

Laboratorio di didattica della Matematica



a.a. 2019-2020

Il laboratorio di matematica: *una metodologia per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica*

28 ottobre 2019

Luigi Tomasi

1

Il Laboratorio di Matematica



- Negli ultimi anni si parla spesso di «laboratorio di matematica» intendendo con questa espressione un modello didattico che si contrappone a quello della didattica frontale e trasmissiva,
- per coinvolgere l'alunno in modo attivo attraverso problemi, l'uso di strumenti, l'osservazione e la collaborazione.

2

Il Laboratorio di Matematica



- Ci si propone qui di richiamare brevemente le origini del laboratorio didattico con particolare riferimento alla matematica e alla scuola italiana mettendo in evidenza l'evoluzione dell'idea di laboratorio in relazione alle teorie pedagogiche e didattiche.
- Verranno esaminati alcuni esempi di attività di laboratorio, evidenziandone e confrontandone le caratteristiche, anche in relazione all'uso di strumenti tecnologici e non.

3

Il Laboratorio di Matematica



... la mente non ha bisogno, come un vaso, di essere riempita, ma, come legna da ardere, ha bisogno solo di una scintilla che la accenda, che vi infonda l'impulso alla ricerca e il desiderio della verità.

Plutarco, *Moralia*, *De audiendo*.

4

Il Laboratorio di Matematica



Negli ultimi anni si è molto parlato di laboratorio di matematica, in particolare dopo che nel volume *Matematica 2003*, contenente le proposte dell'Unione Matematica Italiana (UMI) per un curriculum di matematica adeguato ai bisogni della società nel mondo attuale, è stato dedicato un capitolo a questo tema, compendiando molte idee circolanti nell'ambito della ricerca didattica.

5

La proposta «La matematica per il cittadino» è stata alla base dei nuovi curricula

<http://umi-cii.univ.it/>

Un curriculum verticale di Matematica, dai 6 ai 19 anni, per tutti

Matematica 2001 (elem+medie)

Matematica 2003 (superiori, I-IV)

Matematica 2004 (superiori, V)



Il Laboratorio di Matematica in UMI, Matematica 2003



Che cos'è il laboratorio di matematica

[UMI, *Matematica 2003*, vedi il sito UMI

www.umi-ciim.it/wp-content/uploads/2013/10/Mat2003.zip

«Il *laboratorio* di matematica non è [tanto e soltanto] un luogo fisico diverso dalla classe; è piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla **costruzione di *significati*** degli «**oggetti**» **matematici**.

Il laboratorio, quindi, **coinvolge persone** (studenti e insegnanti), **strutture** (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), **idee** (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni).»

7

Il Laboratorio di Matematica



L'ambiente del laboratorio di matematica è in qualche modo assimilabile a quello della *bottega rinascimentale*, nella quale gli *apprendisti* imparavano *facendo e vedendo fare, comunicando* fra loro e con gli esperti (è stato chiamato "apprendistato cognitivo").

8

Il Laboratorio di Matematica



La costruzione di significati, nel laboratorio di matematica, è strettamente legata, da una parte, **all'uso degli strumenti utilizzati nelle varie attività**, dall'altra, alle **interazioni tra le persone** che si sviluppano durante l'esercizio di tali attività.

È necessario ricordare che **uno strumento** [ad esempio un software, come ad esempio *GeoGebra*] è **sempre il risultato di un'evoluzione culturale**, che è prodotto per scopi specifici e che, conseguentemente, **incorpora delle idee**.

9

Il Laboratorio di Matematica



Sul piano didattico ciò ha alcune implicazioni importanti: innanzitutto **il significato non può risiedere unicamente nello strumento né può emergere dalla sola interazione tra studente e strumento**.

Il significato risiede negli **obiettivi** per i quali lo strumento è usato, nei **piani** che vengono elaborati per usare lo strumento; l'appropriazione del significato degli "oggetti matematici", inoltre, richiede anche **riflessione individuale** sugli oggetti di studio e sulle attività proposte.

10

Il Laboratorio di Matematica



«Le caratteristiche fondamentali di un Laboratorio di Matematica (come metodologia) sono essenzialmente tre:

- **L'uso di *strumenti*** (che possono essere nuovi o antichi, poveri o ricchi) come *mediatori* nei processi di insegnamento - apprendimento.
- **Una *didattica attenta ai tempi dell'allievo***, volta alla **costruzione di significato**, quindi una didattica *sensata* nella triplice accezione di
 - legata all'esperienza, alla percezione, ai sensi,
 - ma anche allo sviluppo e all'uso del sapere teorico e, infine,
 - ragionevole, ossia adeguata alle esigenze e alla situazione attuale della scuola
- Una specifica **attenzione alle dinamiche di interazione** sociale in classe. »

11

Il Laboratorio di Matematica



Possibili problemi

- la consapevolezza e l'accettazione che nel *Laboratorio* si devono realizzare forme di insegnamento - apprendimento di tipo **percettivo - motorio** (per prove ripetute, per tentativi ed errori, legate fortemente all'esperienza) come *necessaria premessa* per un avvio graduale e *sensato* a forme di insegnamento - apprendimento di tipo **ricostruttivo - simbolico** (lettura, interpretazione e trasmissione di testi), tipiche della prassi didattica che si attua in genere nelle nostre scuole.

12

Il Laboratorio di Matematica



Possibili problemi

- La *genesì strumentale* [nel senso di Verillon e Rabardel (P. Vérillon e P. Rabardel, 1995)], ossia la necessità che gli artefatti utilizzati nell'attività didattica diventino a tutti gli effetti *strumenti* di insegnamento - apprendimento e quindi le loro modalità di utilizzazione siano davvero consapevolmente **coerenti con il progetto didattico e funzionali al conseguimento degli obiettivi**.
- Gli spazi nelle scuole sono spesso poco adeguati a favorire l'interazione sociale, il lavoro in piccoli gruppi, l'uso flessibile degli strumenti informatici.

13

Il Laboratorio di Matematica



Possibili problemi

- La *credibilità* dell'insegnante per le famiglie degli studenti: si devono trovare ragioni valide che coinvolgano studenti e loro famiglie nel progetto formativo soprattutto se l'ambiente di insegnamento - apprendimento che si propone comporta *innovazioni significative*.
- La consapevolezza di doversi innanzitutto rivolgere, con le attività proposte, al **futuro cittadino** e non al futuro matematico.

14

Il Laboratorio di Matematica strumenti



Gli strumenti del laboratorio di matematica [Matematica 2003]

Gli strumenti possono essere di tipo tradizionale oppure tecnologicamente avanzati; ne citiamo, a scopo esemplificativo, alcuni.

- ***I materiali “poveri”***

Il lavoro con fogli trasparenti,
la piegatura della carta,
fogli quadrettati o carta millimetrata,
...

- ***Le macchine matematiche***

La possibilità di manipolare fisicamente oggetti, come per esempio le *macchine* che generano curve, induce spesso modalità di esplorazione e di costruzione di significato degli oggetti matematici differenti, ma altrettanto interessanti e, sotto certi aspetti, più ricche di quelle consentite dall'uso di software di geometria dinamica.

15

Le macchine matematiche



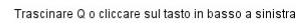
Visitare il sito :

<http://www.macchinematematiche.org/>

Associazione Macchine Matematiche
Modena



16


$$y^2 = (p/a)(a-x)x$$

17

In questo modo lo studente entra in contatto con il sapere geometrico incorporato nel software, impara a osservare e riconoscere “fatti geometrici” e può essere avviato a un significato di dimostrazione come attività che consente di giustificare, all’interno di una teoria più o meno ben precisata, *perché* una certa proprietà osservata vale.

18

Gli strumenti del Laboratorio di Matematica



- software di manipolazione simbolica (Computer Algebra Systems)

- Nell'insegnamento dell'algebra, della geometria analitica e dei primi elementi di analisi può rivelarsi particolarmente opportuno l'uso di software di manipolazione simbolica, detti comunemente *Computer Algebra Systems* (CAS), che mettono a disposizione diversi ambienti integrati, in genere quello numerico, quello simbolico, quello grafico e un linguaggio di programmazione.

19

Gli strumenti nel Laboratorio di Matematica



- software di manipolazione simbolica (Computer Algebra Systems)

- Nell'insegnamento dell'algebra, della geometria analitica e dei primi elementi di analisi può rivelarsi particolarmente opportuno l'uso di software di manipolazione simbolica, detti comunemente *Computer Algebra Systems* (CAS), che mettono a disposizione diversi ambienti integrati, in genere quello numerico, quello simbolico, quello grafico e un linguaggio di programmazione.

20

Gli strumenti nel Laboratorio di Matematica



- software di manipolazione simbolica

- I CAS inoltre presentano ambienti in cui poter effettuare esplorazioni, osservazioni, validazioni di congetture; si tratta di ambienti che, per loro stessa natura, aiutano a pianificare e costruire attività volte al conseguimento di quei significati degli oggetti di studio che costituiscono l'obiettivo fondamentale del laboratorio di matematica.
- Infine, ma non meno importante, la programmazione in un linguaggio CAS è particolarmente utile per consolidare il concetto di *funzione*, di *argomenti* di una funzione (*numero* degli argomenti, *ordine* degli argomenti nella definizione della funzione ...), di *input* e *output*. È altresì utile per arricchire la padronanza delle più importanti *strutture dati* (vettori, matrici, liste, ...). Esempi: Mathematica, Maple, Derive, app. Wolfram_α, Alpha) e GeoGebra (Vista CAS).

Gli strumenti nel Laboratorio di Matematica



Gli strumenti del laboratorio di matematica

● I fogli elettronici

I fogli elettronici, pur non essendo software specifici per la didattica, permettono svariate applicazioni, in particolare quelle relative alla rappresentazione e all'analisi dei dati e hanno la non trascurabile caratteristica di essere al momento ancora i software più utilizzati nel mondo del lavoro.

● Le calcolatrici grafico-simboliche, palmari, PC, netbook,...

Tutte le potenzialità prima indicate e offerte dai software di geometria dinamica, dai CAS e dai fogli elettronici si trovano oggi disponibili su calcolatrici tascabili che hanno il vantaggio di poter essere utilizzate con molta flessibilità e agilità, sia per quel che riguarda gli spazi (utilizzo in classe), sia per quel che riguarda i tempi (di trasferimento in laboratorio, di accensione dello strumento...).

Il Laboratorio di Matematica ***la Storia della Matematica***



La Storia della Matematica e il Laboratorio di Matematica [in UMI, *Matematica 2003*]

La storia della matematica, pur presentando contenuti suoi propri e possibilità di sviluppi su vari fronti (pensiamo soprattutto agli aspetti interdisciplinari con la filosofia, con l'arte e con molte altre discipline), va vista, in questo contesto, come un possibile ed **efficace strumento di laboratorio** (inteso nel senso largo esposto prima) adatto a **motivare** adeguatamente e a indicare possibili percorsi didattici per l'apprendimento di importanti contenuti matematici.

23

Il Laboratorio di Matematica



... lasciando comunque al docente la scelta dei contenuti della storia della matematica che ritiene più significativi, è indubbio che, ad esempio,

- una trattazione storica dei problemi inerenti alla sezione aurea può costituire una efficace introduzione ai problemi di secondo grado;
- la trattazione storica dei rapporti tra algebra e geometria può gettare luce sugli stretti rapporti tra geometria sintetica e analitica;
- l'evolversi di alcuni aspetti della geometria euclidea può fornire un'introduzione alla problematica della dimostrazione e al significato di sistema assiomatico;
- molti episodi storici riguardanti la storia di singoli problemi aritmetici possono motivare lo studio di procedure e algoritmi altrimenti troppo astratti;
- le motivazioni del calcolo delle probabilità e della statistica si colgono in modo illuminante attraverso la loro storia, ...

24

Il Laboratorio di Matematica



Le interazioni tra le persone nel laboratorio di matematica

[UMI, *Matematica 2003*]

La costruzione di significati è strettamente legata alla **comunicazione e condivisione delle conoscenze** in classe,

sia attraverso i lavori in piccoli gruppi di tipo collaborativo o cooperativo,

sia attraverso lo strumento metodologico della *discussione matematica*, opportunamente gestito dall'insegnante.

Ci soffermiamo, a scopo esemplificativo per quel che riguarda la gestione delle interazioni sociali in classe, sulla discussione matematica.

25

Il Laboratorio di Matematica: la discussione matematica



- Un primo livello di discussione è quello che, per esempio, si sviluppa dopo la lettura del testo di un problema.
- Un secondo livello di discussione matematica si sviluppa al termine della soluzione (individuale o in piccoli gruppi) o, talvolta, in un momento cruciale della soluzione stessa.
- Tale discussione è centrata sul confronto delle soluzioni realizzate dagli alunni e si sviluppa attraverso la presentazione delle proprie soluzioni, oltre che sull'interpretazione e sulla valutazione di quelle realizzate dai compagni.

26

Il Laboratorio di Matematica: la discussione matematica



- Un terzo livello di discussione matematica riguarda la correttezza e la ricchezza delle soluzioni proposte, la coerenza e l'attendibilità, il livello di generalizzazione adottato.

Quest'ultima fase dovrebbe condurre alla **costruzione di significati** che vanno oltre quelli direttamente coinvolti nella soluzione del compito, per consentire agli studenti di entrare in contatto con nuovi aspetti della cultura matematica, favorendo in particolare, **un approccio, graduale ma sistematico, al pensiero teorico.**

27

Un dibattito sul Laboratorio di Matematica (Bollettino UMI, 2010)



- E' utile chiamare laboratorio una situazione in cui lo studente è attivo e mette le proprie idee, le proprie conoscenze in relazione con fenomeni, fatti e problemi: confrontando le osservazioni con le attese che vengono dai propri modelli interpretativi del mondo, formulando ulteriori modelli e ipotesi/congetture, progettando azioni, esperimenti e osservazioni mirate, che consentano di confutare o confermare tali modelli.

(Gabriele Anzellotti, Università di Trento)

28

Alcune posizioni sul Laboratorio di Matematica



- Nel laboratorio si usano le mani e il corpo, si opera con oggetti concreti, si usano tecniche e strumenti, si misura e si documenta. Nel laboratorio si discute con i compagni di lavoro e con l'insegnante sull'interpretazione di quello che accade, si progettano azioni e attività di gruppo, si comunica con altri.
- In questo senso, quello che soprattutto contraddistingue il laboratorio sono l'atteggiamento e il modo di pensare e di operare, più che la presenza di attrezzature e strumenti speciali. *(Gabriele Anzellotti)*

29

Alcune idee e posizioni diverse sul Laboratorio di Matematica



- Così come i laboratori di fisica, anche quelli di matematica sono i benvenuti, purché sia chiaro quale sia il loro scopo e la loro funzione: stimolare e interessare gli studenti.
- Non è cosa da poco, e forse è anche la parte più divertente (anche se bisognerebbe guardare più da vicino come possano effettivamente svolgersi questi laboratori: quanto tempo in percentuale possono occupare e quali capacità richiedono agli insegnanti) ma **non è la parte essenziale dell'insegnamento.**

(Enrico Giusti, Università di Firenze)

30

Alcune posizioni sul Laboratorio di Matematica



- Diceva Edison che il genio è al cinque per cento ispirazione e al novantacinque per cento traspirazione. Parafrasando, potremo dire che la matematica è al cinque per cento fantasia e al novantacinque per cento disciplina.
- La fantasia non si insegna; al più si può favorire e stimolare. La disciplina invece si insegna, e questo è il compito primario della scuola.
- Facciamo attenzione a non buttare via il novantacinque per cento per correre dietro a un inafferrabile cinque per cento.

(Enrico Giusti, Università di Firenze)

31

Le Gare di Matematica



Ricordiamo qui l'utilità di far partecipare gli allievi ad alcune gare di matematica. In genere stimolano l'interesse e la curiosità, permettono di conoscere altre persone che hanno gli stessi interessi e favoriscono lo scambio di idee tra pari.

Tra le gare segnaliamo:

- Le Olimpiadi di Matematica (UMI) che hanno come prima fase i Giochi di Archimede
- Matematica senza frontiere (gara non individuale ma a cui si partecipa con la classe)
- I Campionati di Matematica (gara individuale) – Università Bocconi di Milano (Centro Pristem)
- ...

32

Mostre, Musei della Matematica



Mostre di Matematica

Altrettanto utile per il laboratorio di matematica è, quando possibile, visitare qualche mostra di matematica. Quelle che suscitano il maggiore interesse sono quelle interattive.

Musei di Matematica

Si segnalano:

- Il Giardino di Archimede (Firenze)
- *Theatrum machinarum*: mostra delle macchine matematiche (Università di Modena)
- ...

33

Esempi di attività didattiche di matematica proposte in forma laboratoriale (Piano m@t.abel)



Il Piano m@t.abel di formazione dei docenti di matematica (dal 2005 al 2010) ha riproposto sotto forma laboratoriale molte delle attività contenute in
UMI, Matematica 2001
UMI, Matematica 2003
UMI, Matematica 2004



Vedi questo link:

<http://www.matematica.it/tomasi/mat.abel/index.htm>

34

Attività m@t.abel per la scuola secondaria di II grado (geometria)



Scuola Valore » Autori » X
Scuola Valore » Autori » Tomasi Luigi | www.scuolavalore.indire.it/autori/tomasi-luigi/

 ALLA CONQUISTA DELLO SPAZIO Tematica affrontata: Avvio allo studio della geometria dello spazio. Descrizione dell'attività: L'attività è proposta per il I oppure per il II anno del secondo biennio della scuola. Grado scolastico: Secondaria di II grado, Secondo biennio Tipologia: Percorso didattico Anno: 2013	 CONICHE DALLO SPAZIO AL PIANO Tematica affrontata: Le coniche. Descrizione dell'attività: L'attività è proposta per gli studenti del primo anno del secondo biennio della scuola secondaria di II grado. Grado scolastico: Secondaria di II grado, Secondo biennio Tipologia: Percorso didattico Anno: 2013	 ANGOLI E TRIANGOLI: MONDO REALE E FUNZIONI Tematica affrontata: I triangoli, le funzioni circolari e loro applicazioni. Descrizione dell'attività: L'attività propone lo studio della trigonometria e Grado scolastico: Secondaria di II grado, Secondo biennio Tipologia: Percorso didattico Anno: 2013	 ESPLORAZIONE DI FIGURE PIANE: DALLE CONGETTURE ALLA DIMOSTRAZIONE Adattamento da "Matematica 2003". Tematica affrontata: triangoli, geometria. Descrizione: l'attività Grado scolastico: Primo biennio, Secondaria di II grado Tipologia: Percorso didattico Anno: 2006	 VILLE E PALAZZI: FORME GEOMETRICHE E SIMMETRIE Adattamento da "Matematica 2003". Tematica affrontata: g. Descrizione: l'attività si colloca in continuità con lo studio delle simmetrie nella Grado scolastico: Primo biennio, Secondaria di II grado Tipologia: Percorso didattico Anno: 2009	 STUDENTI IN MOVIMENTO Adattamento da "Matematica 2003". Tematica affrontata: geometria. Descrizione: l'attività si riferisce al nodo concettuale della modellizzazione di situazioni nel piano cartesiano, sviluppato Grado scolastico: Primo biennio, Secondaria di II grado Tipologia: Percorso didattico Anno: 2009
---	---	--	---	--	--

35

Attività m@t.abel per la scuola secondaria di II grado (geometria)



Scuola Valore » Autori » X
Non sicuro | www.scuolavalore.indire.it/autori/tomasi-luigi/

 IL TEOREMA DI PITAGORA TRA LEGGENDA E STORIA Adattamento da "Matematica 2003". Tematica affrontata: triangoli rettangoli, geometria. Descrizione: l'attività si inserisce nel contesto della Grado scolastico: Primo biennio, Secondaria di II grado Tipologia: Percorso didattico Anno: 2007	 PROBLEMI DI MINIMO NEL PIANO Adattamento da "Matematica 2003". Tematica affrontata: s. di figure nello spazio, geometria. Descrizione: l'attività si riferisce al nodo concettuale delle isometrie (simmetrie) Grado scolastico: Primo biennio, Secondaria di II grado Tipologia: Percorso didattico Anno: 2006	 SIMMETRIE NEI POLIEDRI Adattamento da "Matematica 2003". Tematica affrontata: s. di figure nello spazio, geometria. Descrizione: l'attività si riferisce al nodo concettuale della visione spaziale con Grado scolastico: Primo biennio, Secondaria di II grado Tipologia: Percorso didattico Anno: 2006	 OGNUNO CRESCE A MODO SUO Adattamento da "Matematica 2003". Tematica affrontata: g. Descrizione: l'attività si riferisce al nodo concettuale della variazione di grandezze geometriche, con Grado scolastico: Primo biennio, Secondaria di II grado Tipologia: Percorso didattico Anno: 2009
---	---	--	---

36

Riferimenti e suggerimenti per approfondire



Vedi sul sito della CIIM <http://www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/>

- UMI, *Matematica 2001* (scuola primaria e scuola sec. di I grado)
- UMI, *Matematica 2003* (scuola secondaria di II grado, I e II biennio)
- UMI, *Matematica 2004* (scuola secondaria di II grado, V anno)

Proposte per il laboratorio di matematica si può ritrovare nei materiali e nei testi di

Emma Castelnuovo, ad esempio:

- E. Castelnuovo - M. Barra, *Matematica nella realtà*, Bollati Boringhieri, Torino 2000.

Altri riferimenti utilizzati:

<http://www.math.unipr.it/~zaccagni/psfiles/papers/FormatoA4.pdf>

- F. Antinucci, *La scuola si è rotta. Perché cambiano i modi di apprendere*, Laterza, Bari 2001.
- G. Lakoff , R.E. Nuñez, *Da dove viene la Matematica?* , Bollati Boringhieri, Torino 2005.

37