettrico indotti e questi una corrente elettrica. D'altra parte il campo elettromagnetico così come la corrente elettrica danno origine a forze di massa di natura elettromagnetica (forze di Lorentz) che agiscono sul fluido e che si aggiungono alle forze esterne di natura meccanica.

Se si suppone che nel fluido non siano distribuite cariche elettriche libere, la densità delle forze di Lorentz è data da

$$\vec{F}_{em} = \frac{\vec{J}}{\rho} \times \vec{B}.$$

Dunque, preso un sottocorpo arbitrario  $\mathcal{C}^*$  del fluido occupante all'istante  $t$  la regione  $\mathcal{S}^*(t)$ , il risultante ed il momento risultante delle forze esterne agenti su  $\mathcal{C}^*$  sono dati da

$$\begin{aligned} \vec{R}^*(t) &= \int_{\mathcal{S}^*(t)} \left[ \rho \vec{F} + \vec{J} \times \vec{B} \right] dS + \int_{\partial \mathcal{S}^*(t)} \vec{T}(\vec{n}) d\Sigma \\ \vec{\Omega}_o^*(t) &= \int_{\mathcal{S}^*(t)} \left[ (P - O) \times (\rho \vec{F} + \vec{J} \times \vec{B}) \right] dS + \\ &\quad + \int_{\partial \mathcal{S}^*(t)} \left[ (P - O) \times \vec{T}(\vec{n}) \right] d\Sigma, \end{aligned} \quad (9.2.1)$$

dove  $O$  è un punto dello spazio geometrico, fisso rispetto all'osservatore.

La presenza del termine aggiuntivo  $\vec{J} \times \vec{B}$  modifica la prima equazione indefinita della meccanica che, sfruttando le relazioni sforzo-deformazione e l'incomprimibilità del fluido, assume la forma

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} - \text{grad } p + \mu \Delta \vec{v} + \vec{J} \times \vec{B}.$$

Non viene invece modificata la seconda equazione indefinita della meccanica che porta sempre alla simmetria del tensore degli sforzi di Cauchy.

Scriviamo le equazioni che governano il moto di un fluido newtoniano omogeneo, incomprimibile, conduttore di elettricità in presenza di un campo elettromagnetico.

1. **Prima equazione indefinita della meccanica, avendo sfruttato la relazione sforzo-deformazione:**

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} - \text{grad } p + \mu \Delta \vec{v} + \vec{J} \times \vec{B} \quad (9.2.2)$$

2. **Condizione d'incomprimibilità:**

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad (9.2.3)$$

3. **Equazioni di Maxwell, avendo trascurato la corrente di spostamento e supposto che non ci siano cariche elettriche libere:**

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \vec{J} \\ \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{B} &= 0 \\ \text{div } \vec{D} &= 0 \end{aligned} \quad (9.2.4)$$

4. **Equazioni costitutive per  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{J}$ :**

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_e \vec{H} \\ \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{J} &= \sigma_e (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \end{aligned} \quad (9.2.5)$$

La presenza del termine  $\sigma_e(\vec{v} \times \vec{B})$  nell'equazione (9.2.5)<sub>3</sub> è dovuta al fatto che abbiamo un fluido in moto. Nel caso di un gas debolmente ionizzato in un campo magnetico esterno intenso, l'equazione costitutiva per  $\vec{J}$  sarebbe più complicata a causa della comparsa di ulteriori fenomeni come l'effetto Hall e l'effetto ion-slip, che noi non prendiamo in considerazione.

Utilizzando le (9.2.5), riscriviamo le equazioni di Maxwell (9.2.4) nella forma

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \sigma_e (\vec{E} + \vec{v} \times \mu_e \vec{H}) \\ \text{rot } \vec{E} &= -\mu_e \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{H} &= 0 \\ \text{div } \vec{E} &= 0. \end{aligned} \quad (9.2.6)$$

Analogamente la prima equazione indefinita si può scrivere nel modo seguente:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} - \text{grad } p + \mu \Delta \vec{v} + \mu_e \text{rot } \vec{H} \times \vec{H}.$$

Se supponiamo  $\vec{H}$  di classe  $C^2$ , sfruttando le (9.2.6)<sub>1,2</sub> possiamo eliminare il campo elettrico  $\vec{E}$  dalle equazioni che governano il moto del fluido.

Infatti applicando ad entrambi i membri della (9.2.6)<sub>1</sub> l'operatore rotore deduciamo:

$$\text{rot rot } \vec{H} = \sigma_e \text{rot} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

da cui, essendo  $\text{rot } \vec{E} = -\mu_e \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ , si ha:

$$\text{rot rot } \vec{H} = -\sigma_e \mu_e \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \sigma_e \mu_e \text{rot}(\vec{v} \times \vec{H}).$$

Poichè  $\vec{H} \in C^2$ , per la (9.2.6)<sub>3</sub>, otteniamo

$$\Delta \vec{H} = \text{grad div } \vec{H} - \text{rot rot } \vec{H} = -\text{rot rot } \vec{H}.$$

Perciò:

$$-\Delta \vec{H} = -\sigma_e \mu_e \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \sigma_e \mu_e \text{rot}(\vec{v} \times \vec{H}).$$

Se poniamo  $\eta_e = \frac{1}{\sigma_e \mu_e}$ , detta *diffusività elettromagnetica*, si ha:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \eta_e \Delta \vec{H} + \text{rot}(\vec{v} \times \vec{H}).$$

Dunque le equazioni che governano la magnetoidrodinamica di un fluido newtoniano, omogeneo, incomprimibile, conduttore di elettricità si riducono a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} &= \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \vec{v} + \frac{\mu_e}{\rho} \text{rot } \vec{H} \times \vec{H} & (9.2.7) \\ \text{div } \vec{v} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= \eta_e \Delta \vec{H} + \text{rot}(\vec{v} \times \vec{H}) \\ \text{div } \vec{H} &= 0 \end{aligned}$$

Le incognite scalari sono 7 :  $v_i$ ,  $p$ ,  $H_i$  con  $i = 1, 2, 3$ .

Per enunciare il problema ai limiti in maniera completa, dobbiamo associare le condizioni iniziali e le condizioni al contorno.

Se  $t_0 = 0$  le condizioni iniziali sono:

$$\begin{aligned} \vec{v}(P, 0) &= \vec{v}_0(P) \\ \vec{H}(P, 0) &= \vec{H}_0(P) \quad \forall P \in S(0). \end{aligned}$$

Per quanto riguarda le condizioni al contorno, supponiamo che la frontiera  $\partial S(t)$  sia formata da pareti materiali rigide, il cui atto di moto è dato da:

$$\vec{V} = \vec{V}(P, t)$$

e che le pareti  $\partial S(t)$  non siano conduttrici di elettricità.

Allora,  $\forall t \in [0, t_1]$

$$\begin{aligned} \vec{v}|_{\partial S(t)} &= \vec{V} \\ \vec{H}_\tau|_{\partial S(t)} &= \vec{H}_{e\tau}|_{\partial S(t)} \end{aligned}$$

dove il pedice  $\tau$  è stato utilizzato per denotare la componente di  $\vec{H}$  e del campo magnetico esterno  $\vec{H}_e$  nel piano tangente a  $\partial S(t)$ .

Osserviamo che la condizione al contorno per  $\vec{H}$  è conseguenza delle condizioni di passaggio enunciate nel paragrafo precedente.

Concludiamo con l'osservazione che si potrebbero scrivere facilmente anche le equazioni che governano il moto di un fluido conduttore di elettricità perfetto, omogeneo ed incompressibile oppure di altra natura, purchè omogeneo ed incompressibile, immerso in un campo elettromagnetico.

Si scrivono le equazioni che ne governano il moto in assenza del campo elettromagnetico modificando soltanto la prima equazione indefinita con l'inserimento del termine:

$$\mu_e \operatorname{rot} \vec{H} \times \vec{H},$$

dovuto alle forze di Lorentz e si aggiungono le equazioni di Maxwell.

Nei due paragrafi successivi studiamo il moto di Hartmann tra due piani paralleli, rigidi e fissi per un fluido newtoniano, incompressibile, omogeneo e conduttore di elettricità immerso in un campo magnetico esterno costante normale ai due piani.

### 9.3 Moto di Hartmann per un fluido newtoniano incompressibile

Consideriamo un fluido newtoniano, incompressibile, omogeneo, conduttore di elettricità, in assenza di forze di massa meccaniche ( $\vec{F} \equiv \vec{0}$ ) che si muova di moto stazionario tra due piani  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ , paralleli, rigidi, fissi rispetto all'osservatore e che non siano conduttori elettrici.

Supponiamo inoltre che il fluido sia immerso in un campo magnetico esterno

costante,  $\vec{H}_0$ , diretto perpendicolarmente ai due piani ed orientato da  $\Pi_1$  verso  $\Pi_2$ .

Fissiamo il riferimento  $Ox_1x_2x_3$  come nel Capitolo 6 per il moto di Poiseuille, per cui:

$$\Pi_\alpha = \{P(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E} : (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2, x_2 = (-1)^\alpha h\}, \quad \alpha = 1, 2$$

$$S = \{P(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E} : (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2, x_2 \in [-h, h]\},$$

essendo  $2h$  la distanza tra i due piani.

Poichè siamo in condizioni stazionarie:

$$\vec{v} = \vec{v}(P), \quad p = p(P), \quad \vec{H} = \vec{H}(P) \quad \forall P \in S.$$

Per le ipotesi in cui ci siamo posti, le equazioni che governano il moto del fluido preso in esame in  $S$  si riducono a:

$$\begin{aligned} \rho \operatorname{grad} \vec{v} \cdot \vec{v} &= -\operatorname{grad} p + \mu \Delta \vec{v} + \mu_e \operatorname{rot} \vec{H} \times \vec{H} \\ \operatorname{div} \vec{v} &= 0 \\ \eta_e \Delta \vec{H} &= \operatorname{rot} (\vec{H} \times \vec{v}) \\ \operatorname{div} \vec{H} &= 0. \end{aligned} \tag{9.3.1}$$

A tali equazioni associamo le condizioni al contorno

$$\vec{v}|_{\Pi_1} = \vec{0}, \quad \vec{v}|_{\Pi_2} = \vec{0} \tag{9.3.2}$$

$$\vec{H}_\tau|_{\Pi_1} = \vec{0}, \quad \vec{H}_\tau|_{\Pi_2} = \vec{0}. \tag{9.3.3}$$

Le (9.3.2) sono le usuali condizioni di aderenza.

Le (9.3.3) sono conseguenze della continuità della componente tangenziale del campo magnetico attraverso i due piani  $\Pi_1, \Pi_2$  e del fatto che il campo magnetico esterno è  $\vec{H}_0 = H_0 \vec{e}_2$ , per cui  $\vec{H}_{0\tau}|_{\Pi_1} = \vec{H}_{0\tau}|_{\Pi_2} = \vec{0}$ .

Risolvere il problema (9.3.1), (9.3.2), (9.3.3), significa trovare le terne  $(\vec{v}, p, \vec{H})$  con  $\vec{v} \in \mathcal{C}^2(S)$ ,  $p \in \mathcal{C}^1(S)$ ,  $\vec{H} \in \mathcal{C}^2(S)$  tali che  $(\vec{v}, p, \vec{H})$  soddisfa in  $S$  alle equazioni (9.3.1) e  $\vec{v}, \vec{H}$  verificano le (9.3.2), (9.3.3).

A questo punto assumiamo che al di fuori della regione occupata dal fluido, dove il campo magnetico è quello esterno, cioè  $\vec{H}_0$ , ci sia il vuoto e che il fluido abbia la stessa permeabilità magnetica del vuoto. Questa condizione non è restrittiva perchè è soddisfatta nella realtà da molti metalli liquidi, come ad esempio il mercurio.

In base a tale ipotesi, per le condizioni di passaggio dell'elettromagnetismo, risulta continua attraverso i due piani  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  anche la componente normale del campo magnetico e dunque sui due piani si ha  $\vec{H} = \vec{H}_0$ .

Un moto di Hartmann per il fluido preso in esame, immerso nel campo magnetico  $\vec{H}_0 = H_0 \vec{e}_2$  è costituito da una terna  $(\vec{v}, p, \vec{H})$  che sia soluzione del problema (9.3.1), (9.3.2), (9.3.3), con  $\vec{v}, \vec{H}$  soddisfacenti alle seguenti condizioni:

- i)  $\vec{v} = v_1(x_1, x_2) \vec{e}_1$  in  $\xi(S)$
- ii)  $\vec{H} = \hat{H}(x_1, x_2) \vec{e}_1 + H_0 \vec{e}_2$  in  $\xi(S)$

dove  $\vec{H} = \hat{H} \vec{e}_1$  è il campo magnetico indotto.

Osserviamo che la geometria del problema e la forma richiesta alla velocità sono le stesse che intervengono nel moto di Poiseuille studiato nel Capitolo 6.

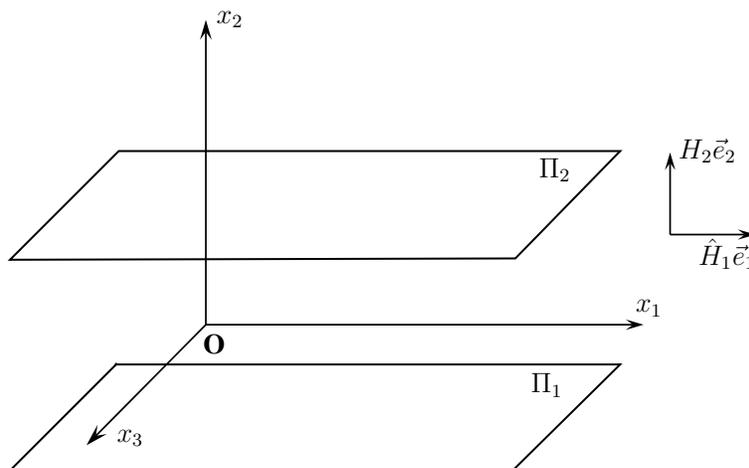


Figura 9.1: Geometria del problema in presenza del campo magnetico.

Grazie all'equazione  $\text{div } \vec{v} = 0$  si ha  $v_1 = v_1(x_2)$ ,  $x_2 \in [-h, h]$ .

Analogamente per  $\vec{H}$ :

$$\text{div } \vec{H} = \text{div } \vec{\hat{H}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{H} = \hat{H}(x_2), \quad x_2 \in [-h, h].$$

Vediamo ora di scrivere in componenti la prima e la terza equazione di (9.3.1).

Iniziamo col procurarci  $\text{rot } \vec{H}$ :

$$\text{rot } \vec{H} = \text{rot } \vec{\hat{H}} = -\frac{d\hat{H}}{dx_2} \vec{e}_3$$

da cui

$$\operatorname{rot} \vec{H} \times \vec{H} = -\frac{d\hat{H}}{dx_2} \vec{e}_3 \times (H_0 \vec{e}_2 + \hat{H} \vec{e}_1) = H_0 \frac{d\hat{H}}{dx_2} \vec{e}_1 - \frac{d\hat{H}}{dx_2} \hat{H} \vec{e}_2 = H_0 \frac{d\hat{H}}{dx_2} \vec{e}_1 - \frac{1}{2} \frac{d\hat{H}^2}{dx_2} \vec{e}_2.$$

Consideriamo poi

$$\vec{H} \times \vec{v} = (H_0 \vec{e}_2 + \hat{H} \vec{e}_1) \times v_1 \vec{e}_1 = -H_0 v_1 \vec{e}_3$$

e quindi

$$\operatorname{rot} (\vec{H} \times \vec{v}) = -H_0 \operatorname{rot} (v_1 \vec{e}_3) = -H_0 \frac{dv_1}{dx_2} \vec{e}_1.$$

Andiamo ora a proiettare sugli assi coordinati la prima e la terza equazione di (9.3.1).

Ricordando che  $\operatorname{grad} \vec{v} \cdot \vec{v} = 0$ , come abbiamo visto nel Capitolo 6, otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x_1} &= \mu \frac{d^2 v_1}{dx_2^2} + \mu_e H_0 \frac{d\hat{H}}{dx_2} \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} &= -\mu_e \frac{d}{dx_2} \left( \frac{\hat{H}^2}{2} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \mu_e \frac{\hat{H}^2}{2} + p \right) = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} &= 0 \quad \Rightarrow \quad p = p(x_1, x_2) \\ \eta_e \frac{d^2 \hat{H}}{dx_2^2} &= -H_0 \frac{dv_1}{dx_2}. \end{aligned} \tag{9.3.4}$$

Dalle (9.3.4)<sub>2</sub>, (9.3.4)<sub>3</sub> deduciamo che  $\mu_e \frac{\hat{H}^2}{2} + p$  dipende solo da  $x_1$ .

Poichè  $\hat{H}$  dipende solo da  $x_2$ , abbiamo:

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{d}{dx_1} \left[ p + \mu_e \frac{\hat{H}^2}{2} \right].$$

E' conveniente porre

$$p^* = p + \mu_e \frac{\hat{H}^2}{2}$$

e definire  $p^*$  *pressione modificata*.

Con tale definizione, sostituendo nella (9.3.4)<sub>1</sub>, otteniamo:

$$\frac{dp^*}{dx_1}(x_1) = \mu \frac{d^2 v_1}{dx_2^2}(x_2) + \mu_e H_0 \frac{d\hat{H}}{dx_2}(x_2). \tag{9.3.5}$$

Vediamo allora che il primo membro della (9.3.5) è funzione solo di  $x_1$ , mentre il secondo membro è funzione solo di  $x_2$ . Poichè  $x_1$  e  $x_2$  sono variabili indipendenti e la relazione (9.3.5) deve sussistere  $\forall x_1 \in \mathbb{R}$  e  $\forall x_2 \in [-h, h]$ , concludiamo che necessariamente entrambi i membri della (9.3.5) devono essere uguali ad una stessa costante che denotiamo con  $-C$ .

Dunque la (9.3.5) dà luogo alle due equazioni differenziali ordinarie:

$$\frac{dp^*}{dx_1}(x_1) = -C \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \quad (9.3.6)$$

$$\mu \frac{d^2 v_1}{dx_2^2}(x_2) + \mu_e H_0 \frac{d\widehat{H}}{dx_2}(x_2) = -C \quad \forall x_2 \in [-h, h]. \quad (9.3.7)$$

Se integriamo la (9.3.6) otteniamo:

$$p^* = -Cx_1 + p_0^* \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}$$

con  $p_0^*$  = costante arbitraria e  $C$  salto della pressione modificata  $p^*$  nella direzione  $Ox_1$ .

Tenendo presente la definizione di  $p^*$ , per la pressione effettiva  $p$  deduciamo la forma seguente:

$$p = -Cx_1 - \mu_e \frac{\widehat{H}^2}{2}(x_2) + p_0^*. \quad (9.3.8)$$

La pressione ha un'espressione differente rispetto al moto di Poiseuille in assenza di campo magnetico, essendo presente il termine  $\widehat{H}$  dipendente anche da  $x_2$ .

All'equazione (9.3.7)

$$\mu \frac{d^2 v_1}{dx_2^2}(x_2) + \mu_e H_0 \frac{d\widehat{H}}{dx_2}(x_2) = -C$$

aggiungiamo l'equazione

$$\eta_e \frac{d^2 \widehat{H}}{dx_2^2} = -H_0 \frac{dv_1}{dx_2}. \quad (9.3.9)$$

Per determinare i moti cercati, siamo così condotti a risolvere il problema differenziale, che si ottiene associando al sistema di due equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti (9.3.7), (9.3.9) nelle due funzioni incognite  $v_1 = v_1(x_2)$ ,  $\widehat{H} = \widehat{H}(x_2)$  le **condizioni al contorno**:

$$v_1(-h) = v_1(h) = 0 \quad (9.3.10)$$

$$\widehat{H}(-h) = \widehat{H}(h) = 0. \quad (9.3.11)$$

In primo luogo determiniamo la soluzione generale del sistema lineare (9.3.7), (9.3.9)

Integrando la (9.3.9) otteniamo:

$$\eta_e \frac{d\hat{H}}{dx_2} = -H_0 v_1 + C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\hat{H}}{dx_2} = -\frac{H_0}{\eta_e} v_1 + \frac{C_1}{\eta_e}, \quad (9.3.12)$$

con  $C_1 =$  costante arbitraria.

Sostituendo nella (9.3.7) deduciamo:

$$\mu \frac{d^2 v_1}{dx_2^2} + \mu_e H_0 \left( -\frac{H_0}{\eta_e} v_1 + \frac{C_1}{\eta_e} \right) = -C$$

da cui

$$\frac{d^2 v_1}{dx_2^2} - \frac{\mu_e H_0^2}{\mu \eta_e} v_1 = -\frac{C}{\mu} - \frac{\mu_e H_0 C_1}{\eta_e \mu}.$$

Poniamo

$$\frac{\mu_e H_0^2}{\mu \eta_e} = \frac{\sigma_e \mu_e^2}{\mu} H_0^2 = A^2$$

per cui l'equazione precedente risulta:

$$\frac{d^2 v_1}{dx_2^2} - A^2 v_1 = -\frac{C}{\mu} - \frac{A^2 C_1}{H_0}.$$

Otteniamo così un'equazione del secondo ordine lineare, a coefficienti costanti, non omogenea nella sola funzione incognita  $v_1(x_2)$ .

La soluzione generale dell'equazione precedente è data dalla somma della soluzione generale dell'omogenea associata e di una soluzione particolare dell'equazione completa.

La soluzione generale dell'omogenea si può scrivere nella forma:

$$C_2 \cosh(Ax_2) + C_3 \sinh(Ax_2), \quad (9.3.13)$$

con  $C_2, C_3$  costanti arbitrarie, mentre una soluzione particolare della completa è una costante  $a$  tale che:

$$A^2 a = \frac{C}{\mu} + \frac{A^2 C_1}{H_0} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{C}{\mu A^2} + \frac{C_1}{H_0}. \quad (9.3.14)$$

La soluzione generale dell'equazione completa è perciò:

$$v_1(x_2) = C_2 \cosh(Ax_2) + C_3 \sinh(Ax_2) + \frac{C}{\mu A^2} + \frac{C_1}{H_0}. \quad (9.3.15)$$

Sostituendo nella (9.3.12) si ha

$$\frac{d\hat{H}}{dx_2} = -\frac{H_0}{\eta_e} \left[ C_2 \cosh(Ax_2) + C_3 \sinh(Ax_2) + \frac{C}{\mu A^2} \right],$$

equazione, che integrata, fornisce:

$$\hat{H}(x_2) = -\frac{H_0}{\eta_e A} [C_2 \sinh(Ax_2) + C_3 \cosh(Ax_2)] - \frac{H_0 C x_2}{\eta_e \mu A^2} + C_4, \quad (9.3.16)$$

$C_4$  = costante arbitraria.

La soluzione generale del sistema (9.3.7), (9.3.9) è rappresentata dalla coppia  $(v_1, \hat{H})$ , dove  $v_1$  e  $\hat{H}$  sono date dalle (9.3.15) e (9.3.16) in cui compaiono le 4 costanti arbitrarie  $C_1, C_2, C_3, C_4$ .

Per determinare le costanti, imponiamo le condizioni al contorno.

Quelle relative a  $v_1$  forniscono:

$$\begin{aligned} (v_1(-h) = 0) \quad & C_2 \cosh(Ah) - C_3 \sinh(Ah) + \frac{C}{\mu A^2} + \frac{C_1}{H_0} = 0 \\ (v_1(h) = 0) \quad & C_2 \cosh(Ah) + C_3 \sinh(Ah) + \frac{C}{\mu A^2} + \frac{C_1}{H_0} = 0 \end{aligned}$$

Introduciamo ora il seguente parametro adimensionale, noto come *numero di Hartmann*:

$$M = Ah,$$

che possiamo scrivere nella forma:

$$M = Ah = \sqrt{\frac{\mu_e}{\mu \eta_e}} H_0 h = \sqrt{\frac{\sigma_e}{\mu}} \mu_e H_0 h = \sqrt{\frac{\sigma_e}{\mu}} B_0 h.$$

Le condizioni al contorno relative ad  $\hat{H}$  danno

$$\begin{aligned} (\hat{H}(-h) = 0) \quad & -\frac{H_0}{\eta_e A} [-C_2 \sinh M + C_3 \cosh M] + \frac{H_0 C h}{\mu \eta_e A^2} + C_4 = 0 \\ (\hat{H}(h) = 0) \quad & -\frac{H_0}{\eta_e A} [C_2 \sinh M + C_3 \cosh M] - \frac{H_0 C h}{\mu \eta_e A^2} + C_4 = 0. \end{aligned}$$

Dalle prime due equazioni deduciamo immediatamente che  $C_3 = 0$ ; analogamente dalle ultime due equazioni segue  $C_4 = 0$ .

Dalla terza equazione possiamo ricavare  $C_2$ :

$$C_2 \frac{H_0}{\eta_e A} \sinh M = -\frac{H_0 C h}{\mu \eta_e A^2} \implies C_2 = -\frac{C h}{\mu A \sinh M};$$

dalla prima si ottiene invece  $C_1$ , o meglio  $\frac{C_1}{H_0}$ :

$$\frac{C_1}{H_0} = -C_2 \cosh M - \frac{C}{\mu A^2} = -\frac{C}{\mu A^2} + \frac{C h \cosh M}{\mu A \sinh M}.$$

Andando poi a sostituire nelle espressioni (9.3.15) e (9.3.16) di  $v_1$  e  $\widehat{H}$ , deduciamo

$$\begin{aligned} v_1(x_2) &= -\frac{C h \cosh\left(M\frac{x_2}{h}\right)}{\mu A \sinh M} + \frac{C}{\mu A^2} - \frac{C}{\mu A^2} + \frac{C h \cosh M}{\mu A \sinh M} = \\ &= \frac{C h^2 \cosh M - \cosh\left(M\frac{x_2}{h}\right)}{\mu M \sinh M}, \end{aligned} \quad (9.3.17)$$

$$\begin{aligned} \widehat{H}(x_2) &= \frac{H_0 C h \sinh\left(M\frac{x_2}{h}\right)}{\eta_e A \mu A \sinh M} - \frac{H_0 C h x_2}{\mu \eta_e A^2 h} = \\ &= \frac{C h H_0 \sinh\left(M\frac{x_2}{h}\right) - (\sinh M) \frac{x_2}{h}}{\mu \eta_e A^2 \sinh M}, \end{aligned}$$

dove  $x_2 \in [-h, h]$ .

Scriviamo ora in maniera differente il coefficiente che compare nell'espressione di  $\widehat{H}$ :

$$\frac{C h H_0}{\mu \eta_e A^2} = \frac{C h^2 \sigma_e B_0 h}{\mu M^2} = \frac{C h^2}{M} \sqrt{\frac{\sigma_e}{\mu}}.$$

Perciò:

$$\widehat{H}(x_2) = C h^2 \sqrt{\frac{\sigma_e}{\mu}} \frac{\sinh\left(M\frac{x_2}{h}\right) - (\sinh M) \frac{x_2}{h}}{M \sinh M}. \quad (9.3.18)$$

**Osservazione 9.1.** Se  $C = 0$ , ossia se la pressione modificata è costante, allora  $v_1(x_2) = 0$ ,  $\widehat{H}(x_2) = 0$ ,  $\forall x_2 \in [-h, h]$ .

**Osservazione 9.2.** Fissati tutti gli altri parametri fisici del problema, in corrispondenza di ogni valore  $C$  del salto della pressione modificata si ha uno ed un solo moto di Hartmann.

Possiamo sintetizzare i risultati trovati nel seguente:

**Teorema 9.1.** *Dato un fluido newtoniano, incompressibile ed omogeneo, conduttore di elettricità, occupante la regione  $S$  tra due piani paralleli, rigidi e fissi,*

immerso in un campo magnetico esterno  $\vec{H}_0$  costante, normale ai due piani, un moto di Hartmann è dato da ogni terna  $(\vec{v}, p, \vec{H})$  tale che:

$$p(x_1, x_2) = -Cx_1 - \mu_e \frac{\hat{H}^2}{2}(x_2) + p_0^* \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 \in [-h, h]$$

$$\vec{v} = v_1(x_2)\vec{e}_1 \quad \vec{H} = \hat{H}(x_2)\vec{e}_1 + H_0\vec{e}_2$$

con

$$v_1(x_2) = \frac{Ch^2}{\mu} \frac{\cosh M - \cosh\left(M\frac{x_2}{h}\right)}{M \sinh M} \quad x_2 \in [-h, h]$$

$$\hat{H}(x_2) = Ch^2 \sqrt{\frac{\sigma_e}{\mu}} \frac{\sinh\left(M\frac{x_2}{h}\right) - (\sinh M)\frac{x_2}{h}}{M \sinh M},$$

dove  $C$  è il salto della pressione modificata nella direzione  $Ox_1$  parallela ai due piani.

Se  $C = 0$ , il fluido è in quiete e il campo magnetico indotto è nullo.

Supponiamo ora  $M \ll 1$  e nell'espressione di  $v_1$  sviluppiamo in serie di Taylor, con punto iniziale 0,  $\cosh M$ ,  $\cosh\left(M\frac{x_2}{h}\right)$  e  $\sinh M$ .

Se trascuriamo i termini che contengono potenze di  $M$  di grado superiore al secondo, otteniamo per  $v_1$  la seguente espressione approssimata:

$$v_1(x_2) \cong \frac{Ch^2}{\mu} \frac{\frac{M^2}{2} - \frac{M^2}{2}\left(\frac{x_2}{h}\right)^2}{M^2} = \frac{Ch^2}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x_2}{h}\right)^2\right]$$

che è l'espressione che abbiamo trovato per il moto di Poiseuille tra due piani paralleli in assenza di campo magnetico.

Per quanto riguarda  $\hat{H}$ , procedendo nello stesso modo, deduciamo:

$$\hat{H}(x_2) \cong Ch^2 \sqrt{\frac{\sigma_e}{\mu}} \frac{M\frac{x_2}{h} - M\frac{x_2}{h}}{M^2} = 0.$$

E' ora opportuno fornire i grafici di  $v_1(x_2)$  e  $\hat{H}(x_2)$ , attribuendo ai parametri che compaiono in tali espressioni dei valori numerici fisicamente significativi.

Riferiamoci sempre al mercurio liquido a temperatura ambiente, per il quale i valori numerici sono i seguenti:

$$\mu = 1.6 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}, \quad \sigma_e = 10^6 \text{ S m}^{-1}, \quad \mu_e = 1.257 \cdot 10^{-6} \text{ H m}^{-1}.$$

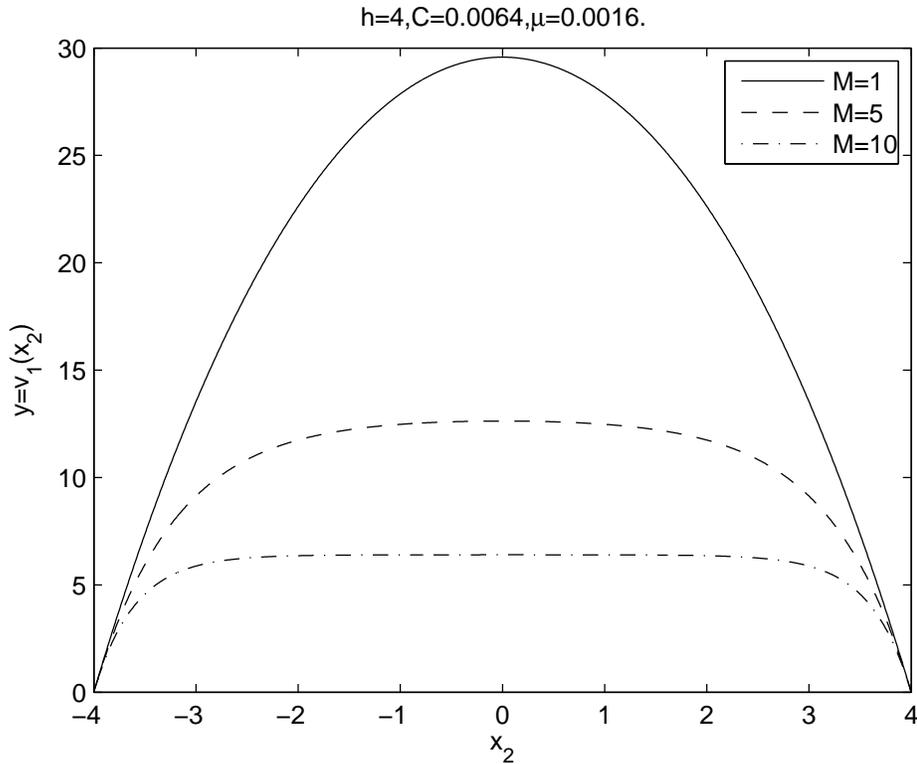


Figura 9.2: Grafico di  $v_1(x_2)$  per  $M = 1, 5, 10$ .

Per semplicità limitiamoci a considerare solo il caso  $C > 0$ .

Per mettere in rilievo l'influenza del campo magnetico esterno sul moto, supponiamo che  $C$  abbia lo stesso valore ( $> 0$ ) del Capitolo 6 nel moto di Poiseuille, mentre per  $M$  assumiamo tre valori possibili:

$$M = 1, \quad M = 5, \quad M = 10.$$

Come possiamo vedere esaminando la Figura 9.2 e confrontandola con la 6.2, deduciamo che in presenza di  $\vec{H}_0$ , il grafico della velocità giace al di sotto di quello relativo al caso  $\vec{H}_0 = \vec{0}$ . Otteniamo inoltre che per  $M = 1$  l'andamento di  $v_1(x_2)$  non è molto dissimile dal caso  $\vec{H}_0 = \vec{0}$ , mentre all'aumentare di  $M$  la velocità risulta costante su un intervallo la cui ampiezza cresce al crescere di  $M$ . Dunque a contatto con i due piani  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ , vi sono due regioni nei punti delle quali la velocità aumenta rapidamente all'aumentare di  $x_2$  per poi assumere un valore costante.

Nella Figura 9.3 è riportato l'andamento del campo magnetico indotto.

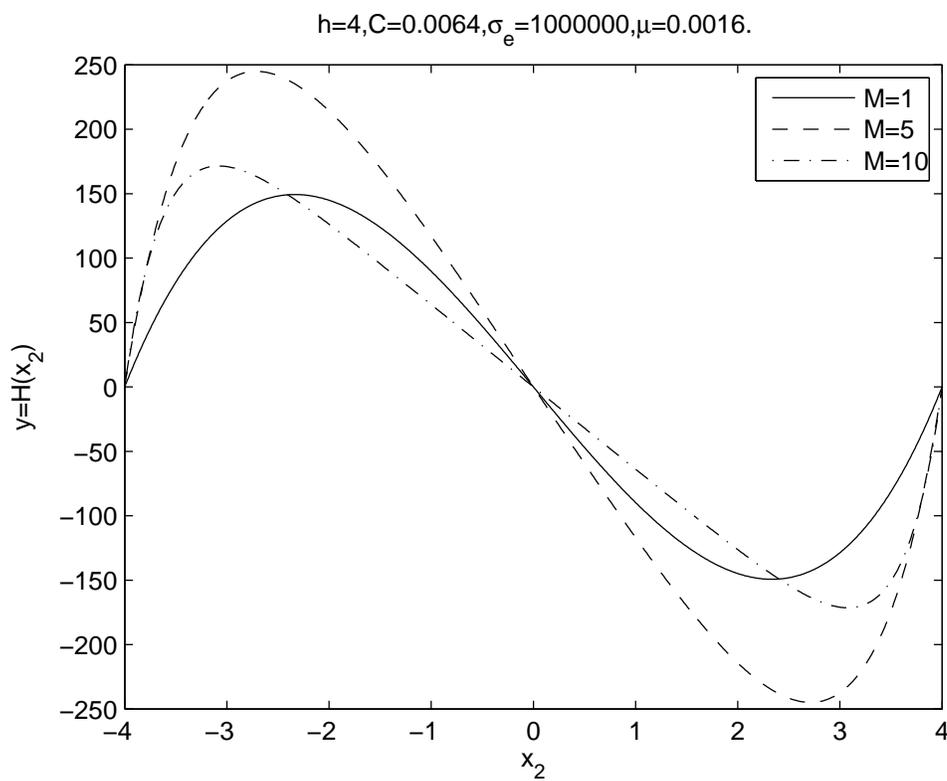


Figura 9.3: Grafico di  $\hat{H}(x_2)$  per  $M = 1, 5, 10$ .

Vediamo che il grafico è simmetrico rispetto all'origine e che  $\hat{H}$  presenta un massimo ed un minimo. Per  $M = 5$  il massimo è elevato ed il minimo assume un valore molto basso, mentre per  $M = 10$ , il massimo ed il minimo hanno valori vicini a quelli che riscontriamo per  $M = 1$ . Inoltre, in tutti e tre i casi, per  $x_2 = 0$  il campo magnetico indotto risulta uguale a zero.

### Esercizi proposti

1) Provare che al campo magnetico  $\vec{H}$  è associato un campo elettrico costante dato da:

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_3 = \frac{Ch}{\sqrt{\mu\sigma_e}} \frac{\sinh M - M \cosh M}{M \sinh M}. \quad (9.3.19)$$

Suggerimento: utilizzare l'equazione di Maxwell:

$$\text{rot} \vec{H} = \sigma_e (\vec{E} + \vec{v} \times \mu_e \vec{H}). \quad (9.3.20)$$

2) Determinare l'espressione del tensore degli sforzi di Cauchy e della trazione sui due piani  $\Pi_1, \Pi_2$ .

## 9.4 Appendice sulle unità di misura.

### Unità fondamentali nel Sistema Internazionale (SI)

Grandezza fisica	Simbolo grandezza	Nome unità	Simbolo unità
lunghezza	$l$	metro	m
massa	$M$	chilogrammo	kg
intervallo di tempo	$t$	secondo	s
intensità di corrente	$I, i$	ampere	A
temperatura assoluta	$T$	kelvin	K
quantità di sostanza	$n$	mole	mol
intensità luminosa	$I_V$	candela	cd

### Dimensioni fisiche di grandezze elettromagnetiche

- Intensità del campo elettrico

$$[E] = l M t^{-3} I^{-1}$$

- Intensità del campo di induzione elettrica

$$[D] = l^{-2} t I$$

- Intensità del campo magnetico

$$[H] = l^{-1} I$$

- Intensità del campo di induzione magnetica

$$[B] = M t^{-2} I^{-1}$$

- Permeabilità elettrica

$$[\epsilon] = l^{-3} M^{-1} t^4 I^2$$

- Coefficiente di conducibilità elettrica

$$[\sigma_e] = l^{-3} M^{-1} t^3 I^2$$

- Permeabilità magnetica

$$[\mu_e] = l M t^{-2} I^{-2}.$$

### Unità di misura di grandezze elettromagnetiche nel Sistema Internazionale

- Intensità del campo elettrico = volt/metro =  $V \text{ m}^{-1} = \text{m kg s}^{-3} \text{ A}^{-1}$
- Intensità del campo di induzione elettrica = ampere-secondo/metro quadrato =  $\text{A s m}^{-2}$
- Intensità del campo magnetico = ampere/metro =  $\text{A m}^{-1}$
- Intensità del campo di induzione magnetica = tesla =  $\text{T} = \text{kg s}^{-2} \text{ A}^{-1}$
- Permeabilità elettrica = farad/metro =  $\text{F m}^{-1} = \text{m}^{-3} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^4 \text{ A}^2$
- Coefficiente di conducibilità elettrica = siemens/metro =  $\text{S m}^{-1} = \text{m}^{-3} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^3 \text{ A}^2$
- Permeabilità magnetica = henry/metro =  $\text{H m}^{-1} = \text{m kg s}^{-2} \text{ A}^{-2}$ .