

**Laboratorio di didattica
della Matematica
a.a. 2019-2020**

**Sui concetti di definizione,
teorema e dimostrazione
nell'insegnamento della matematica**

17 e 21 ottobre 2019

Luigi Tomasi

Definizioni, teoremi e dimostrazioni

**In questo incontro prendiamo spunto
dalle *Indicazioni nazionali per la
matematica* relative alla Scuola
secondaria di II grado (DPR, 15 marzo
2010, n. 88) per presentare alcune
considerazioni e osservazioni
didattiche riguardo ai concetti di
definizione, teorema e dimostrazione.**

Definizioni, teoremi e dimostrazioni

Nel documento citato si afferma:

Liceo scientifico – Geometria - I biennio

Il primo biennio avrà come obiettivo la conoscenza dei fondamenti della geometria euclidea del piano.

Verrà chiarita l'importanza e il significato dei concetti di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione, con particolare riguardo al fatto che, a partire dagli "Elementi" di Euclide, essi hanno permeato lo sviluppo della matematica occidentale.

In coerenza con il modo con cui si è presentato storicamente, l'approccio euclideo non sarà ridotto a una formulazione puramente assiomatica.

Syllabus di Matematica (UMI, 1999)

Analogamente, per l'ingresso alle facoltà scientifiche, in diversi documenti sono indicate quelle che dovrebbero essere le conoscenze e competenze minime di matematica per uno studente che intenda seguire un corso di studi per una qualunque facoltà di carattere scientifico.

Tra le indicazioni presenti mettiamo in evidenza le seguenti ricavate dal *Syllabus di Matematica, Conoscenze e capacità per l'accesso all'Università*, UMI-Unione Matematica Italiana, 1999:

Syllabus di Matematica (UMI 1999)

- *Connettivi logici: negazione, congiunzione, disgiunzione.*
- *Implicazione. Condizioni sufficienti, condizioni necessarie.*
- *Conoscere il significato dei termini: assioma, definizione, teorema, lemma, corollario, ipotesi, tesi. Saper riconoscere ipotesi e tesi in un teorema. Dimostrazioni per assurdo.*
- *Quantificatori: $\forall$ (per ogni) ed $\exists$ (esiste). Uso dei quantificatori.*

Consideriamo le seguenti “frasi”

- a) Un triangolo con due lati uguali è isoscele*
- b) La somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto.*
- c) Se P è un punto non appartenente alla retta r , allora esiste una ed una sola retta passante per P e parallela ad r .*

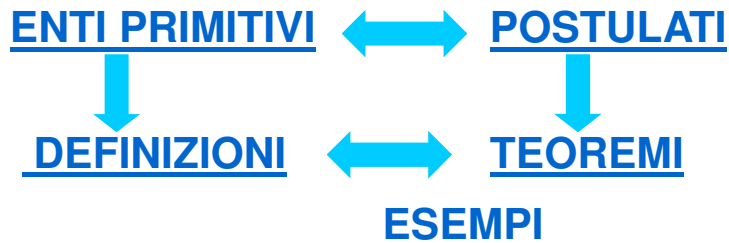
Sono “enunciati” veri ?

- a) è una DEFINIZIONE, cioè viene attribuito un preciso significato ad una parola [“isoscele”]; in questo caso dovremo supporre noto il significato di altri termini... concetti primitivi
- b) è un TEOREMA cioè una proposizione che viene provata tramite un ragionamento (dimostrazione) e per dimostrarla dovremo sfruttare “proprietà” note, ... postulati o assiomi
- c) è un esempio di POSTULATO o ASSIOMA (della Geometria euclidea) cioè una “proprietà iniziale” che viene introdotta senza darne una dimostrazione.

Domande:

- Qual è un esempio di concetto o ente primitivo?
- La proposizione a) è proprio una definizione?

Schema riassuntivo



- a) Per due punti distinti passa una ed una sola retta.
- b) Per ortocentro di un triangolo si intende il punto di incontro delle sue altezze.
- c) $3^0 = 1$ è una definizione o è un teorema?

Altri “nomi” per i teoremi

LEMMA: Teorema utile soprattutto per dimostrare qualche Teorema “importante”.

COROLLARIO: Teorema che si ottiene come “immediata” conseguenza di altri teoremi.

PROPOSIZIONE: sinonimo di Teorema (anche se in Logica...).

LEGGE-REGOLA: si usano normalmente per indicare Teoremi di “natura calcolativa”

CRITERI: Teoremi che esprimono una C.N.S. (uguaglianza di triangoli) a volte solo C.S. (criterio di convergenza delle serie...).

Altri “nomi” per i teoremi

PRINCIPIO: usato con significati diversi.

- Assioma (es. principio del terzo escluso)
- Teorema (es. principio di identità dei polinomi)

(Vedi Principio di Induzione: assioma o teorema?)

CONGETTURA: proposizione della quale non si sa se sia vera o se sia falsa.

Come si «studia» una definizione?

ALCUNI ESEMPI

“COSA” SI INTENDE PER

- TRAPEZIO?
- TRIANGOLO ISOSCELE?
- TRIANGOLO ACUTANGOLO?
- TRIANGOLO OTTUSANGOLO?
- NUMERO PRIMO?

Teoremi

Ogni TEOREMA è composto da

- un ENUNCIATO
- e dalla DIMOSTRAZIONE

In generale, un Teorema si presenta nella forma di implicazione logica da dimostrare.

Se “A” allora “B”

$A \Rightarrow B$ A= ipotesi Deduzione logica

$A \Rightarrow B$ B= tesi

Osservazione

Non sempre Ipotesi e Tesi vengono espresse in modo esplicito (nell'enunciato di un Teorema).

Osservazione

Sia A (Ipotesi) che B (tesi) possono essere congiunzione (o disgiunzione) di due o più proposizioni (e allora le cose sono più difficili...).

- Se un quadrilatero è un quadrato allora le sue diagonali sono uguali e perpendicolari.
- Se n è un numero primo allora $n=2$ o n è dispari.

Osservazione

Esistono teoremi nei quali non compare A (Ipotesi)

- Esistono infinite rette.
- Tutte le rette sono congruenti.
- Esistono infiniti numeri primi.

Osservazione

Il teorema: A implica B (Se A allora B) si può enunciare nella forma:

CONDIZIONE NECESSARIA affinché valga A è che valga B

Ipotesi A Tesi B

CONDIZIONE SUFFICIENTE affinché valga B è che valga A

Ipotesi A Tesi B

Esempio

- Se n è un multiplo di 4 allora n è pari.
- Condizione affinché n sia un multiplo di 4 è che n sia pari.
- Condizione affinché n sia pari è che sia un multiplo di 4.

Cos'è una dimostrazione?

In una teoria si dice dimostrazione della tesi Th dalle **ipotesi** $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$ una sequenza finita e ordinata di enunciati che termina con la tesi Th e tale che ogni enunciato soddisfa una delle seguenti condizioni:

- è un postulato (o assioma) della teoria
- è una delle ipotesi $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$
- è dedotto da uno o più enunciati precedenti mediante applicazione di “regole logiche”.

Osservazione

Con l'uso delle tecnologie è possibile oggi partire da “enunciati aperti”.

Ad es. se n è un numero pari, “cosa” posso affermare di n^2 ?

Esempio

$n=2 \rightarrow n^2=4$ pari

$n=4 \rightarrow n^2=16$ pari,

Argomentare – Congetturare – Dimostrare

“Se n è pari, n^2 è pari”.

Importante e utile in particolare in GEOMETRIA,
ma non solo!

Come si dimostra un Teorema?

Dimostrazione diretta

Vediamo un esempio.

Teorema. Se n è pari, allora n^2 è pari.

Dimostrazione.

(Ipotesi) n è pari

Esiste k tale che $n=2k$

$$n^2 = 4 k^2$$

$$n^2 = 2 (2 k^2)$$

Esiste k' tale che $n^2 = 2 k'$

n^2 è pari (Tesi)

Congetture

Per CONGETTURA si intende una proposizione della quale non si sa se sia VERA o FALSA.

Diventa teorema se si dimostra che è vera; basta un controesempio per affermare che è falsa (in questo caso la negazione della congettura diventa Teorema).

[Vedi anche il “Problema dei quattro colori” delle carte geografiche (ora è un Teorema)]

Esempio di una congettura

“Qualsiasi numero naturale pari > 2 può essere scritto come la somma di due numeri primi”

[Christian Goldbach, 1690 - 1764]

$4 = 2+2$ (e non $1+3$!); quindi...

$6 = 3+3$

$8 = 3+5$ (e non $1+7$!)

$10 = 5+5 = 3+7$; quindi...

e così via...

Altro esempio di congettura

I numeri primi gemelli sono coppie di primi che differiscono di 2.

Es. (3, 5), (5, 7), (11, 13),... sono numeri gemelli

Esistono infinite coppie di numeri primi gemelli?

Problema: *Esistono terne di primi gemelli?*

“Quante” sono?

Esempio: (3, 5, 7)

Vedi anche l'ultimo Teorema di Fermat.

Prima di passare ad altri tipi di dimostrazione è opportuno fare alcune considerazioni su “ $\Rightarrow$ ”

Considerazioni su $\Rightarrow$

- i) Se n è divisibile per 6 allora n è pari
 $A \Rightarrow B$
 - ii) Se n non è divisibile per 6 allora n non è pari
 $(\text{non } A) \Rightarrow (\text{non } B)$
 - iii) Se n è pari allora n è divisibile per 6
 $B \Rightarrow A$
 - iv) Se n non è pari allora n non è divisibile per 6
 $(\text{non } B) \Rightarrow (\text{non } A)$
- | | |
|---|------------------------------------|
| $A \Rightarrow B$ | Proposizione diretta |
| $(\text{non } A) \Rightarrow (\text{non } B)$ | Proposizione contraria di (i) |
| $B \Rightarrow A$ | Proposizione inversa di (i) |
| $(\text{non } B) \Rightarrow (\text{non } A)$ | Proposizione contronominale di (i) |

N.B. $A \Rightarrow B$ è equivalente a $(\text{non } B) \Rightarrow (\text{non } A)$

Questa equivalenza viene (spesso) usata nella dim. di Teoremi:
PASSAGGIO ALLA CONTRONOMINALE

Dimostrazione “per passaggio alla contronominale”

Teorema. Se n^2 è pari allora n è pari.

$$A \Rightarrow B$$

Dimostrazione

Se n è dispari ($\text{non } B$) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} n=2k+1 &\Rightarrow n^2=4k^2+4k+1 \Rightarrow n^2=2(2k^2+2k)+1 \\ &\Rightarrow n^2 \text{ è dispari } (\text{non } A). \end{aligned}$$

[Se ($\text{non } B$) allora ($\text{non } A$)]

Passaggio alla contronominale.

Ragionamento per assurdo

Nella seguente dimostrazione si usa il ragionamento per assurdo che “porta” a un assurdo supponendo vera l’ipotesi e negando la tesi.

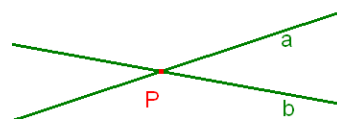
[Di solito l’assurdo consiste nel dimostrare che non vale una proposizione che si sa essere vera o perché è un assioma o un teorema dimostrato o è un’ipotesi].

Una dimostrazione per assurdo

Teorema: Due rette parallele a una terza sono parallele tra loro.

Ipotesi: a, b, c rette; $a \parallel c, b \parallel c$

Tesi: $a \parallel b$.



Dimostrazione (“per casi”)

- Se due o tutte e tre le rette sono coincidenti, il teorema è ovvio.
- Supponiamo che a, b, c siano rette distinte.

Ragioniamo per assurdo [$a \parallel c, b \parallel c$ e a **non** $\parallel b$].

Se a e b fossero incidenti (a **non** $\parallel b$), detto P il loro punto di intersezione, avremmo che per P passerebbero due rette distinte parallele alla retta c ; ma ciò è assurdo perché contraddice il V Postulato di Euclide.

Dimostrazioni indirette

Le dimostrazioni “**per assurdo**”
e quelle che richiedono il
“**passaggio alla contronominale**”
vengono dette
dimostrazioni indirette

In queste dimostrazioni si “usa”
la **negazione della tesi.**

Difficoltà nel passare da una proposizione alla sua negazione

Es. $A \equiv$ Tutti i rombi hanno le diagonali uguali
(non A) $\equiv$

$\neg \forall x P(x)$ equivale a $\exists x \neg P(x)$

Es. $A \equiv$ Esiste un triangolo che ha 2 angoli retti
(non A) $\equiv$

$\neg \exists x P(x)$ equivale a $\forall x \neg P(x)$

Difficoltà nel passare da una proposizione alla sua negazione

Es. Un quadrilatero non è un quadrato se

.....

$$\neg(P_1 \wedge P_2) \text{ equivale } \neg P_1 \vee \neg P_2$$

Es. $A \equiv n$ è un numero primo o n è pari

(non A) $\equiv$

$$\neg(P_1 \vee P_2) \text{ equivale } \neg P_1 \wedge \neg P_2$$

**Bonotto-Ferronato (vedi articolo su
La matematica e la sua didattica, n.2/2003)**

La negazione di

“**Tutti** i triangoli isosceli sono equilateri”

(per “qualcuno”) è

“**Nessun** triangolo isoscele è equilatero”

**Errore del resto presente non solo tra gli
studenti.**

Vinicio Villani, 1994

E' mai possibile che ... nemmeno gli autori dei libri di testo sappiano ancora che la negazione di:

“**Tutti** gli uomini sono **mortali**”

è

“**Esiste** (almeno) un uomo **immortale**”

e non

“Tutti gli uomini sono immortali” ?

Suggerimenti sullo “studio” di un Teorema

- Enunciato del Teorema $[A \Rightarrow B]$
- Esplicitare “le” ipotesi $[A]$ e “le” tesi $[B]$
- Tipo di dimostrazione [diretta, per assurdo,...]
- In quali “punti” della dimostrazione vengono usate le varie ipotesi?
- Quali concetti (definizioni) e quali Teoremi si usano nella dimostrazione?
- Interpretazione geometrica (se esiste!)
- Alcuni esempi [e non “generalizzare” ossia verificare attentamente che si possa applicare il Teorema], vedi (*).
- Chiedersi se vale l'implicazione inversa (eventualmente fornire un controesempio); vedi (**)

(*) “Non generalizzare”

L'esempio della legge di annullamento del prodotto.

- $(-x+1)(x-3)=0 \Rightarrow -x+1=0 \vee x-3=0 \Rightarrow x=1 \vee x=3$

Qualche allievo «generalizza»:

- $(-x+1) \cdot (x-3) = -5 \Rightarrow -x+1=-5 \vee x-3=-5 \Rightarrow x=6 \vee x=-2$ (!!!)

(*) “Non generalizzare ”

“Generalizzazione” della formula di Erone?

Cosa fa pensare che esista una formula per il calcolo dell'area di un triangolo conoscendone i lati?

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Esisterà una formula per il calcolo dell'area di un quadrilatero conoscendone i lati?

Test ingresso di Matematica a Ingegneria Università Ferrara 14- 02-2007

Affinché due quadrilateri siano simili è sufficiente che:

- 1) siano equiangoli
- 2) siano equivalenti
- 3) abbiano i lati in proporzione
- 4) siano regolari
- 5) non so.

Partecipanti: 520

Risposte	1)	186
	2)	46
	3)	193
	4)	17
	5)	78

Errore da “generalizzazione” oppure... ??

(**) “Vale l’inverso?”

In alcuni testi di geometria analitica si trova scritto:

“Se le rette (r) $y = mx + p$ e (s) $y = m'x + q$ sono perpendicolari, allora $m \cdot m' + 1 = 0$ ”.

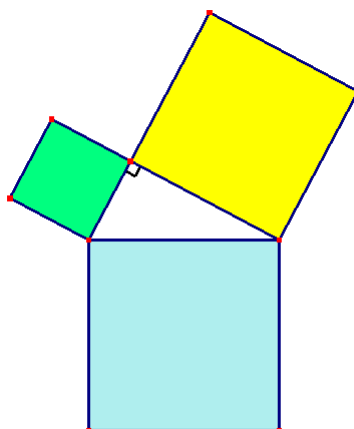
Quindi il fascio di rette perpendicolari ad (r) $y = mx + q$ ha per equazione $y = -\frac{1}{m}x + q'$

● *E' un ragionamento corretto?*

Vedi anche: EQUAZIONI IRRAZIONALI

Osservazione sul Teorema di Pitagora

Enunciato del Teorema

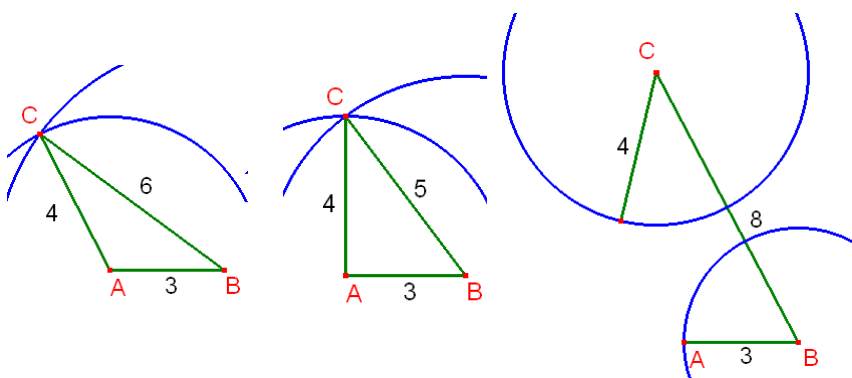


- Cosa si intende per inverso del Teorema di Pitagora?
- Vale l'inverso del Teorema di Pitagora?

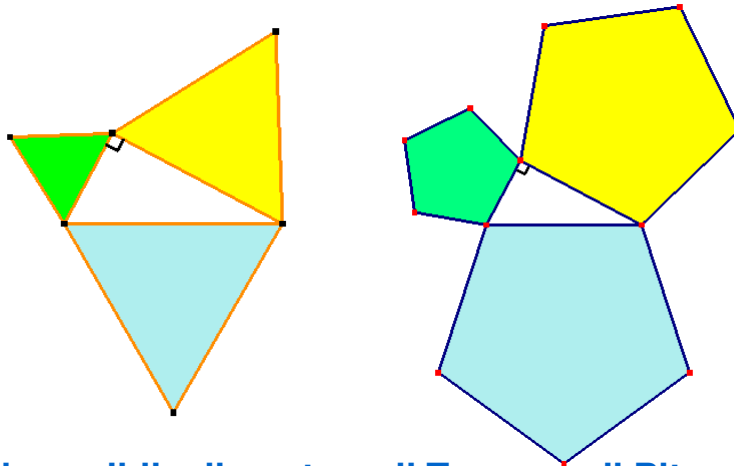
Esempi sul Teorema di Pitagora?

Stabilire se i triangoli di lati a , b , c sono rettangoli:

- i) $a=3$ $b=4$ $c=6$
- ii) $a=3$ $b=4$ $c=5$
- iii) $a=3$ $b=4$ $c=8$ (??)



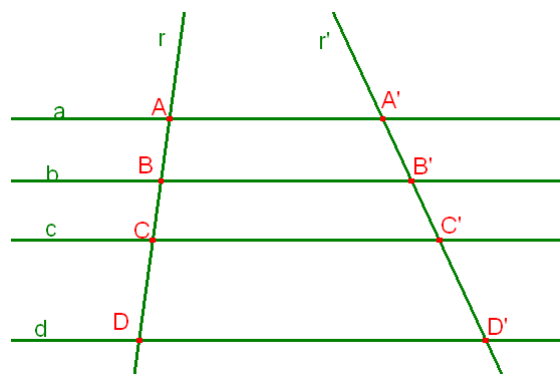
Il Teorema di Pitagora vale solo per i “quadrati” costruiti sui lati?



E' possibile dimostrare il Teorema di Pitagora per via analitica?

Osservazione sul Teorema di Talete

Teorema. Se un fascio di rette parallele è tagliato da due trasversali, i segmenti di una trasversale sono proporzionali ai segmenti corrispondenti dell'altra (cioè ai segmenti compresi tra le stesse parallele).



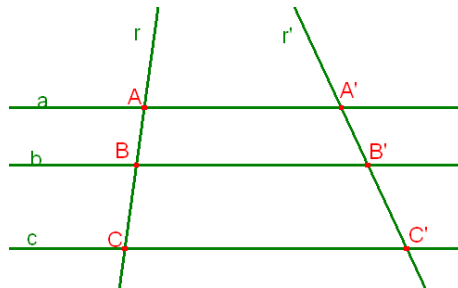
Cosa si intende per inverso del Teorema di Talete?

Vale l'inverso del teorema di Talete?

Caso particolare del Teorema di Talete

Siano date tre rette tagliate da due trasversali.

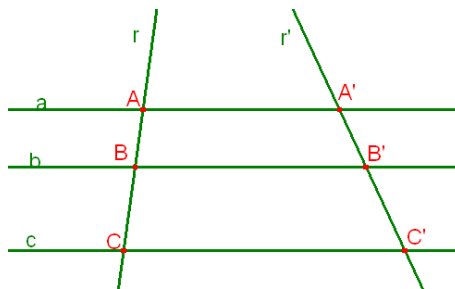
Se le tre rette sono parallele, allora i segmenti corrispondenti sulle due trasversali sono proporzionali.



Inverso “parziale” del Teorema di Talete

Siano date tre rette tagliate da due trasversali.

Se i segmenti corrispondenti sulle due trasversali sono proporzionali e se due delle (altre) tre rette sono parallele anche la terza è parallela a quelle due.



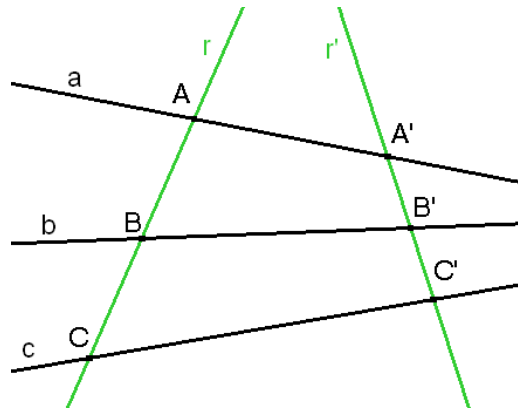
“Inverso” del teorema di Talete ?

In un testo si trova scritto (come “inverso” del Teorema di Talete):

“se un fascio di rette individua su due trasversali due insiemi di segmenti direttamente proporzionali, allora le rette sono parallele”.

$$AB=BC$$

$$A'B'=B'C'$$

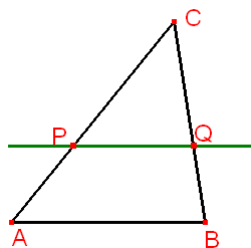


Applicazioni del Teorema di Talete ai triangoli

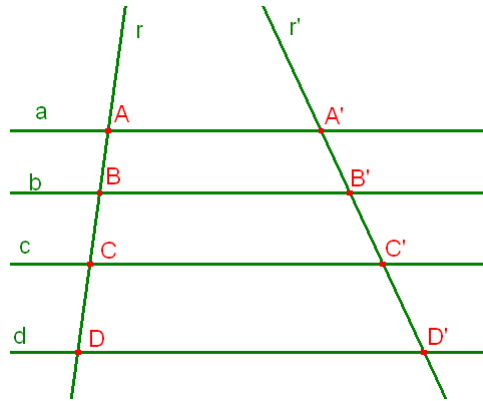
Teorema 1. Una retta parallela ad un lato di un triangolo divide gli altri due lati in parti proporzionali.

Teorema 2. [Inverso del Teorema 1]

Se due lati di un triangolo sono divisi in parti proporzionali, la retta congiungente i punti di divisione è parallela al terzo lato.



Si può dimostrare il Teorema di Talete per via analitica?



Osservazione sul II teorema di Euclide

Enunciato del Teorema

“Cosa” si intende per inverso del II teorema di Euclide?

“Vale” l’inverso di tale teorema?

Vedi la condizione di perpendicolarità delle rette $r: y = mx + q$

ed $r': y = m'x + q'$

Osservazione sulle equazioni irrazionali

“Se α è soluzione di $f(x)=g(x)$ allora è soluzione di $(f(x))^2 = (g(x))^2$ ”

Come viene “applicata” nella dimostrazione delle equazioni canoniche delle coniche?

Esempi e controesempi

Perché in certi “casi” non si accetta come dimostrazione l’uso di esempi ed in altri casi si accetta?

DIPENDE DAL TIPO DI ENUNCIATO DEL TEOREMA

- Tutti i quadrati hanno le diagonali uguali.
- Esiste un numero primo pari.
- Esiste uno ed un solo numero primo pari.
- Esistono segmenti incommensurabili.

Prova di Matematica Ingegneria Università di Ferrara 12-02-2009

Nel piano cartesiano Oxy l’equazione $x^2-6x+8=0$ individua:

- 1) Una coppia di rette parallele
- 2) Una parabola con asse di equazione $x=3$
- 3) Una coppia di punti
- 4) Una parabola di vertice in $(3,-1)$
- 5) Non so.

Candidati 631

Risposte	1)	92
	2)	104
	3)	140
	4)	185
	5)	110

Giuste 14,6%

A che cosa serve una dimostrazione?

- Una dimostrazione serve per convincere (se stessi e gli altri) della correttezza di un enunciato.
- Una dimostrazione può servire a rendere più semplici alcuni calcoli.
- Una dimostrazione aiuta a ricordare l'enunciato e a capire quali sono le proprietà coinvolte.

Esempi sulla generalizzazione

Generalizzazione...

Una spia, al fine di introdursi in una base nemica, osserva ed ascolta, non visto, i seguenti dialoghi:

sentinella

«*sei*»

«*otto* »

«*dieci* »

«*dodici* »

militare

«*tre* »

«*quattro* »

«*cinque* »

«*sei* »

In ognuno dei casi precedenti, la sentinella permette al militare di entrare.

A questo punto la spia ritiene di aver scoperto “la parola d’ordine” e si presenta alla sentinella, la quale dice:

«*quattordici* » e la spia risponde: «*sette* » .

La sentinella spara!! Perché?

Numeri di Fermat: congettura ed errore di generalizzazione

Pierre de Fermat (1601-1665) ipotizzò che “ $F_n = 2^{(2^n)} + 1$ è un numero primo per ogni naturale n ”. Con una esplorazione numerica si trova che per ¶

$n = 0$		$F_0 = 3$		→ è un numero primo ¶
$n = 1$		$F_1 = 5$		→ è un numero primo ¶
$n = 2$		$F_2 = 17$		→ è un numero primo ¶
$n = 3$		$F_3 = 257$		→ è un numero primo ¶
$n = 4$		$F_4 = 65537$		→ è un numero primo ¶
$n = 5$		$F_5 = 641 \cdot 6700417$		→ non è un numero primo

(questo controesempio, per $n = 5$, fu trovato da Eulero nel 1732). Pertanto quanto ipotizzato da Fermat è falso, ossia è vero il seguente teorema: ¶

“Uso” delle ipotesi

Dialogo fra due amici (matematici !) A e B:

A) Sto andando a casa dai miei figli a festeggiare un compleanno.

B) Quanti figli hai e che età hanno?

A) Ne ho tre e invece di dirti la loro età ti dico solo che il prodotto delle loro età è 36.

B) È troppo poco, mi devi fornire altri elementi.

A) Ti dico ancora che la somma delle loro età corrisponde al tuo numero di casa.

Dopo averci pensato un po' B risponde:

B) Ancora non posso stabilire la loro età.

A) Ti do quest'ultimo indizio: il più grande ha gli occhi verdi.

Qual è l'età dei tre figli?

Qual è il numero di casa di B?

Casi possibili

1 , 1 , 36	somma	38
1 , 2 , 18	somma	21
1 , 3 , 12	somma	16
1 , 4 , 9	somma	14
1 , 6 , 6	somma	13
2 , 2 , 9	somma	13
2 , 3 , 6	somma	11
3 , 3 , 4	somma	10

Quindi...

Se l'ultima risposta di A fosse stata:

“Il più piccolo è un maschio” ?

Le ipotesi nei problemi

Problema (da un libro di testo per la Scuola Media)

Trovare le misure dei lati di un triangolo ABC di perimetro 140 cm. Si sa che BC è il doppio di AB e che AC è il doppio di BC. Trovare le misure dei tre lati del triangolo”.

Soluzione. Se $BC = 2 \cdot AB$; $AC = 2 \cdot BC$; $2p = 140$ cm.

Posto $AB = x$.

Si ha l'equazione $x + 2x + 4x = 140$ cm.

Quindi $x = 20$ cm.

Pertanto:

$AB = 20$ cm

$BC = 40$ cm

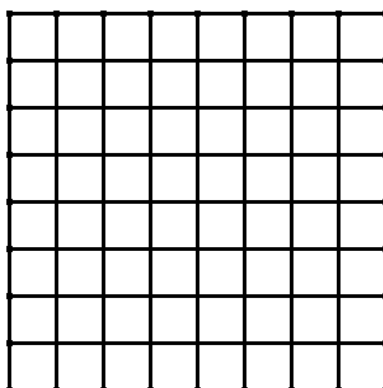
$AC = 80$ cm

Conclusione?

... esiste...

Ricoprire con 32 tasselli da “2 quadrati” la scacchiera di 64 caselle.

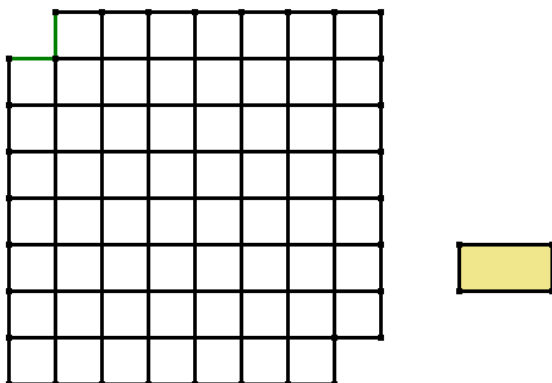
È possibile?



... per ogni...

Ricoprire con **31 tasselli** da “2 quadrati” la scacchiera “mutilata” di **62 caselle**.

È possibile?



Alcune letture consigliate

Il problema della “scacchiera incompleta” è riportato anche in:

Simon Singh, *L'ultimo Teorema di Fermat*, Rizzoli, Milano 1999.

Ian Stewart, *Com'è bella la Matematica*, Bollati Boringhieri, Torino 2016

Vedi anche:

Martin Gardner, *Enigmi e giochi matematici*, Volumi 1-2-3-4, Sansoni, Firenze, 1966-67.